Une analyse de l'enseignement de la numération. Vers de nouvelles pistes.

Eric Mounier

UNIVERSITE PARIS.
DIDEROT (Paris 7)

École doctorale : « Savoirs scientifiques : épistémologie, histoire des sciences, didactique des disciplines »

Doctorat
Didactique des mathématiques

MOUNIER Eric
Une analyse de l'enseignement de la numération au CP
Vers de nouvelles pistes

Thèse dirigée par Mme PERRIN-GLORIAN Marie-Jeanne et M. BUTLEN Denis

Soutenue le 14 décembre 2010

Jury

Mme Teresa ASSUDE, présidente
Mme Lucie DEBLOIS, rapporteur
Mme Claire MARGOLINAS, rapporteur
M. Christophe HACHE, examinateur
Mme Marie-Jeanne PERRIN-GLORIAN, directrice de la thèse
M. Denis BUTLEN, directeur de la thèse

Remerciements

Le travail de longue haleine que représente une thèse ne peut être mené à terme sans aide. En tout premier lieu je tiens à remercier mes deux directeurs de thèse. Denis Butlen m'a dirigé dès la première année. Il m'a aidé à mettre en perspective mon travail. Les relectures avisées de Marie-Jeanne Perrin-Glorian m'ont donné confiance et permis de me repérer dans l'ensemble des différents aspects de la recherche.

Je suis très honoré que Lucie DeBlois et Claire Margolinas aient accepté d'être rapporteur. Je les ai croisées dans mes lectures et leurs travaux ont éclairé de manière déterminante ma thèse.

Je remercie vivement Teresa Assude d'avoir accepté de présider le Jury.

Christophe Hache, directeur de l'IREM Paris 7, est membre du Jury. Il est lui aussi intervenu dès mes premières années de formation en didactique. Je suis heureux qu'il fasse partie du Jury.

Enfin, je suis très reconnaissant à Gérard Vergnaud. A un moment délicat de ma thèse, quand j'ai employé la théorie des champs conceptuels, il m'a permis de recadrer mon travail.

Aline Robert est co-auteure avec Janine Rogalski de la double approche, théorie que j'ai employée pour mes analyses en classe. D'un point de vue plus personnel, Aline Robert a influencé mon parcours. Elle m'a donné le goût de la recherche en didactique. Ses convictions, sa gentillesse et sa rigueur se ressentent dans son approche des enseignants dans les formations qu'elle a initiées et dont j'ai pu bénéficier en master.

Aline Robert a encadré mon mémoire de master, ainsi que Nathalie Sayac. Celle-ci a continué depuis lors à m'encourager, de même que Julie Horoks. Le laboratoire de didactique Didirem, devenu André Revuz, a toujours été un lieu d'accueil bienveillant. Je remercie Alain Kuzniak et Michèle Artigue, directeurs de l'école doctorale. Ils permettent aux jeunes chercheurs de participer aux différents groupes de travail et séminaires et veillent ainsi à ce qu'ils soient associés à la vie scientifique. Je remercie aussi les secrétaires et les bibliothécaires du 6$^{\text{ème}}$ étage de la rue Chevaleret.

Le groupe des jeunes chercheurs du laboratoire de didactique André Revuz a organisé à Paris de nombreuses rencontres. Le séminaire national organisé par l'ARDM a été l'occasion d'échanges avec tous les chercheurs de la France. Ces moments ont souvent donné un nouveau souffle à ma thèse. Je remercie tous les chercheurs, jeunes ou confirmés, qui ont participé à ces rencontres.

Grâce au soutien institutionnel de l'IUFM de l'Université Paris-Est Créteil, j'ai bénéficié d'un aménagement de service indispensable pour réaliser ce travail de thèse. Tous mes collègues m'ont soutenu et encouragé. Deux ont une place toute particulière.
Nathalie Pfaff m'a formé au métier de formateur et a influencé ma réflexion didactique de manière déterminante. Ce travail lui doit beaucoup. Depuis dix ans je travaille en étroite collaboration avec Annie Bonnet, au lycée, à l'IUFM et durant le master de didactique. Après mes études de mathématiques pures, son énergie, sa volonté, sa joie de vivre m'ont permis de mener à bien cette aventure didactique. Elle m'a accompagné jusque dans la phase ultime de mise en forme de la thèse.

Je remercie très chaleureusement les professeurs des écoles qui m'ont autorisé à filmer leur classe, les directeurs d'école ainsi que les élèves et leurs parents. J'ai eu de la chance de rencontrer Agnès Boué, Nathalie Haegel, Corinne Martin et Elsa Prigent. Sans elles, cette recherche n'aurait pu être menée à bien. Je tiens à saluer le travail au quotidien qu'elles font avec leur classe, leur engagement et la volonté qu'elles ont de faire réussir tous les élèves. Je pense aussi à tous mes collègues et particulièrement à Monique Gascoin et Nicole Lalot.

Je remercie toutes les personnes qui m'ont soutenu, aidé, encouragé et ... supporté.
En particulier pour leurs aides techniques, leurs relectures, leur coaching, leur rappel à une autre réalité et leurs petits plats,
Hélène Buisson,
Alain Carpot,
Corinne Debeaux,
Elisabeth Desimpel et ses proches Isabelle, Emmanuelle et Marie-Thérèse,
Florence Desnouveaux,
Laurent Dhainaut,
Cathy Felce,
Sandra Gauthiez,
Tristan Haspala,
Jérémy Holcman et ses amis,
Robert Iasoni,
Hugues Leroy,
Claude Melloul,
Philippe Mounier,
Karen Mounier,
Alain Prioul,
Monique Prioul,
Léo Verbrigghe,
...
Je pense aussi à Jean, Andrée, Claude, Cathy, tous mes proches, ainsi qu'à ma mère Colette, à Lucie et à mon ami d'enfance François qui auraient été heureux de partager avec moi la joie que procure l'aboutissement d'un tel projet.

« Chaque discipline construit et construira ses questions, ses objets et ses méthodes. Mais chacune pourrait et devrait s'approprier, dans sa logique propre, des questions et des réponses produites par d'autres [...]
Une telle ambition implique que les chercheurs eux-mêmes s'interrogent sur leur propre rapport au savoir. »

Bernard Charlot.
Du Rapport au savoir,
Eléments pour une théorie.

Il était une fois ...

1ère Partie

Etude mathématique et sémiotique des numérations

CHAPITRE I

Présentation de la première partie de la thèse : le nombre et les numérations

CHAPITRE II

La numération écrite chiffrée

CHAPITRE III

La numération parlée en France

COMPLEMENTS HISTORIQUES ET CONCLUSION DE LA 1ERE PARTIE

2ème Partie

Apprentissage et enseignement de la numération au CP
Une analyse de l'existant

Chapitre IV
Cadre théorique, problématique, méthodologie

Chapitre V
Des itinéraires proposés dans les recherches antérieures

CHAPITRE VI

Des itinéraires proposés dans les manuels scolaires

3ème Partie

Analyse de réalisations en classe

CHAPITRE VII

Compléments théoriques et méthodologiques

CHAPITRE VIII

Analyse de séances en classe

CHAPITRE IX

Perspectives de recherche : propositions pour une ingénierie didactique

Introduction de la thèse

La numération : les problèmes spécifiques à la classe de cours préparatoire, le CP

La numération décimale de position semble aller de soi, tant elle est naturalisée pour les adultes. Cependant des difficultés d'apprentissage sont à relever : Fischer (1990), DeBlois (1995, 1996), Fuson (1997), ou encore Masselot, Numa Bocage & Vinatier (2007). Ces difficultés se révèlent par exemple lorsque les élèves abordent les opérations ou les nombres décimaux, Parouty (2005), ou bien des décimaux et des fractions, Bednarz et Janvier (1982). Par ailleurs, Delaplace et Weil-Barais (2008) mettent en évidence le fait que les écritures chiffrées sont peu réinvesties dans des problèmes dans lesquelles elles sont pourtant efficaces, au profit de l'utilisation de stratégies de comptage qui s'appuient sur la numération parlée. Qu'en est-il réellement dans les classes ?

En France, la classe de cours préparatoire, le CP, concerne les enfants de 6-7 ans. Ces derniers ont été quasiment tous scolarisés en classe maternelle, la plupart de temps dès l'âge de 3 ans. Ainsi, entre 3 et 6 ans, les élèves ont suivi un enseignement prescrit par des programmes nationaux. Ils ont abordé les nombres via la comptine numérique, « un, deux, trois, etc. », qui est plus ou moins stable jusqu'à environ trente. Les problèmes mathématiques qu'ils rencontrent concernent *a minima* le champ numérique des nombres inférieurs à dix. Cependant, une grande variabilité est susceptible d'être rencontrée selon les élèves et les classes. Néanmoins, dans tous les cas, ce sont les interactions orales qui prédominent en classe. Les désignations chiffrées sont les traces écrites des désignations orales. Par exemple, une file numérique des écritures chiffrées, 1, 2, 3, etc., est le reflet de la comptine orale, un, deux, trois, etc. Le CP est en rupture avec cette situation. Les programmes officiels prescrivent d'utiliser les potentialités spécifiques des écritures chiffrées que permet le principe de position des chiffres.

Voici un exemple que nous avons relevé en classe de CP, en fin d'année, et qui donne un aperçu du problème[1]. Chaque élève d'une classe a devant lui une feuille de papier sur laquelle est dessinée une collection de croix (la feuille est identique pour chaque élève et comporte quarante-sept croix). Le professeur demande : « *écrivez combien il y a de croix* ». Un premier élève énumère les croix en inscrivant au fur et à mesure en dessous de chaque croix les écritures chiffrées 1, 2, 3, …, 47 et en récitant simultanément la comptine numérique un, deux, trois, …, quarante-sept. Un deuxième compte jusqu'à dix, en rayant dix croix, inscrit à côté « 10 », puis compte encore jusqu'à dix, inscrit encore « 10 », jusqu'à obtenir l'écriture « 10, 10, 10, 10, 7 ». Il énonce alors « dix, vingt, trente, quarante, quarante-sept », puis écrit « 47 ». Un troisième fait des paquets de dix croix en les entourant, puis compte le nombre de groupements et inscrit le chiffre 4, puis compte le nombre de croix restantes, et inscrit « 7 » à côté du 4, pour obtenir « 74 ». Un quatrième inscrit en toutes lettres « carante set » et un dernier « 30 ». Le professeur regarde le travail des deux premiers élèves, il signifie au premier qu'il a réussi et lui demande alors de communiquer sa réponse aux autres élèves. L'élève annonce « quarante-sept ». Le professeur indique que tous ceux qui ont écrit « quarante-sept » ont la bonne réponse et demande à ceux qui n'ont pas réussi de recommencer. Ceci illustre deux niveaux de difficulté, au niveau des apprentissages et au niveau de l'enseignement. Pour les apprentissages, la réussite de l'élève assure-t-elle que les connaissances visées aient été construites ? Plus précisément, qu'est-ce qui dans sa procédure peut être relié à des propriétés mathématiques de la numération écrite de position ? En effet, il semble que chacune des procédures utilise à un moment donné la numération parlée mais de manière différente. Du côté de l'enseignement, se pose le problème de la gestion des procédures en classe (celles qui

[1] Pour un autre exemple, voir Masselot, Numa-Bocage & Vinatier (2007).

sont exactes ne sont pas toujours celles qui servent le mieux l'objectif, en particulier du fait de la prédominance de la numération orale), de leur mode de diffusion, de leur mode de validation et finalement du savoir à institutionnaliser. Outre l'enjeu d'apprentissage, le temps qui leur est consacré, le nombre d'élèves, l'hétérogénéité de leurs connaissances, leurs habitudes de communication en classe (langagières entre autres) sont parmi les facteurs avec lesquels le professeur doit jouer.

Précisons le problème au niveau des notions mathématiques en jeu. L'enseignement de la numération écrite chiffrée est lié fortement à la compréhension d'une écriture. Or les écritures chiffrées et leur transcription orale en français ne font pas référence aux mêmes propriétés mathématiques des nombres entiers. Nous pensons notamment aux irrégularités de la numération orale jusqu'à cent, mais, nous allons le voir, ce n'est pas l'unique raison. Ainsi la désignation orale « quatre-vingt-deux », contrairement à la désignation chiffrée « 82 », ne renvoie pas *a priori* à une traduction symbolique de l'organisation d'une collection d'éléments en huit groupements de dix et deux unités. Dans la désignation des nombres, il n'y a pas congruence (au sens de Duval, 2006) entre le registre de l'oral et celui des écritures chiffrées des nombres : on ne peut pas traduire un mot par un chiffre. Certaines désignations sont cependant plus évocatrices. Ainsi l'oral « trente-quatre » peut être interprétable comme trente plus quatre, voire trois dizaines plus quatre. Pour autant, pour les élèves de début de CP, « trente-quatre » est utilisé pour indiquer le cardinal d'une collection essentiellement grâce à la comptine numérique des mots-nombres. Le nombre est très lié à un geste d'énumération un par un et ne peut être envisagé indépendamment de la dénomination de ses prédécesseurs. Ce n'est pas le cas de la désignation chiffrée « 34 » qui peut être associée immédiatement à une organisation globale de la quantité, sans passer par une désignation des nombres inférieurs. En outre, les problèmes abordés par la suite à l'école mettent en jeu des propriétés de l'écriture chiffrée qui ne se retrouvent pas dans les désignations parlées. C'est le cas des écritures des grands nombres, des opérations posées ou encore de l'extension des entiers aux décimaux. L'écriture chiffrée est donc vecteur de mathématiques spécifiques à apprendre et elle ne peut pas constituer une simple transcription écrite du langage oral. Or, en arrivant au CP, les élèves ont une approche des nombres essentiellement en lien avec leur désignation orale, associée le plus souvent à une activité de dénombrement un par un. Par ailleurs, les situations de classe requièrent des médiations gérées par l'enseignant qui ne peuvent faire abstraction des connaissances anciennes des élèves. Comme il semble inévitable de faire une séquence sur les nombres sans les nommer, se pose alors la question de la place des désignations orales dans l'apprentissage de la numération décimale de position : comment en faire une aide et non un obstacle ?

En résumé, tenir compte des désignations orales est incontournable pour l'enseignant. Se pose alors le problème de leur gestion en classe dans l'enseignement de la numération décimale de position, à la fois au niveau du contenu mathématique et des déroulements en classe. Dans l'exemple donné, nous avons vu que ces deux problèmes étaient liés et ne pouvaient être considérés sans des facteurs afférents aux conditions d'exercice.

Le projet de la thèse

Beaucoup de recherches ont été consacrées à la numération. Cependant des problèmes en classe persistent et nous pensons qu'il est important pour les comprendre d'observer le début de l'apprentissage, c'est-à-dire l'enseignement en classe de CP. Le projet de la thèse est de tirer le bilan des travaux existants, de faire le point sur les difficultés résistantes des élèves dans les débuts des apprentissages, de revisiter le contenu pour faire un nouvel inventaire des possibles, et aussi de rendre compte des pratiques actuelles à travers l'analyse des manuels et des mises en œuvre effectives. La finalité est d'ouvrir de nouvelles perspectives pour l'enseignement. Nous considérons que notre travail est en résonance avec le rapport Prost (2001) qui souligne l'accumulation de recherches sur l'école élémentaire et le manque de condensation sur des résultats acceptés par tous. La thèse doit contribuer à la compréhension des déroulements en classe grâce à une synthèse de ce qui existe, permettant ainsi d'envisager des propositions qui puissent effectivement être mises en œuvre dans les classes « ordinaires » ou du moins aller dans cette direction. Mais notre but n'est pas de faire des propositions. Si cela avait été le cas, nous aurions pu après la première partie, consacrée à l'analyse mathématique des numérations via les signes employés, prendre une autre direction, par exemple en utilisant la théorie des situations didactiques pour élaborer une ingénierie didactique. Ainsi le dernier chapitre de la thèse doit être compris comme un travail qui prépare une future recherche pour approfondir celle que nous avons menée concernant en particulier la compréhension des déroulements en classe : ce chapitre ne doit pas être regardé comme un aboutissement. La proposition d'ingénierie didactique qu'il contient prend en compte des résultats obtenus successivement : ce sont eux qui sont l'enjeu scientifique et l'apport de la thèse.

Approche adoptée pour l'étude

Notre avons entrepris une étude de la notion dans le but de l'enseigner. Elle comprend donc à la fois une analyse de la notion à enseigner et celle d'enseignements effectifs.
Nous avons besoin d'une analyse fine de la notion d'un point de vue sémiotique et mathématique. Ceci nous permet de reconsidérer les nombreuses études menées et méthodes employées antérieurement afin d'apporter un éclairage réellement nouveau. Faire un bilan de l'existant permet de poser le problème sur de nouvelles bases. Notre approche vise à articuler un point de vue « descendant », de la théorie vers la pratique, et un point de vue « ascendant », de la pratique vers la théorie. La pertinence de notre recherche à produire des résultats originaux se fonde sur cette articulation, alliée au fait de considérer le problème selon le point de vue de la non-congruence des deux numérations.
Ajoutons que nous reconnaissons une certaine parenté entre notre démarche et celle que décrit François Conne (2001) :
« Comme il en va classiquement en épistémologie, […], il n'y a pas de sujets, on en a fait abstraction, on ne présente ici que le point de vue de l'objet que sont les mathématiques, il s'agit d'épistémologie des mathématiques, pas de l'étude de la connaissance de sujets, ni même de savoirs institués. Réintroduire les sujets ne peut se faire sans ouvrir le schéma à deux nouvelles dimensions : celle de leur cognition propre et celle des segments de réalité où elle vient s'exercer. Ce n'est plus seulement à un sujet générique ni à une réalité réduite à un divers empirique que nous avons affaire, mais bel et bien à un sujet connaissant dans l'action sur le réel. Or cette prise en compte des sujets est une nécessité en didactique puisqu'il y a intention d'enseigner et que cela distingue deux types de sujets selon qu'ils en sont porteurs ou bénéficiaires. Les questions de didactique nous ont obligés à faire un retour en arrière sur ce qui avait été abstrait par l'épistémologie, et nous ne faisons que reprendre à notre compte une démarche que Piaget avait inaugurée avec son épistémologie génétique […]. Il n'y a plus seulement deux blocs à considérer : langage formel/mathématiques d'une part et divers empirique/concepts de l'autre, mais quatre. Deux nouveaux blocs que je désignerai ici, sans doute de manière encore maladroite, par : le bloc connaissance/expérience d'une part, régi par les lois que tentent de découvrir les psychologues et le bloc savoir/situations, d'autre part qui, lui, relève de l'ordre du pragmatique. Pour moi [c'est-à-dire l'auteur, François Conne] *la didactique des mathématiques s'occupe à comprendre les liens entre chacun de ces 4 pôles. Et alors oui, il nous faut des théories pour comprendre ce qui se passe dans l'univers des savoirs et des situations tout comme il nous faut des théories pour comprendre les phénomènes cognitifs, ou des théories mathématiques pour comprendre le monde mathématique, ainsi que des théories conceptuelles pour penser tout cela. ».*

Plan d'étude

Dans la thèse, chaque partie va apporter des éléments de réponse aux questions soulevées de manière successive et ouvrir un nouveau champ de questionnement. Ainsi, les questions auxquelles nous tentons d'apporter des réponses ne peuvent être que précisées au fur et à mesure.

La première partie, constituée des chapitres 1, 2, 3, est consacrée entièrement à l'étude du contenu mathématique. La question que nous nous posons est celle de la proximité des deux numérations au niveau des mathématiques qui leur sont sous-jacentes. Si une certaine non-congruence est signalée par l'emploi de singularités telles que « quatre-vingts », au-delà, sous-tendent-elles les « mêmes » mathématiques ? Puisqu'il est question de signes désignant l'objet « nombre », nous convoquons pour nos analyses des éléments de sémiotique et de mathématiques, c'est ce que nous précisons dans le **chapitre 1**. La numération écrite chiffrée est étudiée dans le **chapitre 2** dans le cadre de la théorie (mathématique) des langages. La numération parlée en France est initialement utilisée comme un langage par les élèves. Les enfants apprennent à compter oralement avant d'apprendre à écrire les nombres et avant qu'on leur enseigne la base dix. Ils ont donc des représentations et des interprétations des noms des nombres via la langue française. C'est pourquoi nous allons adopter une approche linguistique dans le **chapitre 3**. La conclusion de la première partie fait en outre intervenir des aspects historiques. Nous dégageons différentes interprétations qui sont définies par des principes mathématiques et la mise en signes de ces principes.

La deuxième partie, constituée des chapitres 4, 5, 6, est consacrée à l'étude des recherches existantes et de manuels scolaires en vigueur. Ils sont considérés comme deux sources d'informations pour préciser les questions qui se posent dans les déroulements en classe. Nous les analysons du point de vue de la non-congruence entre les deux numérations qui a été étudiée dans la première partie. Ceci nécessite des apports théoriques pour comprendre ce que deviennent les interprétations des numérations au niveau d'un sujet. C'est l'objet du **chapitre 4** qui fait appel à la théorie des champs conceptuels de Gérard Vergnaud. Ceci nous conduit à l'élaboration de deux outils d'analyse : tout d'abord les cheminements cognitifs (du côté du sujet en résolution de problème) et ensuite la notion d'itinéraire cognitif d'enseignement (la transposition au niveau de l'enseignement du premier outil). Ainsi dans le **chapitre 5**, nous caractérisons les recherches antérieures grâce, entre autres, aux itinéraires qu'elles sous-tendent. Le **chapitre 6** est consacré à l'étude des manuels, ce qui permet alors de préciser les itinéraires et de considérer un premier niveau d'étude de l'enseignement proposé en classe.

La troisième partie, constituée des chapitres 7, 8, 9, concerne les déroulements en classe. Dans le chapitre 7, nous précisons les questions étudiées et nous décrivons les compléments théoriques et méthodologiques nécessaires à notre étude, issus de la double approche didactique et ergonomique d'Aline Robert et Janine Rogalski ainsi que de la théorie des situations didactiques de Guy Brousseau. Dans le **chapitre 8** nous analysons des déroulements de séances filmées en classe de CP afin de comprendre le jeu des différentes interprétations dans les différentes phases des séances. Nous voulons en inférer des informations génériques.
Grâce à l'ensemble des résultats que nous avons recueillis au fur et à mesure, dans le dernier chapitre, le **chapitre 9**, nous pouvons proposer des pistes pour l'enseignement de la numération. Ces pistes permettent de disposer d'un moyen de poursuivre la recherche.

PREMIERE PARTIE

Etude mathématique et sémiotique des numérations

Compléments historiques

CHAPITRE I
Présentation de la première partie de la thèse
Le nombre et les numérations

Introduction

L'objectif de cette première partie est de dégager les mathématiques sous-jacentes aux deux systèmes de numération qui sont en jeu dans les apprentissages au CP, de les comparer. Cette étude va nous permettre de préciser la non-congruence entre le système de la numération orale et le système de la numération chiffrée utilisés en France, afin de porter un nouveau regard sur l'enseignement de la numération en CP.
Dans ce premier chapitre, nous allons étudier le problème que pose la numération du point de vue des mathématiques afin de déterminer une méthodologie d'étude adaptée à notre objectif. Nous commençons par examiner des descriptions relativement anciennes qui permettent de faire émerger les questions qui se posent. Ensuite nous décrivons la méthodologie adoptée pour cette première partie de la thèse. Nous terminons ce premier chapitre en donnant les différentes approches mathématiques de la notion de nombre entier auxquelles nous allons nous référer.

1. Les mathématiques dans notre numération écrite et orale : premières descriptions et questions soulevées

1.1 Descriptions de Bezout et Reynaud

Comment (re)trouver les mathématiques dans nos systèmes de numération ? Les textes écrits par Bezout E. et Reynaud A. A. L. (1821)[2] sont considérés par Chambris (2008) comme caractéristiques des descriptions de la numération que l'on peut fournir. Ce sont ces textes que nous allons considérer.

[2] Bezout rédige un « *Traité d'arithmétique à l'usage de la Marine et de l'artillerie* » à destination des Gardes de Pavillon de la Marine pour être admis au rang d'Officier de Vaisseaux. Dans l'édition de 1821, Reynaud présente ses « *Notes sur les ouvrages de Bezout* » et en particulier ses « *Notes sur l'arithmétique* » comme un complément (et un approfondissement) du traité de Bezout.

a. La description de Bezout (1821)

De la Numération et des Décimales.

7. La numération est l'art d'exprimer tous les nombres par une quantité limitée de noms et de caractères : ces caractères s'appellent *chiffres*.

Nous nous dispenserons de donner ici le nom des nombres ; c'est une connaissance familière à tout le monde.

Quant à la manière de représenter les nombres par des chiffres, plusieurs raisons nous engagent à en exposer les principes.

8. Les caractères dont on fait usage dans la numération actuelle, et les noms des nombres qu'ils représentent, sont tels qu'on les voit ici.

zéro,	un,	deux,	trois,	quatre,	cinq,	six,	sept,	huit,	neuf.
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9.

Pour exprimer tous les autres nombres avec ces caractères, on est convenu que de dix unités on en ferait une seule, à laquelle on donnerait le nom de *dixaines*, et que l'on compterait par dixaines comme on compte par unités, c'est-à-dire, que l'on compterait deux dixaines, trois dixaines, etc., jusqu'à 9 : que pour représenter ces nouvelles unités, on emploierait les mêmes chiffres que pour les unités simples, mais qu'on les en distinguerait par la place qu'on leur ferait occuper, en les mettant à la gauche des unités simples.

Ainsi, pour représenter *cinquante-quatre*, qui renferment cinq dixaines et quatre unités, on est convenu d'écrire 54. Pour représenter *soixante*, qui contiennent un nombre exact de dixaines et point d'unités, on écrit 60, en mettant un zéro, qui marque qu'il n'y a point d'unités simples ; et détermine le chiffre 6 à marquer un nombre de dixaines. On peut, par ce moyen, compter jusqu'à *quatre-vingt-dix-neuf* inclusivement.

9. Remarquons, en passant, cette propriété de la numération actuelle ; savoir, qu'un chiffre placé à la gauche d'un autre, ou suivi d'un zéro, représente un nombre dix fois plus grand que s'il était seul.

10. Depuis 99 on peut compter jusqu'à *neuf cent quatre-vingt-dix-neuf*, par une convention semblable. De dix dixaines on composera une seule unité qu'on nommera *centaine*, parce que dix fois dix font cent ; on comptera ces centaines depuis un jusqu'à neuf, et on les représentera par les mêmes chiffres, mais en plaçant ces chiffres à la gauche des dixaines.

Ainsi, pour marquer *huit cent cinquante-neuf*, qui contiennent huit centaines, cinq dixaines et neuf unités, on écrira 859. Si l'on avait *huit cent neuf*, qui contiennent huit centaines, point de dixaines, et neuf unités, on écrirait 809 ; c'est-à-dire que l'on mettrait un zéro pour tenir la place des dixaines qui manquent. Si les unités manquaient aussi, on mettrait deux zéros : ainsi, pour marquer *huit cents*, on écrirait 800.

11. Remarquons encore qu'en vertu de cette convention, un chiffre suivi de deux autres, ou de deux zéros, marque un nombre cent fois plus grand que s'il était seul.

12. Depuis *neuf cent quatre-vingt-dix-neuf*, on peut compter, par le même artifice, jusqu'à *neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf*, en formant de dix centaines une unité qu'on appelle *mille*, parce que dix fois cent font mille ; comptant ces unités comme ci-devant, et les représentant par les mêmes chiffres placés à la gauche des centaines.

Ainsi, pour marquer *sept mille huit cent cinquante-neuf*, on écrira 7859 ; pour marquer *sept mille neuf*, on écrira 7009, et pour *sept mille*, on écrira 7000, où l'on voit qu'un chiffre suivi de trois autres, ou de trois zéros, marque un nombre mille fois plus grand que s'il était seul.

13. En continuant ainsi de renfermer dix unités d'un certain ordre, dans une seule unité, et de placer ces nouvelles unités dans des rangs de plus en plus avancés sur la gauche, on parvient à exprimer d'une manière uniforme, et avec dix caractères seulement, tous les nombres entiers imaginables.

14. Pour énoncer facilement un nombre exprimé par tant de chiffres qu'on voudra, on le partagera, par la pensée, en tranches de trois chiffres chacune, en allant de droite à gauche : on donnera à chaque tranche les noms suivans, en partant de la droite, *unités*, *mille*, *millions*, *billions*, *trillions*, *quatrillions*, *quintillions*, *sextillions*, etc. Le premier chiffre de chaque tranche, en partant toujours de la droite, aura le nom de la tranche, le second celui de dixaines, et le troisième celui de centaines.

Ainsi, en partant de la gauche, on énoncera chaque tranche comme si elle était seule, et l'on prononcera à la fin de chacune le nom de cette même tranche : par exemple, pour énoncer le nombre suivant :

quatrillions,	trillions,	billions,	millions,	mille,	unités.
23	456	789	234	565	456.

On dira vingt-trois *quatrillions*, quatre cent cinquante-six *trillions*, sept cent quatre-vingt-neuf *billions*, deux cent trente-quatre *millions*, cinq cent soixante et cinq *mille*, quatre cent cinquante-six *unités*.

15. De la numération que nous venons d'exposer, et qui est purement de convention, il résulte qu'à mesure qu'on avance de droite à gauche, les unités dont chaque nombre est composé, sont de dix en dix fois plus grandes, et que par conséquent, pour rendre un nombre dix fois, cent fois, mille fois plus grand, il suffit de mettre à la suite du chiffre de ses unités, un, deux, trois, etc., zéros : au contraire, à mesure qu'on rétrograde de gauche à droite, les unités sont de dix en dix fois plus petites.

16. Telle est la numération actuelle : elle est la base de toutes les autres manières de compter, quoique dans plusieurs arts on ne s'assujétisse pas toujours à compter uniquement par dixaines, par dixaines de dixaines, etc.

Bezout ne donne pas tous les noms pour les nombres inférieurs à neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf, les considérant comme connus de tous : il se contente d'exemples. Il définit la numération écrite chiffrée (qu'il nomme tout simplement numération) à partir d'une numération orale « en unités » qui elle-même indique un nombre connu grâce à sa désignation orale usuelle. Cette numération en unités consiste à nommer les nombres en utilisant les mots « dizaine », « centaine », « millier », etc.[3]. Il l'utilise pour les nombres inférieurs à neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf. Il explique donc comment nommer un nombre dans la numération en unités en « *comptant* » une quantité à l'aide des différentes unités de mesure que sont l'unité, la dizaine, la centaine etc. Ensuite il indique le passage entre cette désignation dans la numération en unités et l'écriture chiffrée. Ainsi, pour les nombres inférieurs à cent, il explique que le fait de « *compter par dizaines comme on compte par unités* » permet de dire que « *cinquante-quatre renferme cinq dizaines et quatre unités* » et donc pour le « *représenter* », « *il est convenu d'écrire 54* ». Ce procédé lui permet d'obtenir l'écriture chiffrée des quatre-vingt-dix-neuf premiers nombres. Cependant, il a dû auparavant indiquer la correspondance entre les noms des dix premiers nombres et leur écriture chiffrée, y compris zéro qui n'intervient pourtant pas dans les désignations usuelles des nombres. Il indique l'emploi du signe « 0 » lorsque le comptage ne donne pas « *d'unités simples* », sans donner réellement de justification. Pour obtenir les écritures chiffrées de tous les nombres inférieurs à neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf, il procède de même : il indique la correspondance entre la numération orale usuelle et une numération en unités « régulière » (par exemple soixante comporte six dizaines), c'est-à-dire que chaque unité est obtenue à partir de la précédente en en rassemblant dix, puis il indique le passage de cette numération en unités à l'écriture chiffrée. A noter cependant qu'il ne pose pas explicitement le problème de l'unité « dix mille » pour laquelle il n'existe pas de nom spécifique. Il explique néanmoins le découpage en tranches de trois pour les nombres à partir de dix mille, mais dans le sens de la lecture (passage de l'écriture chiffrée à la prononciation orale).

En résumé, l'algorithme utilisé est le suivant :

1. Les nombres sont définis grâce à leur désignation orale usuelle, qui permet en particulier de constituer des collections à partir de leur cardinal.
2. Les noms des dix premiers nombres sont traduits par des chiffres, y compris le nombre zéro.
3. A la désignation orale usuelle est associée un principe de dénombrement d'une quantité à l'aide d'unités successives, chacune de ces unités étant déduite de la précédente par multiplication par dix : des paliers sont ainsi mis en évidence, correspondant aux nombres désignés par dix, cent, mille et aux expressions dizaine, centaine, millier.
4. Pour les nombres inférieurs à neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf, une fois un nombre donné par la désignation orale usuelle, sa désignation est traduite dans une numération en unités (« *cinquante quatre renferme cinq dizaines et quatre unités* »), celle-ci est à nouveau traduite en une écriture chiffrée de position (le cinq s'écrivant 5 et le quatre, 4), les chiffres se plaçant au fur et à mesure à gauche les uns des autres.
5. Pour les nombres supérieurs à neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf, c'est le principe du passage à l'unité de rang supérieur qui est indiqué pour l'écriture « *en continuant ainsi de renfermer dix unités d'un certain ordre dans une seule unité* » sans plus faire référence à une numération en unités.
6. Une fois ces principes posés, au-delà de neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf, c'est cette fois-ci la désignation orale usuelle qui sera décrite à partir de la désignation chiffrée, en mettant en avant une segmentation en tranches de 3 chiffres. On donne un nom à chaque tranche et *« le premier chiffre de chaque tranche, en partant toujours de la droite, aura le nom de la tranche, le second celui de dixaines, et le troisième celui de centaines ».*

Ces éléments soulèvent des questions mathématiques :

[3] Pour une définition plus précise, voir Chambris (2008).

- Le zéro joue un rôle à part, servant pour noter l'absence d'unité d'un certain ordre : il n'est pas nécessaire de signifier cette absence avec un comptage en unités, pourtant Bezout introduit dès le début zéro comme un nombre.
- Le comptage par dizaines, puis par dizaines de dizaines et ainsi de suite est justifié par le fait que « *dix fois dix font cent* ». Ceci repose-t-il sur l'usage de mots (cent ou centaine) ou sur une nécessité mathématique ? La régularité de l'obtention des différentes unités de mesure par multiplication par dix n'est ainsi pas clairement justifiée. Elle semble aller de soi. Cependant, Bezout annonce à la fin de sa description que la numération (chiffrée) qu'il vient de décrire est « *purement de convention* ».
- La définition des nombres est peu claire. La numération orale semble définir les nombres, on le voit dans la correspondance entre les dénominations orales des premiers nombres et la désignation chiffrée. Cependant, dans un passage précédant l'extrait donné ci-dessus, Bezout indique : « *Le nombre exprime de combien d'unités ou de parties d'unité une quantité est composée* ». La quantité est « *tout ce qui est susceptible d'augmentation ou de diminution* » et il cite comme quantité l'étendue, la durée, le poids, ce qui correspond dans le langage actuel à la notion de grandeur[4]. Mais il ne considère les quantités « qu'en telles qu'elles sont exprimées en nombre ». Et pour cela, il précise ce qu'est une unité c'est « *une quantité que l'on prend (le plus souvent arbitrairement) pour servir de comparaison à toutes les quantités d'une même espèce* » et il donne l'exemple d'un « *corps pèse cinq livres, la livre c'est l'unité* ». Le nombre entier lui-même semble assimilé à sa désignation orale usuelle.
- Bezout affirme que dix « *caractères* » suffisent pour la numération chiffrée, mais il n'y a pas de démonstration d'une telle affirmation. Elle semble une conséquence (évidente) de la construction itérative qu'il propose.
- Le passage de neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf à dix mille est particulier. Dans la description donnée il est nécessaire de le spécifier car dans un comptage en unités il n'existe pas de nom spécifique pour l'unité correspondant à « dix mille ». La dénomination de l'unité n'est cependant pas mathématiquement nécessaire à l'écriture chiffrée. C'est aussi le moment où Bezout inverse son ordre de description, il va indiquer la désignation orale des nombres à partir de leur écriture chiffrée, car il y a en effet ici une non-congruence entre la numération orale (qui fait apparaître des unités par assemblage par mille, ce que nous nommons usuellement les classes) et la numération en unités « régulière », c'est-à-dire celle qui utilise des unités successives « *en continuant ainsi de renfermer dix unités d'un certain ordre dans une seule unité* » (n°13 dans le texte). Ainsi, Bezout poursuit sa logique jusqu'au bout consistant à passer par une numération en unités régulière pour décrire la numération chiffrée (n°15).

[4] Pour la distinction entre grandeur, quantité, mesure, unité, etc., voir Rouche (1992).

b. La description de Reynaud (1821)

2. Pour *former les nombres*, on part de l'unité ; l'unité ajoutée à elle-même, donne un nombre nommé *deux ;* celui-ci augmenté d'un, compose un nouveau nombre nommé *trois ;* et en ajoutant successivement l'unité à chaque nombre obtenu, on obtient les *nombres*, *quatre*, *cinq*, *six*, *sept*, *huit*, *neuf*. Ce dernier augmenté d'un, donne le nombre *dix ;* la collection de dix unités forme un nouvel ordre d'unités, nommé *dixaine ;* et de même qu'on a compté depuis une unité jusqu'à neuf unités, on a compté aussi depuis une dixaine jusqu'à neuf dixaines ; mais pour abréger, au lieu des mots composés, une dixaine, deux dixaines, trois dixaines, quatre dixaines, cinq dixaines, six dixaines, sept dixaines, huit dixaines, neuf dixaines, on dit : *dix*, *vingt*, *trente*, *quarante*, *cinquante*, *soixante*, *soixante-dix*, *quatre-vingt ; quatre-vingt-dix*. On peut substituer aux trois derniers noms, les mots *septante*, *octante*, *nonante*, qui désignent mieux, *sept dixaines*, *huit dixaines*, *neuf dixaines*. Pour exprimer les neuf nombres compris entre deux dixaines consécutives, on énonce successivement les dixaines et les unités ; ainsi, la collection de trois dixaines et de sept unités, se nomme *trente-sept*. Il faut excepter de ce système les six premiers des neuf nombres compris entre dix et vingt ; car au lieu des mots, dix-un, dix-deux, dix-trois, dix-quatre, dix-cinq, dix-six, on dit : *onze*, *douze*, *treize*, *quatorze*, *quinze*, *seize*. La collection de neuf dixaines et de neuf unités, compose le nombre *nonante-neuf ;* celui-ci augmenté d'un, donne le nombre *cent*, composé de dix dixaines, et la réunion de dix dixaines se nomme *centaine*. On compte depuis une centaine jusqu'à neuf centaines ; et pour désigner les nonante-neuf nombres compris entre deux centaines consécutives, on ajoute aux noms, cent, deux cents, ..., neuf cents, ceux des nonante-neuf premiers nombres. Par exemple, la collection de quatre centaines et de huit unités, se nomme *quatre cent huit*. On parvient ainsi au nombre neuf cent nonante-neuf ; celui-ci augmenté d'un, donne dix centaines ; cette collection de dix centaines, forme une nouvelle unité principale nommée *mille ;* et de même qu'on avait compté par unités, dixaines et centaines d'unité, depuis une unité jusqu'à mille unités, on compte par unités, dixaines et centaines de *mille*, depuis une unité de *mille* jusqu'à mille unités de *mille*, qu'on nomme *million*. Quant aux nombres compris entre deux mille consécutifs, on ajoute au nom des mille, les noms des neuf cent nonante-neuf premiers nombres. Ainsi, la collection de sept mille et de cinq cent sept unités, se nomme sept mille cinq cent sept. Le nombre, neuf cent nonante-neuf mille, neuf cent nonante-neuf, augmenté d'un, donne une collection de mille mille, appelée *million ;* mille millions forment un *billion ;* et ainsi de suite.

On peut observer que d'après ce système, *le nom d'un nombre ne dépend jamais que de la combinaison des noms des neuf cent nonante-neuf premiers nombres, avec les mots, unité, mille, million, billion, etc. ;* de sorte que *l'énoncé d'un nombre n'exprime jamais plus de neuf unités, neuf dixaines et neuf centaines de chaque espèce.*

La manière d'écrire tous les mots à l'aide des diverses combinaisons des lettres de l'alphabet, fit pressentir la possibilité de représenter tous les nombres par un petit nombre de *signes ;* il était même facile de prévoir que ces derniers, nommés *chiffres*, seraient en moindre nombre que les lettres, car ils ne doivent servir qu'à désigner une très petite partie des mots exprimés par les lettres. Le but qu'on s'est proposé en inventant les chiffres étant d'abréger l'écriture des nombres, on dut suivre la route déjà tracée par l'invention des mots. Ainsi, de même qu'on avait adopté neuf noms simples pour les neuf premiers nombres, on adopta neuf chiffres pour les représenter ; et comme les combinaisons de ces neuf noms avec ceux des différentes unités avaient donné les noms de tous les nombres, on soumit les chiffres à la même loi, en exprimant par un même chiffre, comme on avait énoncé par le même nom, un même nombre d'unités, de dixaines, de centaines, etc. On représenta donc les neuf premiers nombres

un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf,

par les chiffres,

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Ce qui fournit le moyen de simplifier l'écriture des nombres, en remplaçant les nombres d'unités, de dixaines et de centaines de chaque ordre, par les chiffres qui les représentent. Ainsi, pour écrire le nombre *neuf cent quarante-sept unités*, on le décomposa en, *neuf* centaines, *quatre* dixaines et *sept* unités ; ce qui conduisit à 9 *centaines* 4 *dixaines* 7 *unités*.

La nécessité de soumettre les nombres à diverses opérations, fit apercevoir que le mélange des mots, unités, dixaines, etc., avec les chiffres, compliquait l'écriture des nombres, et que par conséquent il était utile de faire entièrement disparaître les lettres. Pour y parvenir, on classa les noms des unités, dixaines et centaines de chaque ordre, suivant leur rang de formation ; les *unités simples* furent nommées *unités du premier ordre ;* les dixaines, *unités du deuxième ordre ;* les centaines, *unités du troisième ordre ;* etc. ; de sorte que le nombre *neuf cent quarante-sept* peut s'écrire :

9 unités du 3e ordre, 4 unités du 2e ordre, 7 unités du 1er ordre.

Cette dernière forme, quoique la plus compliquée, fournit l'idée heureuse de disposer les chiffres de manière que le rang de chacun indiquât l'ordre des unités qu'il représente. On convint que de plusieurs chiffres mis à côté les uns des autres, le premier, à partir de la droite, exprimerait des unités du premier ordre, ou unités simples ; le deuxième, des unités du deuxième ordre, ou dixaines ; le troisième, des unités du troisième ordre, ou centaines ; et ainsi de suite. D'après cette convention, le nombre, *neuf cent quarante-sept*, peut s'écrire ainsi, 947 ; car le chiffre 9 occupant la troisième place, vaudra neuf unités du troisième ordre, ou neuf centaines, ou neuf cents ; le deuxième chiffre 4, vaudra 4 unités de deuxième ordre, ou quatre dixaines, ou quarante ; enfin le premier chiffre 7, vaudra sept unités. L'assemblage 947, exprime donc *neuf cent quarante-sept* unités.

Plusieurs nombres échappent à ce système ; on ne saurait, par son moyen, écrire un nombre qui ne contiendrait pas toutes les unités des ordres inférieurs à ses plus hautes unités. Pour vaincre cette difficulté, on a inventé le chiffre *auxiliaire* 0, nommé *zéro*, qui n'ayant aucune valeur par lui-même, sert seulement à conserver aux *chiffres significatifs*, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, le rang qui convient à l'ordre de leurs unités. Ainsi, pour écrire en chiffres, le nombre *neuf cent sept*, composé de neuf centaines et de sept unités, sans dixaines, on met un zéro entre 9 et 7, pour tenir la place des dixaines ; ce qui donne 907.

En général : *Pour mettre en chiffres un nombre énoncé ; écrivez successivement à côté les uns des autres et en commençant par la gauche, les centaines, les dixaines et les unités de chaque ordre ternaire* (*), *et remplacez par des zéros, les unités, dixaines et centaines qui pourraient manquer. Parvenu aux unités simples, le nombre énoncé sera écrit.* Appliquons cette règle au nombre

dix-sept millions cinq cent deux unités.

Les plus hautes unités de ce nombre étant des millions, il devra renfermer trois *tranches*, savoir : celle des *millions*, celle des *mille* et celle des *unités ;* posant donc à chacune de ces *tranches*, les centaines, dixaines et unités énoncées et remplaçant celles qui manquent par des zéros, on écrira 17 000 502.

Réciproquement : *Pour énoncer un nombre quelconque écrit en chiffres ; partagez-le d'abord en tranches de trois chiffres, à partir de la droite, sauf à ne laisser qu'un ou deux chiffres dans la dernière tranche ; commençant ensuite par la gauche, énoncez chaque tranche significative comme si elle était seule et donnez-lui le nom des unités de cette tranche.* Ainsi, les nombres 17 000 502, 1700, s'énoncent dix-sept millions cinq cent deux, et mil sept cents ; le second nombre étant composé de 17 centaines, s'énonce aussi dix-sept cents.

En général, d'après notre système de numération, pour qu'un nombre exprime des dixaines ou des centaines ou etc., il suffit que son premier chiffre à droite représente des unités de cet ordre, ce qui revient à placer sur la droite de ce nombre un zéro, ou deux zéros, ou etc. Il en résulte que le nombre 327429 peut être considéré comme formé de 327 mille et 429 unités, ou de 3274 centaines et 29 unités, ou de 32742 dixaines et 9 unités, ou etc. Cette manière de décomposer les nombres servira par la suite.

(*) Par unités des *ordres ternaires*, on entend les *unités simples*, les *mille*, les *millions*, les *billions*, etc.

Reynaud, quant à lui, définit tout d'abord la numération orale en français. Cette dernière est décrite à partir d'un comptage en unités d'une collection (la dizaine est le deuxième ordre d'unité) qui ne se traduit pas par une numération en unités comme pour Bezout mais par notre numération orale, « *pour abréger* ». D'ailleurs il propose de substituer aux noms soixante-dix, quatre-vingts et quatre-vingt-dix les noms septante, octante et nonante. Il commence par définir les désignations usuelles des nombres qui correspondent à des dizaines entières (résultat d'un comptage par dizaines), puis il comble l'intervalle entre deux dizaines en accolant le nom de la première dizaine avec successivement les neuf noms des premiers entiers. Pour la désignation orale usuelle des nombres inférieurs à neuf cent quatre-vingt-dix-neuf, il poursuit de la même manière en désignant tout d'abord les centaines entières, puis en remplissant les intervalles avec les désignations des quatre-vingt-dix-neuf premiers entiers. A noter que cette fois-ci il ne distingue pas le comptage selon telle unité et le nom donné au résultat de ce comptage : ainsi par exemple le passage de quatre centaines à quatre cents n'est plus justifié explicitement, est-ce encore « *pour abréger* » ? La description de la numération orale se poursuit en introduisant des « *unités principales* » : mille, million, billion etc.

Dans un deuxième temps, il définit les écritures chiffrées à partir de ces désignations orales en français. Il motive le passage de la désignation orale en français à l'écriture chiffrée par le fait que la deuxième est une simplification de la première. Il décrit les étapes en les justifiant par des arguments de nécessité (pour les calculs) et d'opportunités offertes au fur et à mesure par les différentes formes obtenues : « *Cette dernière forme, quoique la plus compliquée, fournit l'idée heureuse ...* ». Il recrée ainsi une généalogie de l'écriture chiffrée dans laquelle les ordres d'unités ont un rôle prépondérant. Il indique dans cette description, qui concerne les nombres jusqu'à neuf cent quatre-vingt-dix-neuf, le rôle joué par le zéro : ce dernier marque l'absence d'une unité d'un certain ordre. Cependant, il n'utilise en fait que les unités des trois premiers ordres (unité, dizaine, centaine), bien qu'il envisage auparavant des unités d'un ordre quelconque. En effet, pour les nombres supérieurs à neuf cent quatre-vingt-dix-neuf, il introduit la notion d'unités d'ordre ternaire[5] : « *les unités simples, les mille, les millions, les billions, etc.* ». La méthode pour définir alors l'écriture chiffrée débute par la reconnaissance de ces unités ternaires dans la désignation orale. A noter que Reynaud indique à la fin de son exposé le processus inverse, c'est à dire une méthode pour dire un nombre écrit en chiffres.

En résumé Reynaud décrit un algorithme :

1. Les noms en français des neufs premiers nombres sont donnés (sans le zéro).
2. La définition des désignations orales en français des neuf cent quatre-vingt-dix-neuf premiers nombres se poursuit en utilisant la notion d'unité de comptage : unité du 1er ordre, unité du 2ème ordre (dizaine), unité du 3ème ordre (centaine). Ce sont d'abord les nombres résultant d'un comptage (d'une collection) menant à un nombre entier de dizaines (une dizaine, deux dizaines, …, neuf dizaines) qui sont dénommés, afin de simplifier la désignation obtenue avec le mot dizaine. Ensuite les intervalles sont remplis en accolant les noms des neufs premiers entiers. Puis le processus est réitéré : dénomination des nombres obtenus par un comptage entier de centaines (une centaine, deux centaines, … neuf centaines) puis « remplissage » des intervalles.
3. Ensuite sont définies les désignations orales usuelles des nombres de mille à plusieurs billions : de nouvelles unités principales sont introduites, qui seront dénommées par la suite « *unités des ordres ternaires* ». Le principe reste le même.
4. L'écriture chiffrée des nombres inférieurs à neuf cent quatre-vingt-dix-neuf est alors construite à partir des noms des nombres. Les neuf premiers nombres sont traduits en neuf chiffres. Puis est décrite une évolution de l'écriture à partir d'un exemple, dans lequel réapparait une écriture en unités :

[5] Ce que nous avons appelé « classe » à propos de Bezout.

- neuf cent quarante-sept unités
- neuf centaines, quatre dizaines et sept unités
- 9 centaines 4 dizaines 7 unités
- 9 unités du 3ème ordre, 4 unités du 2ème ordre, 7 unités du 1er ordre
- 947

5. Est introduit ensuite le signe « 0 » jugé comme nécessaire pour écrire tous les nombres. Cette affirmation est justifiée par le fait qu'on ne pourrait pas, par le système qu'il vient de décrire, écrire les nombres qui ne contiennent pas toutes les unités inférieures à leur ordre le plus haut.
6. Le processus se poursuit par la définition de l'écriture chiffrée des nombres supérieurs à neuf cent quatre-vingt-dix-neuf à partir de leur dénomination orale : introduction des unités des ordres ternaires (les unités simples, les mille, les millions, les billions), chacune comportant des unités, des dizaines et des centaines.

Ces éléments soulèvent là aussi des questions mathématiques :

- Le zéro n'est pas considéré initialement comme un nombre, puisque Reynaud n'indique pas au début comment le désigner oralement. Il est indiqué comme nécessaire afin de désigner tous les nombres par une écriture chiffrée, sans que cette affirmation soit démontrée. Le nom « zéro » désigne alors le chiffre « 0 », dont il est difficile de savoir s'il est perçu comme un nombre.
- Il est clairement dit que la centaine vient de dix dizaines, mais le fait de multiplier par dix ou plus précisément de réunir dix dizaines, puis dix centaines n'est pas justifié. D'autre part, cette façon de compter semble s'arrêter brusquement après l'usage du millier, puisqu'il est introduit des unités des ordres ternaires, sans justification rationnelle là non plus.
- Reynaud donne une définition succincte des nombres. Elle provient du concept d'unité, qui s'ajoute à elle-même et « *donne un nombre nommé deux* », et ainsi de suite, toujours en nommant les nombres. Le nombre est conçu comme étant le résultat d'un comptage d'une collection. C'est donc une conception liée à la numération orale ainsi qu'à des collections obtenues par ajouts successifs d'un élément. L'appellation « unité » suggère l'idée qu'il existe un aspect commun à toutes collections indépendant de la nature des objets qui les composent.
- Reynaud utilise neufs chiffres plus un (le chiffre « 0 »). Ces neufs chiffres correspondent avant tout aux noms des neufs premiers nombres. Ils permettent ainsi d'indiquer le nombre d'unités, dizaines, centaines que l'on peut comprendre à partir de la dénomination orale du nombre. Le fait qu'il ne faille que ces neuf chiffres (plus un, le 0) n'est pas questionné. Est-ce une conséquence (évidente ?) des mots utilisés dans la numération orale et du fait de compter en unités ?
- Reynaud, à la différence de Bezout, définit la numération orale. Il passe en fait par un comptage en unité et indique que la numération orale est un moyen d'abréger ce que nous pouvons nommer une numération en unités non régulière (car elle utilise la base dix puis la base mille). Rien ne vient étayer cette affirmation. Dans le même ordre, les arguments avancés pour expliquer le passage de la numération orale à la numération écrite chiffrée, une genèse « naturelle », sont aussi à questionner.
- L'attention portée au passage de la dénomination orale de mille à un million est caractéristique. Ce passage est nécessaire pour définir la numération orale, car « dix mille » ne s'entend pas. Cependant cela n'est pas nécessaire dans la

description qu'il a commencé à faire de la numération écrite[6]. Si Reynaud avait continué avec la même logique, c'est-à-dire en utilisant une numération en unités régulière (fondée exclusivement sur la base dix), il aurait utilisé des unités du 4ème ordre et il aurait ainsi pu se passer des « *unités des ordres ternaires* ». Nous pouvons émettre l'hypothèse que c'est parce qu'il revient sur une logique d'un passage direct de la numération orale à la numération écrite chiffrée, qu'il utilise implicitement une numération en unités non régulière (c'est-à-dire basée sur une base dix avant le nombre mille puis sur une base mille à partir de celui-ci), celle qu'il avait utilisée pour définir la numération orale.

1.2 Analyse comparative

Une unité de mesure sous-jacente

Dans ce texte, Bezout présente tout d'abord le nombre comme venant de la mesure des grandeurs, l'unité étant arbitraire pour chacune des grandeurs considérées et non nécessairement toujours la même : c'est bien ici la notion d'unité de mesure qui est convoquée.
Chez Reynaud, le nombre vient de la mesure du cardinal d'une collection (donc discrète et finie). L'unité est représentée par importe quel élément de la collection, considéré comme étant « un ».

L'ordinal et le cardinal

Pour Bezout, il semble exister prioritairement des aspects cardinaux dans la numération chiffrée. Il s'agit en effet d'utiliser des unités de mesure d'une quantité pour obtenir la dénomination, des opérations sont sous-jacentes. Peut-on rapprocher « *dix fois dix* », *« huit cent cinquante-neuf, qui contient huit centaines, cinq dizaines et neuf unités* » de la décomposition 859=8x100+5x10+9, bien qu'il n'y ait pas d'opérations explicites dans son texte ? Mais les aspects ordinaux ne sont pas absents. L'écriture chiffrée suit une logique de définition de proche en proche (tout au moins de tranche en tranche : 1 à 9 puis 10 à 99, puis 100 à 999, etc.). Le comptage se fait à l'aide de la comptine numérique.
Chez Reynaud, du fait qu'il parle de la numération orale d'abord, on retrouve ces deux aspects, mais que nous pouvons néanmoins comprendre dans une importance inverse. Si les collections se constituent par ajouts, il s'agit d'ajouts successifs de un, ce qui se retrouve en particulier quand il s'agit de passer de neuf cent quatre-vingt-dix-neuf à mille, ou encore de définir les noms entre deux dizaines ou deux centaines. Ainsi c'est plutôt une construction d'une succession de nombres qui est décrite pour la numération orale, qui elle-même sert de support à la définition de la numération écrite chiffrée. L'aspect ordinal y semble donc occuper une place importante.

Les ordres et les classes

Chez Bezout, les nombres (inférieurs à neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf) sont identifiés à leur désignation orale, l'écriture chiffrée est une transposition de la numération en unités. En particulier, l'ordre (dans une classe) est privilégié à la classe[7] et ce sont les unités

[6] En fait, théoriquement, on n'a besoin d'introduire des mots nouveaux que lorsqu'on ne peut plus « dire ». Nous le verrons dans le chapitre 3. C'est donc seulement pour les puissances de 2 de la base qu'on aurait besoin de mots nouveaux : pour cent, pour dix mille. On n'en a pas besoin pour mille, on pourrait dire « dix cents » « onze cents » etc. jusqu'à quatre-vingt-dix-neuf cent quatre-vingt-dix-neuf, ensuite on aurait besoin d'un mot nouveau pour 10^8.
[7] On peut en effet distinguer la classe des milliers, des millions, des milliards, et dans chaque classe trois ordres : l'unité, la dizaine et la centaine. Bezout ne fait apparaître les classes que pour l'énonciation, après les ordres.

obtenues successivement par multiplication par dix qui structurent l'écriture chiffrée des nombres (ce qui est implicitement dit dans le n°13): la base dix semble sous-jacente.
Chez Reynaud, la numération chiffrée est une simplification de la numération orale usuelle, en particulier quand il va s'agir de faire des opérations. Ainsi, c'est la classe (ce qu'il dénomme « *nouvelle unité principale* » puis « unité des ordres ternaires ») qui est privilégiée à l'ordre. En conséquence, ce sont les classes obtenues par multiplication par mille qui structurent l'écriture chiffrée des nombres (ce qui est explicitement dit mais aussi une conséquence de la description de la numération orale, conséquence que Reynaud ne démontre pas). En d'autres termes, pour écrire les nombres à partir de dix mille, la base mille semble sous-jacente, avec une « sous-base » dix pour désigner les nombres de un à neuf cent quatre-vingt-dix-neuf.

L'ordre des chiffres

Chez Bezout, l'ordre des chiffres dans l'écriture d'un nombre n'est pas questionné et semble aller de soi en traduction de la numération en unités (qui contiendrait un ordre « naturel » ?).
Chez Reynaud, une hiérarchie des unités en différents ordres (la dizaine correspond ainsi à une unité du deuxième ordre) « *fournit l'idée heureuse de disposer les chiffres de manière que le rang de chacun indiquât l'ordre des unités qu'il représente* ».

Le zéro

Chez les deux auteurs, le zéro signifie l'absence d'une unité d'un certain ordre suivant la position qu'il occupe. Mais il a un statut de nombre initialement chez Bezout qu'il n'a pas chez Reynaud. L'introduction de ce zéro semble chez les deux une nécessité qui gêne d'une certaine manière les deux exposés dans leur logique linéaire. Ceci interroge sur les congruences affichées par l'un et l'autre entre les numérations en unités et chiffrées d'une part et la numération orale et chiffrée d'autre part.

Les justifications mathématiques

Les deux auteurs décrivent un mode de construction de la numération écrite chiffrée de position. Aucun des deux ne semble préoccupé par des justifications (mathématiques) de l'opérationnalité de la numération chiffrée de position. Notons cependant que le nom du traité « *Arithmétique à l'usage de la marine et du commerce* » dont est issu le texte de Bezout indique que l'auteur ne s'adresse pas à des mathématiciens : il n'est pas surprenant de ne pas y voir des démonstrations. Il en est de même dans une moindre mesure des commentaires de Reynaud sur ce traité, bien qu'ils se présentent comme des approfondissements mathématiques.

1.3 Questions soulevées

Ces descriptions permettent d'identifier la numération en unités qui peut apparaître comme un système intermédiaire entre la numération orale en français et la numération écrite chiffrée et ouvrent avant tout un champ de questionnement.
Tout d'abord, qui est avant qui ? Quelles sont les places respectives de la numération orale usuelle en français, de la numération en unités, de la numération écrite chiffrée ? Il semble que Reynaud place la numération en unités avant la numération orale usuelle, elle-même avant la numération écrite. Mais pour décrire ce dernier passage, numération orale usuelle/numération chiffrée, l'organisation est différente selon les nombres. Pour les nombres inférieurs à neuf cent quatre-vingt-dix-neuf, il revient sur un comptage qui mène à une numération en unités, tandis que pour les autres nombres il privilégie un lien direct. Bezout quant à lui s'en tient à une filiation entre la numération en unités et la numération chiffrée. La place de la numération orale « usuelle » n'est cependant pas claire, elle semble être la source de la définition du nombre pour les nombres inférieurs à neuf mille neuf cent quatre-vingt-

dix-neuf, alors qu'ensuite elle semble plutôt provenir de la numération écrite chiffrée de position.
La généalogie de ces différentes numérations ne semble pas si simple, le rôle particulier joué par le chiffre/nombre « 0 » en est une autre illustration. Ceci nous amène à nous poser des questions sur les filiations entre les deux numérations : faut-il imaginer uniquement des descendances ? Les liens ne sont-ils pas plus de l'ordre du cousinage ? La question d'un ancêtre commun est-elle pertinente ?

Les différentes conceptions exposées par les deux auteurs posent aussi la question de savoir ce qu'est un nombre. Selon Reynaud, le nombre semble provenir du comptage des objets d'une collection (discrète, manipulable ou figurée). L'unité est alors une entité abstraite, mais rendue sensible par l'intermédiaire de chaque objet de la collection, unité qui permet de réaliser les comptages (c'est-à-dire à l'aide des désignations orales des nombres). Selon Bezout, nombres et désignations orales semblent de prime abord confondus puisque « *nous nous dispenserons de donner ici le nom des nombres ; c'est une connaissance familière à tout le monde* », tout au moins n'envisage-t-il pas de faire de distinction pour les lecteurs puisqu'il indique dans l'introduction de son traité : *« Je ne suppose d'autres connaissances à mon Lecteur, que celle des noms des nombres et quelques idées familières, sur lesquelles j'établis les principes de la numération, tant des nombres entiers que des décimales* ». Cependant nous avons indiqué que pour ce dernier, la notion de nombre est liée à celle d'unité utilisée pour la mesure d'une grandeur (qu'il appelle quantité), mesure qui sert à comparer les grandeurs.
Ceci nous renvoie ainsi à des questions fondamentales auxquelles nous devons répondre. Qu'est-ce qu'un nombre, quelles sont les relations avec ses désignations ?

Le rôle de la base, voire sa définition, est à questionner. Il semble qu'on puisse voir deux bases enchevêtrées pour la numération orale, une base dix seule en deçà de neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf, une base mille associée à une base dix au delà. Les nombreuses irrégularités dans les dénominations notées par Reynaud posent cependant la question de savoir si cette organisation est une reconstruction de l'auteur ou si la numération s'est fondée sur le principe de base : en particulier il n'est pas clair de savoir si elle provient d'une évolution de systèmes plus anciens « sans base » ou non. En ce qui concerne le système de numération chiffrée, Bezout y voit des principes de base dix, provenant d'une numération en unités « régulière » : il privilégie l'ordre à la classe. Reynaud garde une perception plus proche de la numération orale par le biais implicite d'une numération en unités irrégulière : il complexifie en introduisant les classes après les ordres. Comment trancher ? En effet, si l'écriture 2345687 peut faire pencher la balance du côté de Bezout, c'est l'inverse pour 2 345 687. Cette question n'est évidemment pas déconnectée des généalogies proposées par les deux auteurs. Au-delà de ce problème, qui peut apparaître comme moins important du fait que nous nous intéressons dans cette thèse à des nombres inférieurs à neuf cent quatre-vingt-dix-neuf, comment comprendre l'importance du nombre dix, de la base ? Qu'est-ce qu'une base ?

Ces questions en amènent d'autres plus générales. D'abord, d'un point de vue mathématique, est-ce que les systèmes de numération peuvent attester de leur cohérence uniquement par des principes, comme celui de base ? Ces principes sous-tendent-ils une structuration des nombres, par exemple selon des décompositions additives 859=800+59+9, dans lesquelles peuvent intervenir ou non des multiplications 859=8x100+5x10+9 ? De plus la description de la numération écrite chiffrée à partir de la numération orale ou en unités semble poser le problème de la langue. Quelle place a-t-elle par rapport à une écriture qui apparaît comme

disjointe de toute langue parlée ? Quelle est la part de la convention, de la culture, des mathématiques ?
Pour répondre à ces questions, nous devons analyser les numérations d'un autre œil, c'est ce que nous proposons dans les paragraphes qui suivent et c'est pourquoi nous devons préciser notre méthodologie.

2. Méthodologie d'analyse

Les numérations peuvent être regardées de différents points de vue : mathématique, linguistique, historique, psychologique, sémiotique, etc. Dans la première partie de la thèse, nous avons le projet de comprendre les relations entre les mathématiques et les numérations afin de dégager des points forts pour leur enseignement, en particulier les obstacles épistémologiques liés à la non-congruence des deux numérations : le savoir est ainsi regardé sans considérations psychologiques ni didactiques. Ceci demande de prendre en compte les « signes » qui se présentent à l'élève. En effet, c'est par ce biais que celui-ci découvre de manière essentielle les nombres et c'est leur compréhension qui est objet d'apprentissage.
Plus particulièrement dans notre thèse, il s'agit de comprendre ce que les désignations orales et chiffrées ont de différent alors qu'elles concernent le même objet mathématique, les nombres entiers naturels. La première différence est celle engendrée par l'opposition oral/écrit. Schématiquement, l'oral est spécifique de la communication directe avec quelqu'un ou avec soi dans le temps présent et l'espace immédiat, tandis que l'écrit permet une communication différée dans le temps ou/et l'espace (rôle mémoriel), avec quelqu'un ou avec soi. Or ces différences ne sont pas les seules en ce qui concerne nos deux numérations, sinon le rapport entre le son « douze » et le mot écrit « douze » serait le même que celui entre le son « douze » et l'écriture chiffrée « 12 ». Comprendre ce rapport au-delà des considérations écrit/oral est l'enjeu de ce qui suit, c'est d'ailleurs pourquoi nous allons utiliser le terme de « parlée » au lieu d'« orale » pour qualifier la numération en langue française. Nous avons vu que des essais tels qu'entrepris par Bezout ou Reynaud posaient des questions qui ne mènent pas à des réponses simples et immédiates. C'est pourquoi nous entreprenons une étude approfondie et sans *a priori* qui puisse dépasser en particulier certaines idées « naturelles », communément admises sur la numération. Puisqu'il est question de différentes désignations du nombre dans les numérations, nous nous tournons vers la sémiotique pour nos analyses. Il nous faut alors choisir des notions sémiotiques utiles à notre objectif qui s'inscrit dans des préoccupations proprement didactiques.

2.1 Les emprunts à la sémiotique

La sémiotique doit donc servir à dégager des éléments d'ordre épistémologique et mathématique à des fins didactiques : chercher les théorèmes, les propriétés, les relations qui sont « en jeu » dans les numérations et la nature de leur lien avec les signes utilisés. Duval (2006) indique trois préoccupations de la didactique des mathématiques qui concernent aussi la sémiotique : « *disposer d'un outil d'analyse suffisamment adapté et discriminant pour étudier l'activité mathématique et ses productions [...], le problème du rôle des signes et des représentations sémiotiques dans le fonctionnement de la pensée [...], les variables cognitives à prendre en compte dans les apprentissages* ». Cette première partie de la thèse concourt principalement à élaborer l'outil d'analyse pertinent pour étudier l'activité mathématique. Ainsi, les outils d'analyse développés doivent nous permettre de distinguer non seulement l'objet « nombre » de ses désignations, mais aussi de comprendre le fonctionnement de celles-ci, c'est-à-dire ici les mathématiques qui y sont associées. Plus précisément, si nous définissons une numération comme servant à désigner chaque nombre par un « signe » écrit ou oral, trois paramètres sont alors en jeu : le nombre (une notion mathématique), la

numération (régit par une syntaxe) et le « signe » (la désignation telle qu'elle nous est donnée à voir ou à entendre). Les descriptions de Bezout et Reynaud nous ont déjà indiqué la non trivialité de ces notions et de leurs relations. Ajoutons encore que sans considérer de désignations dans un système de numération, le nombre peut être déjà défini mathématiquement de plusieurs façons : une définition d'orientation « ordinale » comme celle de Peano ou une d'orientation « cardinale » issue de la théorie ensembliste. Nous aurons à préciser ces définitions. En outre, la numération évoque quant à elle l'idée d'une organisation des « signes » qui permet de lier le « signe » au nombre. Ainsi ce « signe » ne peut être envisagé indépendamment d'un système qui le lie aux autres « signes » ni du nombre qu'il désigne Des précisions doivent alors être apportées pour analyser quel aspect du nombre, quelles mathématiques sont convoqués dans ces « signes ». Peirce (1906) indique : « *Il n'est rien de plus indispensable à une solide épistémologie qu'une discrimination bien tranchée entre l'objet et l'interprétant de la connaissance* ». C'est pourquoi nous avons choisi d'emprunter des notions à la sémiotique de Peirce, celles qui nous offrent un cadre d'analyse adéquat commun aux deux numérations que nous étudions. Nous allons dans ce qui suit préciser ces emprunts et leur utilité dans le cadre de notre travail. Ces emprunts sont limités mais ils nous suffisent car notre objectif n'est pas l'analyse sémiotique en elle-même. Cependant, nous avons besoin d'un cadre sémiotique général pour ancrer l'analyse des deux numérations, en particulier pour permettre des comparaisons. La rédaction peut comporter certaines maladresses dues à notre compréhension encore *in progress* de la théorie de Peirce (et aussi de nos besoins que nous avons estimés comme limités). Nous tenons à remercier François Conne, qui, en tant que spécialiste, a permis d'en limiter le nombre et la portée.
Peirce (1906) conçoit un signe comme « quelque chose qui tient pour quelque objet ». C'est une triade : un representamen (écrit ou oral) qui dénote un objet (un objet de pensée) grâce à un interprétant. La triade est (une totalité) dynamique, et le signe est déterminé par les sémioses qui se développent à son propos (en particulier la composante « interprétant »)[8]. De manière plus précise la détermination du signe enrichit et précise la connaissance de l'objet (qui n'est connu que par la médiation du signe). Les sémioses sont susceptibles de se stabiliser, de se fixer sur des habitudes interprétatives, on parle alors d'interprétant final. Ici il va être question de cet interprétant final, en considérant les différentes « habitudes interprétative » qui peuvent être inférées grâce à une analyse du fonctionnement du système sémiotique, dans sa relation au nombre entier. Ces définitions servent notre étude. L'objet concerne les nombres entiers dont nous allons regarder comment ils sont donnés à connaître par la médiation de chaque ensemble des signes (qui constituent chacune des deux numérations). Les representamens sont les écritures chiffrées ou les sons désignant les nombres en français (dimension dénotative). Ils sont régis par une syntaxe qui fait que les representamens sont liés, sont soumis à des règles. La syntaxe est différente pour chaque numération. Par exemple l'inversion de deux chiffres dans une écriture chiffrée est toujours une écriture chiffrée (un élément de l'ensemble des representamens de la numération écrite chiffrée). Ce type de règle n'est pas toujours respecté dans l'ensemble des representamens de la numération parlée en France (si on considère la constitution de representamen en tant que concaténation de representamens de base). Ainsi, c'est le cas pour « cent trois » et « trois cent » qui sont deux representamesn, mais cela ne l'est pas pour « vingt trois » et « trois vingt ». L'interprétant est du ressort de la dynamique des enchaînements sémiotiques derrières lesquels nous cherchons des principes mathématiques. Nous allons rechercher cette dynamique principalement dans la logique qui sous-tend les règles syntaxiques, tout en gardant en arrière-plan le fait que chaque système de numération doit permettre de désigner (au moins potentiellement) tous les nombres entiers et *a minima* tous les « premiers »

[8] Voir aussi Everaert-Desmedt (2006) et Conne (2008).

nombres entiers. Par exemple une des possibilités (bien connue, mais que nous ré-explorons dans la thèse) est de considérer que la logique des règles syntaxiques de la numération écrite chiffrée de position est à chercher du côté de la décomposition dite polynomiale des nombres (en base dix), avec dans un deuxième temps le fait de choisir des coefficients pour constituer les représentamens (il faut aussi considérer un choix concernant la graphie de chaque chiffres et la disposition spatiale sur un support matériel, choix non nécessairement uniquement mathématiques). En résumé, nous adoptons la terminologie de Peirce essentiellement pour deux types de raisons. Notre but est de disposer d'un cadre pour analyser la complexité des relations entre numération et nombre : il y a deux signes pour le même objet et deux signes liés, il faut le prendre en compte. Par ailleurs, même s'il n'en est pas directement question dans cette première partie de la thèse, la question des relations entre les mathématiques et les signes qui les véhiculent nous semble centrale dans l'apprentissage. Autrement-dit, nous considérons que l'étude sémiotique peircéenne des numérations permet de comprendre comment le nombre (entier) est donné à connaître, tout au moins potentiellement.
Avec ces notions de sémiotique nous pouvons différencier les éléments du signe qui nous sont indispensables : l'objet, les désignations et la relation qui permet de les relier. Dans notre thèse, nous n'envisageons pas d'étudier le signe autrement que pour comprendre d'un point de vue mathématique la non-congruence entre la numération parlée en France et la numération écrite chiffrée de position, en vue d'un apprentissage en classe de CP, c'est pourquoi les éléments théoriques exposés précédemment nous suffisent. Nous ne ferons donc pas appel à la complexité de la sémiotique de Peirce. Aussi, pour indiquer cette distance, allons-nous utiliser le verbe « désigner » dans l'acception de « dénoter », c'est-à-dire dans la relation entre le representamen et l'objet. De même, le terme « désignation » est employé dans le sens de representamen. Il n'y a numération que lorsqu'il y a système, c'est-à-dire pour nous, régit par une syntaxe dans l'ensemble des représentamens. Nous allons alors rechercher l'interprétant dans la logique qui sous-tend ces codes et règles. C'est ce jeu de relations qui va nous donner des informations sur les liens (mathématiques entre autres) entre les nombres et les systèmes de numération. En particulier, considérer le signe comme une triade permet de poser aussi la question de l'objet « nombre », question posée de manière fondamentale dans l'analyse que nous avons faite des descriptions de Bezout et Reynaud, analyse qui peut être perçue comme menant à exhiber leur interprétant final. Les écrits de François Conne, en particulier Conne (2008), permettent de mieux comprendre en quoi la vision adoptée ici de la sémiotique peircéenne est simplifiée et minimise certaines de ses caractéristiques. En particulier nous exploitons peu la double dimension du signe, une triade dont chaque composante a un degré (priméité, secondéité ou tiercéité). Cependant, comme les représentamens sont étudiés du point de vue de la syntaxe qui les constitue en système, ils sont considérés comme des légisignes (tiercéité). Les autres degrés des composantes ne sont pas utilisés *a priori* pour établir une méthodologie d'analyse. En outre, sans partir d'une définition de l'objet « nombre », nous en exposons quelques-unes qui vont participer à cette méthodologie. D'une part elles vont permettre de mieux comprendre les aspects du nombre éclairés par l'étude des signes en les mettant en perspective avec un ensemble de propriétés et définitions. D'autre part, nous gardons quelques caractéristiques des numérations liées à la nature des nombres entiers : exhaustivité (désigner, au moins potentiellement, tous les nombres entiers et *a minima* tous les « premiers » nombres entiers), non redondance (deux représentamens différents désignent deux nombres différents) et non ambigüité (un représentamen ne désigne qu'un seul nombre). Les résultats obtenus par la méthodologie que nous allons adopter permettent de répondre à nos questions. Nous espérons qu'ils peuvent aussi contribuer à une recherche sur la numération qui pourrait être menée dans un cadre strictement peircéen.

2.2 Choix méthodologiques

Le cadre général étant posé, nous allons élaborer une méthodologie pour l'étude des numérations afin de répondre aux questions que nous nous sommes posées. Quel que soit le choix opéré, il est important de rappeler que lorsque nous allons chercher les liens entre les mathématiques et les numérations en considérant l'étude des signes, le résultat obtenu est un point de vue de chercheur. Non seulement dans cette première partie de la thèse nous ne devons pas avoir l'illusion que les mathématiques que nous trouvons sont les mathématiques perçues par celui qui utilise ou apprend les numérations, mais en outre, les conclusions de l'analyse sont contingentes de la méthode employée, ce qui est inhérent à toute recherche. A la fin de cette première partie, nous serons ainsi amené à utiliser le mot « interprétation » pour signaler cet état de fait, il traduit l'idée que nous recherchons l'interprétant final et qu'il est le fruit d'une recherche spécifique, avec une méthodologie qui lui est propre. Il nous semble important alors d'essayer de rendre nos choix explicites afin que les conclusions obtenues puissent être réfutables au sens de Popper. C'est l'objet de ce qui suit.

Chacun des systèmes de numération ayant des spécificités, nous devons en tenir compte. Notre étude a pour but de « *disposer d'un outil d'analyse suffisamment adapté et discriminant pour étudier l'activité mathématique et ses productions* », Duval (2006). Ici nous en sommes à l'étape de l'étude des liens entre les signes et les mathématiques. La linguistique semble donc la plus adaptée pour analyser la numération parlée en français alors que ce sont les mathématiques en ce qui concerne les écritures chiffrées[9]. Cependant les essais faits par Bezout et Reynaud nous amènent à nous poser la question de leur articulation ainsi que de la place à donner aux representamens par rapport à l'objet « nombre ». Les éléments de sémiotique peircéenne indiqués ci-avant nous ont permis de préciser le rapport entre les mathématiques et les signes. Ce point de vue transposé dans le cadre des numérations offre une possibilité de « trouver » des mathématiques dans la logique de constructions des numérations (la syntaxe sur l'ensemble des representamens). Mais comment procéder ? Partir d'une étude syntaxique ou des modèles de logique mathématiques susceptibles d'être à l'œuvre ? Dans le champ de la linguistique contemporaine Seiler (1992)[10] indique deux grandes approches : l'une, « de haut en bas », essaye de partir de la formalisation du savoir en l'illustrant à partir d'une langue (surtout l'anglais), l'autre, « de bas en haut », part du traitement de données empiriques (fournies par la diversité des langues) pour tenter d'y extraire une systématisation théorique. Ceci suppose qu'il existe ce qu'elle appelle un « *tertium comparationis* », une référence, qui est en dehors d'une langue particulière. Nous adoptons ce point de vue méthodologique d'une double approche « de bas en haut » et « de haut en bas » et l'étendons à tout système de numération, sachant que pour nous il ne s'agit pas de rechercher un « *tertium comparationis* » mais une logique de constitution des numérations afin de dégager *in fine* notre interprétant final, celui élaboré dans le cadre de ce travail.

Nous allons donc adopter comme Seiler une démarche qui concilie les deux approches archétypales de la linguistique moderne : onomasiologique (du « concept » à la représentation linguistique) et sémasiologique (des structures linguistiques vers le « concept »). Nous supposons alors l'existence de structures mathématiques sous-jacentes qui peuvent

---

[9] Là encore, rappelons que nous ne considérons pas les dimensions psychologiques ou cognitives qu'il faudrait prendre en compte pour accéder à la conceptualisation de telle ou telle personne utilisant la numération. Ceci sera pris en compte dans la suite de la thèse.

[10] Seiler (1992) fait aussi l'hypothèse « *selon quoi les opérations qui aboutissent à la construction des représentations mentales ne diffèrent pas, en principe, des opérations qui aboutissent aux structures linguistiques* », nous ne la suivons pas sur ce point car, dans le cadre de la sémiotique de Peirce, nous ne considérons pas que l'interprétant soit du côté des représentations mentales.

transcender les différentes numérations (écrites et parlées), c'est-à-dire l'interprétant qui permettent d'éclairer leur structure syntaxique et nous nous proposons de les mettre à jour en combinant les deux approches. Nous restons à ce niveau de l'analyse pour l'interprétant. Ceci permet de formuler des hypothèses, d'une part sur les principes sous-jacents, en particulier dégager ceux qui sont mathématiquement nécessaires à la cohérence des systèmes de numération, et d'autre part sur les liens entre les deux numérations. Nous questionnons ensuite ces hypothèses, ce qui est fait en élargissant notre domaine d'étude à d'autres numérations et en envisageant le processus historique de leur genèse. Ceci nous amène alors à considérer les « *opérations de transformation* »[11] qu'elles permettent. Nous choisissons donc de n'aborder ces opérations de transformation (mettant en jeu la structure d'ordre et les opérations arithmétiques) que dans un deuxième temps car il nous semble difficile d'avoir deux entrées simultanées. C'est ainsi que nous prenons en compte le fait que la notion de nombre (entier) ne peut être dissociée des structures sur l'ensemble des nombres (ordre et opérations). Ce choix se justifie car, dans les définitions du nombre, les opérations numériques et la relation d'ordre ne sont définies qu'après une approche axiomatique des entiers[12]. En outre la genèse historique des numérations indique que les representamens ont servi initialement principalement à noter une quantité (et non à calculer). Finalement, au CP la numération écrite chiffrée est introduite par des problèmes de notation liés aux quantités.

Si nous résumons ce paragraphe, grâce à des notions de sémiotique, de linguistique et de mathématique nous nous centrons donc initialement sur la comparaison de notre numération chiffrée avec notre numération parlée en français. Pour ce faire, nous partons de descriptions des numérations, descriptions que nous voulons les plus neutres possibles[13] afin de ne pas sous-tendre des principes que nous ne ferions que retrouver dans leur analyse : ce point sensible de notre méthodologie est repris dès le début du premier paragraphe. Nous opérons un double mouvement, des signes vers les mathématiques, des mathématiques vers les signes. Cette méthode amène à ouvrir le champ des possibles quant aux principes sous-jacents, sans *a priori*. Elle permet de découvrir éventuellement différents principes mathématiques pour une même numération. Des hypothèses sont alors élaborées, des questions sont soulevées, qui demandent des éclairages. Nous limitons notre analyse à la recherche d'un interprétant dans la logique des constructions syntaxiques des ensembles de representamens. Ceci ne rend pas compte de tous les aspects du nombre que les numérations peuvent donner à voir. Une analyse sémiotique peircéenne pourrait être poursuivie de manière plus approfondie. Nous avons décidé de procéder différemment car pour le projet de la thèse, il ne nous a pas paru essentiel de s'y engager. De manière économique, nous avons entrepris d'utiliser des résultats venant de recherches historiques. C'est pourquoi, dans une deuxième partie, nous avons adopté ce point de vue en envisageant la genèse de différentes numérations. Nous faisons appel à des recherches anciennes, y compris des recherches sur les constructions linguistiques des numérations orales en général. Ceci nous conduit à affiner nos analyses en considérant le rôle joué par les numérations dans la résolution de problèmes qui mettent en jeu en particulier des opérations. A cette occasion, nous étudions le rôle joué par les mesures des grandeurs.
Pour finir, donnons un autre argument justifiant la pertinence de cette approche pour l'étude de l'apprentissage et de l'enseignement de la numération écrite chiffrée de position. Ifrah

[11] L'expression est de Duval (2006). Il donne trois « *classes de représentations* » dont chacune « *donne respectivement lieu à trois types d'opérations radicalement différentes : des manipulations concrètes libres, des algorithmes de calcul, des opérations discursives de désignation et de substitution salva veritate* ». Ces transformations sont selon lui d'un intérêt majeur pour la didactique.

[12] Bien que les définitions axiomatiques s'appuient elles-mêmes sur une première approche intuitive du nombre qui est une approche ordinale, que ce soit dans la théorie de Peano ou dans l'axiomatique Zermelo Frankel, les nombres sont définis par récurrence. Nous reviendrons sur ces considérations dans le paragraphe suivant.

[13] Dans le sens où nous voulons éviter les écueils rencontrés par Bezout et Reynaud.

(1994), Charbonnier (2004), indiquent que la constitution même des systèmes de numération est le résultat d'un long processus dans lequel les mathématiques ont eu leur place, mais en général de manière non explicite. Autrement dit, ce sont certains principes mathématiques qui ont rendu possibles (c'est-à-dire opérationnelles) les numérations, mais ils ont été éprouvés et utilisés d'une manière pragmatique, expérimentale et culturelle (Crump, 1990). La méthodologie décrite dans ce chapitre consiste à débuter par une analyse dans un cadre sémiotique. Elle nous permet ainsi d'adopter le point de vue de celui qui découvre les numérations, sans en connaître l'historicité ni les possibilités arithmétiques, ce qui est le cas des élèves de CP. Nous pensons de ce fait découvrir des aspects de la numération qui vont être utiles à notre recherche sur l'apprentissage initial de la numération chiffrée de position.

3. Le nombre

Une « définition » du nombre va mettre en perspective les aspects mathématiques que l'analyse des signes donne à voir. En effet, dans notre approche, le nombre n'est pas envisagé d'emblée via une définition axiomatique. Si l'analyse de la triade representamen/objet/interprétant permet d'appréhender comment est donné à voir le nombre, elle ne peut pas suffire à dégager *a priori* toutes les propriétés du nombre entier. Ainsi, puisque nous voulons saisir les mathématiques dans les signes rencontrés, nous devons être capable de saisir quels aspects mathématiques du nombre y sont sollicités ou non. Nous allons fournir trois définitions du nombre. Deux sont proprement mathématiques, ce sont les deux approches qui sont décrites dans l'Atlas des Mathématiques (1997). La troisième est plus pragmatique dans le sens où elle met en jeu des problèmes portant sur des collections d'objets concrètes, figurées ou évoquées : elle ne se situe donc pas au même niveau que les autres et n'a pas la même fonction dans notre travail. C'est elle qui nous sert parfois à comprendre le lien entre les systèmes de numération et le concept mathématique de nombre lorsque la distance est trop grande entre une description des signes et les Mathématiques. Notons que cette troisième « définition » n'est pas choisie au hasard, elle est en relation avec la première approche du nombre qu'ont eue les élèves de CP. En effet à la maternelle, les élèves ont été confrontés à des problèmes relatifs à des cardinaux de collections manipulables, figurées ou évoquées. En outre, elle va dans le sens du développement historique[14]. Remarquons que les descriptions de Bezout et Reynaud attestent au début du 19ème siècle d'une perception du nombre encore floue. Les définitions purement mathématiques sont tardives, elles ne sont formalisées rigoureusement qu'après la première partie de ce 19ème siècle avec Peano puis avec le développement de la théorie des ensembles.

3.1 Définition « pragmatique » du nombre

Nous considérons ici le nombre entier comme l'entité abstraite qui permet de rendre compte des quantités discrètes finies, manipulables, figurées, ou évoquées, c'est-à-dire qui permet de résoudre certains problèmes de comparaison et d'évaluation à l'aide si besoin est d'opérations élémentaires. Ces opérations sont « définies » comme une abstraction des actions pouvant être codées à l'aide des signes opératoires usuels. Les problèmes sur le nombre (entier) que nous envisageons sont ceux décrits par Vergnaud (1991) et repris par Fénichel & Pfaff (2004-2005), ils concernent tous des collections manipulables, figurées, ou évoquées. Nous pouvons généraliser l'utilisation du nombre pour résoudre des problèmes de mesurage de grandeurs non discrètes (longueur, masse, durée, angle, aire, etc.). Dans la thèse, ce deuxième aspect n'est tout d'abord pas privilégié du fait que nous nous intéressons prioritairement aux nombres entiers, et donc à la discrétisation du réel qu'ils permettent : les grandeurs qui ne se

[14] Des apports historiques complémentaires sont donnés à la fin de la première partie de la thèse.

perçoivent pas directement comme discrètes n'apparaissent donc qu'en second. Ce point de vue est renforcé par le fait que les mesures de telles grandeurs[15] n'interviennent d'après les programmes qu'en cours de cycle 2 (CP, CE1), non pas à la maternelle. L'objet de ce chapitre n'est pas d'entrer dans les problèmes et questions que pose une telle « définition », nous y reviendrons dans la suite de la thèse. Cette approche doit nous permettre cependant, comme nous l'avons indiqué ci-avant, de faire le lien entre les systèmes de numération et le concept mathématique de nombre lorsque la distance est trop grande entre une description des signes et les Mathématiques. Autrement dit, nous ferons le lien entre les principes mathématiques et ce que nous nommons une mise en signes « concrète » du cardinal d'une collection, c'est-à-dire les actions et paroles associées à l'obtention du representamen du cardinal d'une collection d'objets.

3.2 Définition de Peano : approche par la fonction successeur

L'ensemble des entiers naturels N est défini de la manière suivante à un isomorphisme près : (1) 0 est un élément de N ; (2) Il existe une bijection S de N sur N \ {0} : x $\rightarrow$ S(x), S(x) est le successeur de x ; (3) Si une partie M de N contient 0 et le successeur de tout élément de M, alors M = N. Ceci permet en particulier d'établir axiomatiquement le raisonnement par récurrence : soit P une assertion qui dépend d'un entier naturel n, notée de ce fait P_n. Si P_0 est vraie et si l'implication (P_n vraie entraine $P_{S(n)}$ vraie) est vraie pour tout entier n, alors P_n est vraie pour tout entier n. Les opérations telles que l'addition et la multiplication sont alors définies par récurrence grâce aux successeurs. Pour deux entiers n et m, n+m : = S(n + S^{-1} (m)) ; n x m : = n x S^{-1}(m) + n. L'associativité, la commutativité, l'existence d'éléments neutres pour les deux opérations, ainsi que la distributivité sont alors des conséquences (non triviales) de ces définitions. La structure d'ordre total est, elle, une conséquence immédiate. Cette conception met en avant la notion de successeur et de construction de proche en proche : l'ordre y est simple à définir, les opérations et leurs propriétés plus difficilement.

3.3 Point de vue du cardinal : définition ensembliste

Une deuxième approche mathématique est de considérer un nombre comme un cardinal. Deux ensembles[16] ont le même cardinal quand ils sont équipotents, c'est-à-dire en bijection. Ceci définit une relation d'équivalence sur les ensembles. Dans la théorie axiomatique des ensembles, l'axiome du choix permet de mettre un bon ordre sur tout ensemble et de choisir dans chaque classe d'équivalence un ensemble qui la représente : c'est le cardinal. Les opérations telles que l'addition et la multiplication sont définies immédiatement grâce à l'union et au produit cartésien (à définir) : Card(A) + card(B) : = card ($A \cup B$) pour A et B disjoints ; Card(A) x card(B) := card (AxB). L'associativité, la commutativité, l'existence d'éléments neutres pour les deux opérations, ainsi que la distributivité sont alors de (simples) conséquences de ces définitions. C'est une conception « globale » qui est ici convoquée puisque tous les nombres (assimilés à des cardinaux) ainsi que les opérations sont définis d'emblée sans passer par une construction de proche en proche, sans notion de successeur *a priori*.

---

[15] Signalons à nouveau que nous faisons une distinction entre grandeur (longueur, aire, masse, durée, etc.) et mesure (nécessitant la notion d'unité et de nombre). Nous interprétons ainsi les programmes 2008, puisque ce point de vue a été développé antérieurement dans les documents d'accompagnement des programmes 2002. Il est repris dans l'ouvrage de Fénichel & Pfaff (2004-2005).

[16] Bien que ce ne soit pas cette acception dans la théorie des ensembles, nous utilisons ultérieurement fréquemment le mot collection qui est d'un emploi fréquent en didactique pour indiquer un ensemble fini. De même, le terme objet sera employé comme équivalent au terme élément. Pour une approche plus complète, nous renvoyons à la théorie des ensembles décrite par exemple pp. 22-35 dans l'Atlas des Mathématiques (1997).

CHAPITRE II
La numération écrite chiffrée

Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions la numération écrite chiffrée de position qui utilise les chiffres[17] dits arabes, c'est-à-dire celle qui est objet d'apprentissage en primaire dès le CP et qui est utilisée pour communiquer dans le monde scientifique en particulier.
La méthode d'analyse employée débute par une description non interprétative du système de numération. Ensuite, nous allons nous poser la question de savoir quels sont les principes mathématiques qui rendent ce système cohérent. Nous cherchons donc tout d'abord à interpréter l'écriture de notre système, autrement dit, la suite des écritures des nombres est donnée (avec sa syntaxe) et nous recherchons un système cohérent sur le plan des mathématiques qui permette de l'expliquer (nous le cherchons dans les modèles mathématiques proposés par la théorie des langages formels). C'est la démarche inverse de celle qui est empruntée d'habitude. Elle nous semble adaptée pour dégager les différents aspects des mathématiques qui y sont contingents, par exemple savoir en quoi les principes de base dix sont liés à l'écriture positionnelle adoptée. Une fois choisi un modèle mathématique (ce que nous nommons « principes mathématiques » de la numération), nous regardons si ces principes peuvent être mis en signes autrement que par les signes de la numération que nous étudions. C'est aussi ainsi que nous allons aussi procéder pour la numération orale, à la différence que nous allons consacrer un chapitre entier à élaborer des modèles *a priori* : nous ne les prenons pas dans la théorie des langages.
De manière plus précise, du fait que le système de numération écrite chiffrée est celui employé dans les mathématiques pour désigner des nombres, nous allons poser cette question dans le domaine mathématique. Comme il s'agit d'un système d'écritures, nous avons adopté un cadre théorique, celui de la théorie des langages, qui permette de fournir des modèles pour des principes mathématiques de numération. Ainsi il est question de savoir en quoi la numération écrite chiffrée peut être interprétable dans cette théorie. Nous avons opéré un double mouvement. Tout d'abord des signes vers les mathématiques en regardant quels modèles peuvent convenir pour rendre la numération écrite chiffrée exhaustive non redondante et non ambigu, ce qui permet d'obtenir ce que nous avons nommé la première partie de l'interprétant, les principes mathématiques. Puis des mathématiques vers les signes, puisque y est discutée l'univocité de cette mise en signes, c'est-à-dire que nous nous posons la question de savoir si les principes mathématiques retenus peuvent mener à d'autres systèmes de numération que celui qui est notre objet d'étude.
L'analyse est complétée par la description des procédés relatifs à une mise en signes « concrète » du cardinal d'une collection d'objets. Cette mise en signes traduit les principes mis à jour. En posant la question de l'opérationnalité du système dans une situation concrète, elle questionne différemment le lien entre les signes et les mathématiques.

1. Description : du nombre à la numération écrite chiffrée

Puisque notre approche consiste à considérer les signes pour y retrouver les mathématiques sous-jacentes, sans regard historique, nous devons considérer ici que ces signes sont définis dans les Mathématiques. Ils désignent des nombres, nous nous référons alors aux définitions du nombre données précédemment.
Les écritures chiffrées sont constituées d'une suite de graphèmes, les chiffres, parmi les dix suivants : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Pris seul, chacun de ces graphèmes désigne un nombre.

[17] Le terme « chiffre » est précisé ultérieurement, dans un premier temps nous l'employons dans le sens de graphème. Ce n'est qu'une fois expliqué son rôle dans la numération que la définition de chiffre sera complétée.

Avec l'approche de Peano, nous pouvons définir successivement, de proche en proche, les dix premiers chiffres en tant qu'écritures désignant les premiers nombres :
1 est le representamen qui désigne S(0)
2 est le representamen qui désigne S(1),
3 est le representamen qui désigne S(2),
4 est le representamen qui désigne S(3),
5 est le representamen qui désigne S(4),
6 est le representamen qui désigne S(5),
7 est le representamen qui désigne S(6),
8 est le representamen qui désigne S(7),
9 est le representamen qui désigne S(8),

Avec l'approche ensembliste, nous considérons les collections suivantes[18] :
A = { ∅ } ; B = { ∅, A} ; C = { ∅, A, B} ; D = { ∅, A, B, C } ; E = { ∅, A, B, C, D } ; F = { ∅, A, B, C, D, E } ; G = { ∅, A, B, C, D, E, F } ; H = { ∅, A, B, C, D, E, F, G} ; I = { ∅, A, B, C, D, E, F, G, H } et nous avons alors19 :
0 est le representamen qui désigne le card∅,
1 est le representamen qui désigne le card(A)
2 est le representamen qui désigne le card(B),
3 est le representamen qui désigne le card(C),
4 est le representamen qui désigne le card(D),
5 est le representamen qui désigne le card(E),
6 est le representamen qui désigne le card(F),
7 est le representamen qui désigne le card(G),
8 est le representamen qui désigne le card(H),
9 est le representamen qui désigne le card(I)[20]

Maintenant notons temporairement X := S(9), c'est-à-dire X := card({ ∅, A, B, C, D, E, F, G, H, I }).

X se note 10 dans le système que nous étudions. Pour les autres nombres, plusieurs méthodes de description peuvent être utilisées pour indiquer quel nombre les representamens désignent. Cependant, cette entreprise est nécessairement interprétative. Par exemple, si nous continuons une description par ordre croissant, elle sera en lien avec la définition du nombre de Peano. Nous voulons éviter un tel a priori. C'est pourquoi nous nous contentons dans ce paragraphe d'indiquer que les écritures employées pour désigner les nombres sont composées d'une suite (finie) de chiffres rangés sur une ligne. Chacun des dix chiffres peut se trouver à n'importe quel emplacement, mis à part les zéros que l'on ne rencontre jamais à gauche de l'écriture. Ainsi toute suite de chiffre a du sens, excepté les suites ayant des zéros à gauche si l'on impose l'unicité de l'écriture.
Dans la suite, sauf si le contexte l'exige, dès qu'un nombre aura été désigné par son representamen, nous confondrons ce representamen et ce nombre dans le sens où nous ne dirons pas toujours « le nombre désigné par le representamen « 3 » » mais « le nombre 3 » ou même parfois directement « 3 ».

[18] Il existe différentes possibilités de construire les entiers naturels à partir de la théorie des ensembles.
[19] Nous admettons sans démonstration que les deux constructions des nombres sont isomorphes, c'est-à-dire que la construction par cardinaux vérifie les axiomes de Peano, S étant définie par s (card ({A})) := card ({A} ∪ {z}), avec $z \notin A$. Nous ne vérifions pas non plus ici que les opérations et propriétés définies à l'aide des cardinaux correspondent alors bien à celles définies à l'aide des successeurs.
[20] La construction est de proche en proche car il s'agit d'obtenir des cardinaux par ajout d'un élément à partir de l'ensemble vide.

Notons qu'avec l'approche pragmatique, il est difficile de donner une définition *a priori* des chiffres. En effet, dans la mise en signes du cardinal d'une collection il ne nous est pas possible de voir si prévaut l'aspect « ordinal » de Peano (la notion première est le successeur) ou l'aspect plus « cardinal » présent dans la théorie des ensembles. C'est justement une des questions à laquelle nous devons répondre.

2. Les mathématiques sous-jacentes vues par la théorie des langages

Pour rechercher les éléments mathématiques de la numération écrite chiffrée enjeu d'apprentissage au CP, nous allons analyser cette numération à l'aune de la théorie des langages qui va nous fournir des modèles pour les principes mathématiques.
Quels sont les principes qui permettent de rendre cohérente et exhaustive notre numération chiffrée ? Autrement dit, pourquoi chacun des nombres entiers, sans exception, peut-il être désigné (exhaustion) ? Pourquoi une écriture chiffrée ne désigne-t-elle qu'un seul nombre à la fois (non ambigüité)? Pourquoi un nombre n'est-il désigné que par une seule écriture chiffrée (non redondance) ? Qu'est-ce qui est dans la mise en signes du ressort des mathématiques ou, par exemple, de l'ordre du conventionnel ?
D'un point de vue de la théorie des langages formels, Rigo (2003), un <u>système de numération</u> définit une bijection entre l'ensemble des entiers naturels (muni des opérations) et un langage. <u>Le langage</u> étant lui-même un ensemble de mots, <u>un mot</u> étant une suite finie et ordonnée d'éléments d'un ensemble fini (dit <u>alphabet</u>). Les systèmes de numération dans la théorie des langages sont donc toujours de position. Mais la notion de numération se généralise en utilisant les termes d'une suite, appelée échelle de numération.
Plus précisément, quand on considère la théorie des langages, les numérations généralisées se définissent à l'aide d'une échelle de numération, c'est-à-dire une suite strictement croissante $(d_n)_{n\geq 0}$ d'entiers, de premier terme 1. Ainsi tout entier naturel a admet un développement du type $\sum_{i=0}^{n} a_i d_i$, où les a_i sont des entiers positifs ou nuls que nous appellerons des <u>coefficients</u>.
Nous appellerons les termes de la suite $(d_n)_{n\geq 0}$ des <u>ordres</u>[21].
C'est le fait que le premier terme soit 1 qui assure que chaque entier naturel admet un tel développement : **la condition d'exhaustivité est donc remplie.**
La théorie étudie les numérations à partir de l'algorithme d'Euclide ou de l'algorithme glouton[22]. Ainsi par exemple une numération peut se baser sur la suite de Fibonacci. Dans un système de numération, l'utilisation de l'algorithme glouton pour obtenir le mot associé à un nombre permet d'associer un et un seul mot au nombre (exhaustivité et non redondance), ce qui n'est pas le cas en général car il n'y a pas forcément de décomposition unique. La non ambiguïté résulte de l'injectivité de la division euclidienne.

[21] Nous verrons ultérieurement que c'est une généralisation de la notion d'ordre utilisée par Bezout et Reynaud.

[22] L'algorithme glouton consiste ici à effectuer la division euclidienne du nombre dont on veut la décomposition par le plus grand terme d_n de la suite (d) inférieur à ce nombre. Le dividende obtenu est le coefficient a_i correspondant. On continue l'algorithme en divisant le reste par d_{n-1} : le dividende obtenu est le deuxième coefficient. Ainsi de suite.

3. Un interprétant en deux parties

Dans la théorie des langages, un système de numération ne comprend pas le passage aux representamens. Par la suite, nous utilisons « numération » ou « système de numération »[23] comme comprenant nécessairement ce passage. Ainsi le principe d'un système de numération va consister en outre à utiliser le développement $\sum_{i=0}^{n} a_i d_i$ pour désigner un nombre[24]. Plusieurs choix sont possibles : utiliser les a_i uniquement, utiliser les a_i et la suite $(d_n)_{n\geq 0}$ simultanément, utiliser la suite $(d_n)_{n\geq 0}$ uniquement. Ces choix permettent alors une traduction en representamens écrits et des règles pour décoder le système, c'est-à-dire passer de ces representamens au nombre $\sum_{i=0}^{n} a_i d_i$ (non ambiguïté). Si la théorie des langages n'étudie pas les désignations elles-mêmes (les representamens), elle s'intéresse cependant à un élément du code (c'est-à-dire de l'interprétant) : le passage de $\sum_{i=0}^{n} a_i d_i$ au mot $a_n a_{n-1} ... a_1 a_0$. Ainsi, cette théorie permet d'étudier les numérations produisant des representamens liés à ces mots, mot au sens de la théorie des langages formels.

Dans notre numération chiffrée chaque suite de chiffres renvoie à un nombre. L'ordre des chiffres est significatif : 26 ne désigne pas le même nombre que 62. Ces arguments indiquent donc que notre système est candidat pour s'interpréter à l'aune des systèmes de numération de la théorie des langages. Ainsi, il peut être compris comme l'association entre $\sum_{i=0}^{n} a_i d_i$ et le mot $a_n a_{n-1} ... a_1 a_0$. Par la suite nous étudions cette association.

3.1 La décomposition dite polynomiale

a. L'échelle de numération

Nous voulons déterminer les critères que doit remplir une suite $(d_n)_{n\geq 0}$ associée aux écritures chiffrées pour permettre de donner du sens aux representamens qui se présentent à nous. C'est ainsi que nous proposons de comprendre le lien entre le système de representamens et les mathématiques.

Une des premières conditions à remplir pour que le système soit non redondant, est que l'association envisagée soit bijective. Or nous avons le théorème suivant[25] :

Le mot $a_n a_{n-1} ... a_1 a_0$ associé à ce développement est unique si les inégalités

(1) $a_0 d_0 + ... + a_j d_j < d_{j+1}$ sont vérifiées pour tout j = 0, …, n.

---

[23] Quand nous utilisons le mot système avec celui de numération, c'est pour mettre l'accent sur les principes sous-tendus, en particulier induits de la non-indépendance entre deux representamens quelconques. Cette idée sera reprise dans la partie consacrée aux numérations parlées dans lesquelles le système est moins facile à inférer des representamens.

[24] Dans la partie dédiée à notre numération parlée nous utilisons aussi l'expression « mise en signes ». Celle-ci y est aussi utilisée dans un sens plus général car elle peut concerner le lien entre l'objet « les nombres entiers » et le système de representamens propre à une numération. En particulier elle ne préjuge pas de principes comme le développement d'un nombre selon une échelle de numération. Ici, le mot « transcription » est utilisé pour indiquer plus spécifiquement le passage entre des principes mathématiques et des representamens (d'un système de numération), mais nous utilisons aussi parfois l'expression « mise en signes « dans ce sens, quand le contexte indique clairement ce qu'il en est.

[25] Voir par exemple Loraud (1995).

Dans ce cas l'algorithme glouton mène nécessairement à l'unique développement et associe à tout nombre un unique mot : la non ambigüité est assurée par la connaissance de cette association et l'unicité assure la non redondance.
La construction suivante permet de montrer qu'il existe effectivement une suite $(d_n)_{n\geq 0}$ qui va convenir. Soit d définie par $d_i = X^i$ pour tout entier naturel i où X = S(9) (voir la fin du paragraphe 1). En raisonnant par récurrence et par des considérations de majoration, on peut établir que la suite remplit la condition (1), **en imposant le fait que a_i < X** : ce qui assure la non redondance[26]. En reprenant les conventions d'écriture de la fin du dernier paragraphe, l'écriture chiffrée des a_i est donc parmi {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. En particulier puisque 1xX+0x1 = X, **X s'écrit donc 10 dans ce système**. On retrouve ainsi les écritures usuelles de notre système. Nous pouvons alors en donner une description complète qui va le définir et qui, grâce à la théorie des langages, en démontre l'exhaustion, la non ambiguïté[27] et la non redondance.

b. Description du système de numération

D'une manière générale, pour obtenir le nombre désigné par son écriture chiffrée, on procède de la manière suivante :
α_i étant un graphème parmi {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, à la suite $\alpha_n...\alpha_1\alpha_0$, on fait correspondre le mot $a_n a_{n-1}...a_1 a_0$, chaque α_i désignant conventionnellement le nombre a_i. A cette suite de nombres on fait correspondre alors le nombre $\sum_{i=0}^{n} a_i X^i$, c'est-à-dire $\sum_{i=0}^{n} a_i 10^i$.

Réciproquement, à partir de la décomposition polynomiale $\sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ unique d'un nombre, avec a_i < X , on associe le mot $a_n a_{n-1}...a_1 a_0$, que l'on transcrit par $\alpha_{n-1}...\alpha_1\alpha_0$.
Les graphèmes α_i désignent les nombres a_i. Ce sont les <u>chiffres</u> de la numération.

C'est en faisant référence à la décomposition $\sum_{i=0}^{n} a_i 10^i$ telle que a_i < 10 pour tout i, que nous parlerons de numération en base dix. Plus exactement, nous dirons **qu'une numération est de base dix (ou décimale)** lorsque l'interprétation que nous en faisons fait référence à cette décomposition polynomiale.
Ainsi, cette description donne du sens au système d'écriture chiffrée que nous utilisons.
Si nous avons établi un lien entre les systèmes de numération généralisés et nos écritures chiffrées, des questions se posent sur la teneur de ces liens, questions auxquelles nous allons donner des éléments de réponse.

3.2 Le système d'écritures chiffrées de position comme representamens

La théorie des langages ne traite pas dans la mise en signes de la partie concernant l'adoption de tel ou tel code graphique, ce qui constitue pour nous la deuxième partie de l'interprétant. Nous allons questionner ce passage sous la forme de questions/réponses.

---

[26] Il existe en fait une autre possibilité pour assurer une décomposition unique, c'est celle qui impose $1 \leq a_i \leq X$. Elle est indiquée par Lefort (1984) qui cite le système de numération de Charles Cros en base trois prime qui peut se généraliser en base X prime. Mais dans ce système le nombre nul n'est pas désigné : c'est une numération de position qui n'utilise pas de zéro.
[27] Cette non ambiguïté est ici mathématique. Pour qu'elle soit opérante d'un point de vue pratique, cela suppose que le scripteur et le descripteur connaissent certaines règles.

Question 1 : Qu'y a-t-il de conventionnel dans la transcription du mot $a_n a_{n-1}...a_1 a_0$ en la suite de chiffres $\alpha_n \alpha_{n-1}...\alpha_1 \alpha_0$, α_i étant un graphème parmi {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} désignant le nombre a_i ?

Comprendre le code signifie que le lecteur peut retrouver le nombre uniquement à l'aide des coefficients a_i. L'écriture doit donc permettre la connaissance des a_i et l'ordre 10^i auquel chacun se réfère. Chaque a_i peut être indiqué par un representamen graphique quelconque : pour être non ambigu, chaque representamen doit désigner un unique nombre et chaque nombre est désigné par un unique representamen du système. En ce qui concerne l'indication de l'ordre auquel chaque a_i doit se référer, il faut fixer un ordre conventionnel aux ordres 10^i en le couplant à un ordre de lecture des graphèmes, lui aussi conventionnellement fixé. Dans notre numération chiffrée, la solution employée est une disposition en ligne droite des representamens (les chiffres), mais d'autres sont possibles (colonne, tableau, ligne sinueuse, etc.). Parallèlement, les ordres sont rangés en suite monotone des puissances de dix (ce qui est aussi un choix). Finalement, la lecture de gauche à droite des chiffres est couplée à l'ordre décroissant des ordres, ou, de manière équivalente, la lecture de droite à gauche des chiffres est couplée à l'ordre croissant des ordres.

Ainsi, nous avons mis en exergue des éléments conventionnels de notre système de numération chiffré. Outre leur graphie, l'ordre de prise en compte des chiffres peut être indiqué par d'autres moyens que celui d'une écriture en ligne et un sens de lecture. Cela pourrait être n'importe quelle disposition graphique dans laquelle cette prise en compte des chiffres serait déterminée par convention. Il en est de même pour la suite des ordres qui peut être théoriquement arbitraire et finalement du couplage entre les deux suites chiffres/ordres.

Question 2 : Nous avons indiqué un processus donnant du sens à notre écriture chiffrée à partir d'une décomposition polynomiale avec les ordres 10^i .Y a-t-il d'autres possibilités ? En d'autres termes est-il possible que nos écritures chiffrées puissent désigner un autre nombre que celui donné par la décomposition polynomiale ?

Dans le cadre de ces numérations, nous allons voir qu'une autre interprétation est impossible. En effet, dans ces systèmes de numération (de position) généralisés, le nombre de coefficients pouvant être utilisés à la i$^{\text{ème}}$ place est variable selon chaque ordre d_i [28] : si on considère 0 comme un coefficient, ce nombre est 1 plus la partie entière de $(d_{i+1}-1)/d_i$. Les écritures chiffrées que nous utilisons couramment utilisent à chaque fois dix chiffres désignant dix coefficients différents (et chacun des dix chiffres peut apparaître dans chacun des ordres). Ceci entraine nécessairement que $d_i = 10^i$ pour tout i entier.

Nous pouvons donc affirmer, en considérant les numérations généralisées de la théorie des langages, qu'il n'y a aucune autre interprétation possible de la suite (ordonnée) de chiffres que celle de la base 10, si l'on veut que le système soit exhaustif, non ambigu et non redondant.

Cependant, ce raisonnement tient au fait que nous considérons chaque chiffre d'une manière indépendante, d'où la question suivante.

Question 3 : Nous avons supposé une lecture chiffre à chiffre des écritures usuelles, y a-t-il une autre interprétation possible ? (Deux chiffres par deux chiffres ? Une segmentation arbitraire ?)

[28] Nous appelons « ordre » ces éléments de la suite en référence à la définition d'ordre de Bezout qui en est un cas particulier.

Un assemblage de chiffres deux par deux (resp. n par n), est possible, mais semble poser problème pour un nombre désigné par une écriture chiffrée possédant un nombre impair de chiffres (resp. non divisible par n). Compléter par des zéros est cependant possible. Un autre problème est de savoir par où commencer la segmentation : par la droite, par la gauche ? Ceci montre que des règles pour décoder l'écriture doivent être ajoutées. Supposons par exemple une lecture du nombre 1859 en segmentant 18 59. Ceci peut être interprété comme **18**xY+**59**x1. Plus généralement, une numération en base peut y être reconnue. Comme Y= 1xY+00x1, on a Y qui s'écrit 1 00. Cependant, chaque representamen des chiffres de cette numération est composé de deux graphèmes distincts : ceci sous-tend un autre système de numération pour les Y coefficients de la base Y. Or cet autre système de numération est notre système de numération décimal qui se serait « stoppé » à Y et qui de surcroît obligerait à mettre les zéros « inutiles » (00, 01, etc.), excepté lorsqu'il s'agit du coefficient le plus à gauche : on écrit 100 et non 01 00. Remarquons que l'écriture de Y dans notre système décimal est aussi 100, sans introduction du zéro à gauche. Finalement, il faut signaler que pour les nombres inférieurs à 99, la seule interprétation possible est notre numération décimale, sauf à ne voir dans la composition des nombres à deux chiffres qu'une numérotation des entiers successifs. Nous entendons par numérotation une suite de representamens qui permet d'indiquer la succession des entiers (définition de proche en proche voir la définition de Peano) et non de référer directement au cardinal. En conséquence, l'interprétation « base 100 », si elle est théoriquement possible, engage sur des conceptions qui semblent non congruentes. Soit la base dix est sous-tendue pour la composition des chiffres de la base 100 et l'arrêt à 99 de cette conception est non mathématiquement justifiable, soit une numérotation est sous-tendue pour la composition des chiffres de la base 100 et la poursuite avec un système de base est une rupture non mathématiquement justifiable.

Question 4 : En quoi le nombre X, successeur de 9, est-il indispensable à une numération de position ?
La décomposition obtenue met en avant un nombre particulier, le nombre X (qui s'écrit 10 dans notre système), nommé « dix » en français. C'est en référence à cette suite de coefficients que nous parlons de base dix. Cependant l'exposé précédent peut être repris en considérant $d_i = d^i$, i entier quelconque, d étant un nombre entier fixé supérieur à 2. On a alors l'unicité de la décomposition du type $\sum_{i=0}^{n} a_i d^i$, d étant un nombre entier fixé supérieur à 2, dès que a_i < d. Ceci est constitutif d'une numération en base d. La seule différence avec la numération en base dix est que le nombre de chiffres à considérer pour les representamens est d au lieu de dix. Le X considéré (dix) n'a donc rien d'indispensable pour un système fondé sur une base, en revanche l'écriture 10 pour la base l'est.

Question 5 : Quelles sont les conséquences si la condition a_i < **X** n'est pas vérifiée ?

Si a_i < X, la décomposition $\sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ n'est pas unique. Ce qui entraîne différents mots possibles $a_n a_{n-1} ... a_1 a_0$ associés à un même nombre et par voie de conséquence différents representamens $\alpha_{n-1} ... \alpha_1 \alpha_0$. Le nombre des chiffres à utiliser est alors arbitraire.

Question 6 :
Nous avons pour l'instant décrit la numération en mettant en avant une bijection avec les coefficients de la décomposition utilisant la suite des puissances de dix, dite décomposition

polynomiale. Nous avons vu que, dans le cadre des numérations généralisées, les chiffres ne pouvaient pas indiquer autre chose que les coefficients de la décomposition. Cette décomposition est donc une référence inhérente à notre numération chiffrée : seule celle-ci la rend exhaustive, non ambiguë et non redondante. Mais pour mieux en voir les liens, nous pouvons nous poser la question réciproque : en quoi cette décomposition se traduit-elle nécessairement par la suite chiffrée ? Y a-t-il d'autres systèmes de transcription possibles ? Une première réponse a été donnée précédemment. Nous avons envisagé des systèmes de transcription des informations contenues dans la décomposition prenant en compte non pas uniquement les coefficients, mais soit uniquement les ordres d_i, soit les ordres d_i et les coefficients a_i simultanément. Il nous semble difficile d'aller plus loin sans faire appel à des procédés concrets de mise en signes, d'autant que nous voulons considérer ceux qui ont des liens avec notre système de numération chiffrée. C'est entre autres la raison pour laquelle nous allons indiquer des algorithmes différents menant à l'écriture chiffrée d'une collection. Ensuite nous reviendrons sur les différentes transcriptions possibles du développement décimal dans un système de numération écrit.

4. Les procédés concrets de mise en signes du cardinal d'une collection

Dans ce qui précède, c'est surtout l'aspect structurel des nombres entiers qui est mis en avant : le nombre pris comme élément d'un ensemble muni de relations (d'ordre en particulier), d'opérations, de structures algébriques. Même en considérant le passage qui concerne la mise en signes, nous n'avons pas tranché sur la conception sous-jacente du nombre : conception ordinale ou conception cardinale ? C'est à cette question que nous allons plus particulièrement tenter de répondre en utilisant cette fois-ci la définition pragmatique du nombre, c'est-à-dire le nombre comme cardinal d'une collection d'objets figurés ou manipulables dont il s'agit d'obtenir la désignation.

Pour définir une numération opérationnelle, deux éléments sont indispensables : le <u>codage</u> (du nombre à sa désignation) et le <u>décodage</u> (de la désignation au nombre). Le nombre est défini a priori par les mathématiques et nous avons indiqué avec la théorie des langages le lien avec la décomposition polynomiale. Nous allons maintenant nous intéresser à la transcription pratique, c'est-à-dire au codage du cardinal d'une collection d'objets, et réciproquement à l'élaboration d'une collection d'objets d'après une écriture chiffrée. Sans considérer les aspects didactiques ou psychologiques, nous essayons ainsi de voir quels sont les liens entre les mathématiques et les signes en considérant des manipulations d'objets concrets. En fait, l'obtention de la désignation du cardinal d'une collection peut être appréhendée soit par une approche ordinale en référence à l'axiomatique de Peano, soit par une approche cardinale en référence à la notion de bijection, c'est ce que nous allons préciser par la suite.

En considérant l'étude précédente, pour construire une collection d'objets dont le cardinal est indiqué par une écriture chiffrée (décodage) un moyen est de constituer des groupements correspondant aux ordres et d'en prendre le nombre indiqué par le coefficient. Pour constituer des ordres, il nous semble il y avoir deux outils à disposition : utiliser <u>un compteur</u>[29] et/ou

[29] Un compteur a pour vocation de mettre en bijection les objets d'une collection avec une suite conventionnelle d'items (de mots, de gestes, de signes écrits). Le dernier representamen utilisé indique alors le cardinal de la collection. Cette notion de compteur est particulièrement importante pour la numération parlée. C'est pourquoi nous y revenons dans la partie consacrée à son étude. Notons que la succession des chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, « 10 » peut être aussi utilisée comme compteur ou encore 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, voire 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, X, ce qui n'introduit pas de signe supplémentaire. En ce sens, même si cela peut sembler improbable, le recours uniquement à une numération décimale écrite chiffrée peut convenir pour les procédés de codage et décodage de cardinaux de collections.

utiliser le fait que chaque ordre se déduit du précédent par itération des groupements par dix. Nous allons nous intéresser ici aux procédés qui peuvent être utilisés sans autre ressource que la numération écrite chiffrée. Si le compteur composé de la succession des écritures chiffrées peut être utilisé pour toute la collection, alors aucune spécificité de cette numération n'est convoquée puisque n'importe quel compteur convient. Ce compteur peut être utilisé cependant uniquement pour la constitution de paquets de dix et alors nous devons expliquer comment poursuivre. Il en est de même en ce qui concerne le codage, le principe d'exhaustivité de la numération en base dix se traduit par le fait que toute collection peut s'organiser en groupements successifs (issus des ordres) de 1, 10, 10^2, etc.[30]. Ainsi, que ce soit décoder ou coder, les mêmes « actions »[31] sont en jeu dès qu'il s'agit de traiter une collection concrète : constituer des groupements correspondant aux ordres, faire la correspondance avec les chiffres. C'est pourquoi nous allons décrire deux procédés[32] de codage, l'adaptation de ces procédés pour le décodage est immédiate. Ces procédés sont ceux inférés de l'analyse mathématique précédente. Il est possible de « mixer » ceux-ci, ce qui peut d'ailleurs indiquer une différence de conception du nombre et de la numération chez l'utilisateur de tel ou tel procédé, nous reprenons cette discussion ultérieurement dans la thèse.

4.1 Le premier procédé concret de mise en signes

Le procédé 1 est basé sur l'algorithme glouton, divisions euclidiennes successives par la suite décroissante des ordres 10^i

Considérer les langages formels nous a amené à considérer un algorithme permettant d'obtenir les chiffres de la numération : l'algorithme glouton. Rappelons que celui-ci consiste à effectuer la division euclidienne du nombre par la plus grande puissance possible de la suite des puissances de 10 (dans l'exemple qui suit ce sera 10^3), et à poursuivre ainsi avec chacun des restes successifs comme dividende et la suite décroissante des puissances de 10 comme diviseur : la suite des quotients obtenus donne l'écriture chiffrée du nombre. Au niveau de la manipulation des collections d'objets nous pouvons le traduire ainsi : faire des groupements par 10, dès que 10 groupements de 10 sont constitués, faire un groupement de 10x10= 10^2, revenir aux groupements par 10 et faire la même opération, etc.

Voici un exemple de ce procédé récursif (il faut s'imaginer une collection d'objets). Pour simplifier I désigne un élément de départ de l'ensemble, A désigne un groupement de 10 I, B un groupement de 10 A, C un groupement de 10 B. On constitue des groupements A jusqu'à l'obtention de dix groupements A, on constitue alors un groupement B, dès qu'il y a dix groupements B, on constitue un groupement C, et on reconsidère les I non encore traités. Dès qu'on ne peut plus faire de groupements A, le processus s'arrête. Voici la description des étapes successives :

A et le reste de la collection

AA et le reste de la collection, les groupements A se poursuivent tant qu'ils sont possibles

AAAAAAAAAA et le reste

Echange de 10A contre B, résultat : B et le reste de la collection

B A et le reste de la collection

[30] Puisqu'il s'agit ici de décrire un procédé de codage, le code est supposé connu, c'est pourquoi nous utilisons l'écriture chiffrée 10, avec tous les aspects conventionnels propres à nos notations usuelles (graphie des chiffres, disposition pour indiquer l'ordre auquel chaque chiffre se réfère).

[31] Conformément à notre approche, nous considérons des « actions » traduisant des principes mathématiques. Ainsi, nous ne considérons pas les facteurs matériels, didactiques ou psychologiques qui peuvent intervenir dans l'effectuation de ces « actions » par telle ou telle personne.

[32] Nous utilisons le terme de procédé dans une acceptation courante de « manière de faire », plutôt que celui didactiquement connoté de procédure puisque nous restons dans le cadre d'une analyse non didactique.

B AAAAAAAAAA et le reste de la collection
BB et le reste de la collection
Les groupements B se poursuivent ainsi jusqu'à en obtenir dix.
...
BBBBBBBBBB et le reste de la collection
Echange de 10B contre C, résultat : C et le reste de la collection

C A et le reste de la collection
Les groupements C se poursuivent ainsi jusqu'à en obtenir dix (si possible)
C BBBBBBBB et le reste : le maximum de B est atteint dans notre exemple, il n'y a donc pas de nouveau groupement C

C BBBBBBBB AAAAA I I I I I I I I I

Dans notre exemple, on obtient successivement. a = **1**x 10^3 + n_1 ; n_1 = **8** x 10² + n_2 ; n_2 =**5** x 10 + n_3 ; n_3 = **9**x1, d'où a qui s'écrit 1859, et la décomposition (polynomiale) associée 1x10^3 + 8 x 10² + 5 x 10 + 9.
Remarquons que, conformément à l'algorithme glouton, on obtient tout d'abord le coefficient associé à l'ordre le plus grand 10^3, ici **1**, puis celui associé au deuxième plus grand 10², ici **8**, et ainsi de suite. Remarquons aussi que, même si elle est sous-jacente, on obtient l'écriture sans être obligé de donner la décomposition polynomiale du cardinal a.

4.2 Le deuxième procédé concret de mise en signes

Le procédé 2 est basé sur l'algorithme d'Euclide, divisions euclidiennes successives par 10. La suite des chiffres peut être obtenue en utilisant le principe de la division euclidienne par 10 d'un nombre a puis du quotient obtenu, ainsi de suite.
On obtient : $a = 10b_0 + a_o ; b_0 = 10b_1 + a_1 ; b_i = 10b_{i+1} + a_{i+1}$ pour i entier variant de 1 à n-1.
La suite $a_n a_{n-1} ... a_1 a_0$ des restes successifs est alors le mot qui peut être traduit en l'écriture chiffrée usuelle. Ce principe est utilisé sur les objets dans l'algorithme suivant, valable pour une collection quelconque.
Le maximum de groupements de 10 est constitué. Il reste un nombre d'éléments a_0 strictement inférieur à 10 que l'on met de côté. On considère alors l'ensemble constitué des groupements par 10 et on constitue des groupements par 10 de ses éléments. Il reste un nombre d'éléments a_1 strictement inférieurs à 10 que l'on met de côté. On considère alors l'ensemble de ces nouveaux groupements et on réitère le procédé.
Exemple : I désigne un élément de départ de l'ensemble, A désigne un groupement de 10 I, B un groupement de 10 A, C un groupement de 10 B :
AAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAA
AAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAA
AAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAA
AAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAA I I I I I I I I I

BBBBBBBBBBBBBBBBBB AAAAA I I I I I I I I I

C BBBBBBBB AAAAA I I I I I I I I I
On obtient successivement. a = b_0 x 10+ **9** ; b_0 = b_1 x 10+**5** ; b_1 = b_2 x 10 +**8** ; b_2 = **1**, d'où a qui s'écrit 1859, et la décomposition (polynomiale) associée 1x10^3 + 8 x 10² + 5 x 10 + 9.

Remarquons que, conformément à l'algorithme d'Euclide, on obtient tout d'abord le coefficient associé à l'ordre le plus petit 10°, ici **9**, puis celui associé au deuxième plus petit 10, ici **5**, et ainsi de suite. Remarquons aussi que, comme pour le procédé précédent, bien qu'elle soit sous-jacente, on obtient l'écriture sans être obligé de donner la décomposition polynomiale du cardinal a.

4.3 Comparaison des deux procédés et lien avec les principes de base

D'une manière théorique les deux procédés amènent à désigner un même nombre par la même série de chiffres, ceci est démontré dans la théorie de langages. Nous pouvons en donner le principe : il suffit de voir que les décompositions polynomiales associées sont nécessairement les mêmes puisque le développement selon l'échelle (10^i) est unique du fait que les coefficients sont strictement inférieurs à 10. Cependant, comme nous l'avons signalé, le codage (et le décodage) n'amène pas nécessairement à écrire le nombre dans sa forme polynomiale. Plus précisément, si une expression parenthésée directement issue du procédé devait être donnée, celle-ci ne serait pas la même suivant l'algorithme. Ainsi, dans l'exemple que nous avons indiqué, pour le procédé 1 (algorithme glouton), on obtient (**1**x 10^3)+ (**8** x 10^2) + (**5** x 10) + **9,** alors que le procédé 2 (algorithme d'Euclide) donne (((**1**x10)+**8**)x10+**5**)x10+**9**. Par ailleurs, le premier procédé permet d'obtenir les chiffres correspondant aux ordres les plus grands jusqu'aux plus petits (1, 8, 5, 9), c'est l'inverse pour le deuxième. Cependant il est important de signaler que les résultats obtenus en termes d'organisation mènent tous les deux à la même suite C BBBBBBBB AAAAA I I I I I I I I I qui peut se traduire par la même décomposition 1x 10^3 + 8 x 10^2 + 5 x 10 + 9, qui peut être reliée à l'écriture 1859. Plus encore, cette organisation finale, quel que soit le procédé employé (même des procédés mixant l'algorithme glouton et l'algorithme d'Euclide), permet de coder la collection dans notre numération écrite chiffrée.

Remarquons encore que les procédés nécessitent de faire le maximum de groupements possibles par 10 correspondant à chaque ordre. Dans le cas contraire, on obtiendrait une autre décomposition : ceci fait le lien avec la condition a_i <10 rendant le système non redondant. Cette maximalité est donc suffisante, cependant elle peut ne pas être nécessaire, notamment pour l'ordre le plus grand. En effet, C BBBBBBBB AAAAA I I I I I I I I I peut être organisée en BBBBBBBBBB BBBBBBBB AAAAA I I I I I I I I I, et en référence au développement **18**x10^2+ **5** x 10 + **9**, on peut obtenir la transcription correcte du point de vue de notre système de numération 1859. Ceci peut éventuellement être étendu à l'ordre suivant : **185**x10 + **9**. Mais si le procédé convient d'un point de vue pratique, il n'explique pas en quoi BBBBBBBBBB BBBBBBBB peut être transcrit en 18, sauf à considérer l'écriture des n premiers nombres (n>9) comme des representamens indépendants les uns des autres comme le sont les representamens graphiques 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Or nous avons montré dans la réponse à la question 3 du paragraphe précédent que ce n'était pas le cas : aux écritures 10, …, 99 peuvent être associés des principes mathématiques qui les rationnalisent. Cette possibilité pragmatique de non maximalité est donc une conséquence de la notion de base sous-jacente au système de numération (elle n'est donc pas propre à la base dix) et à l'adoption de l'écriture chiffrée de position qui permet d'interpréter un certain type de découpage des écritures[33]. En fait la non maximalité à une étape comportant par exemple BBBBBBBBBB BBBBBBBB est reportée à la suivante pour transcrire cette organisation : le procédé consiste à organiser BBBBBBBBBB BBBBBBBB en C BBBBBBBB.

[33] Ceci est à rapprocher de ce que Chambris (2008) appelle propriété de troncature de la numération, le fait de voir 18 centaines et 59 unités dans 1859.

5. Comparaison entre différents systèmes de numération utilisant la décomposition polynomiale

Nous revenons dans ce paragraphe sur une question que nous nous sommes posée. Nous avons vu que nos écritures chiffrées ne pouvaient indiquer autre chose que les nombres donnés par la décomposition dite polynomiale (première partie de l'interprétant). Mais, réciproquement, en quoi cette décomposition se traduit-elle nécessairement en la suite chiffrée (deuxième partie de l'interprétant) ? La décomposition polynomiale peut-elle être transcrite par un autre code que le mot $a_n a_{n-1} ... a_1 a_0$ d'un langage ? Y a-t-il d'autres systèmes de transcription possibles[34] ?
En fait, même si notre transcription de la décomposition polynomiale en la suite ordonnée de chiffres est bien dénuée d'ambiguïté quand on connait le code[35], il existe d'autres types de transcription permis par cette décomposition. Le travail fait dans le paragraphe précédent va nous fournir des exemples d'autant plus intéressants qu'ils montrent que les procédés pragmatiques utilisables dans notre numération écrite chiffrée n'amènent pas nécessairement à un codage du cardinal d'une collection utilisant un système de position.

5.1 Privilégier les ordres

Par exemple, nous pouvons utiliser les notations I, A, B, C que nous avons déjà employées pour coder le cardinal de la collection par C BBBBBBBB AAAAA I I I I I I I I I. Pour décoder cette écriture, il suffit de dégrouper les groupes représentés par chacun des signes, en conséquence leur ordre n'a pas d'importance. Ce système de numération est ainsi analysable par le biais du développement polynomial. Cependant la possibilité d'un système de transcription de type C BBBBBBBB AAAAA I I I I I I I I I n'est pas constitutive des numérations en base. N'importe quel développement du type $\sum_{i=0}^{n} a_i d_i$ peut mener à une telle transcription. C'est par exemple le principe de la numération primitive romaine (sans les raccourcis soustractifs) ou de la numération égyptienne.

5.2 Utiliser les ordres et les coefficients

Un autre exemple nous vient de la numération en unités indiquée par Bezout. Nous pouvons transcrire le cardinal d'une collection donnée par la décomposition $1 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 5 \times 10 + 9$ par « 9 unités, 8 centaines, 5 dizaines, 1 millier ». Si nous reprenons nos codes I, A, B, C, D, nous obtenons 9 I, 8 B, 5 A, 1C : des signes plus ou moins arbitraires peuvent en effet remplacer les différents ordres 10^i. Ici aussi l'ordre des couples (chiffre, ordre) n'a pas d'importance s'ils restent distinguables entre eux. Ici aussi, n'importe quel développement du type $\sum_{i=0}^{n} a_i d_i$ peut mener à une telle transcription.

5.3 Analyse comparative

Les trois systèmes que nous avons décrits nous semblent ceux qui sont à la base de toute transcription de la décomposition polynomiale $\sum_{i=0}^{n} a_i 10^i$, $a_i < 10$, puisque le premier (système

[34] Signalons dès à présent que cette étude mathématique sera complétée par une étude historique, notamment en considérant les classifications d'Ifrah (1994) et Guitel (1975).
[35] C'est ce qui est recherché dans tous les systèmes de numération.

de numération de position) n'utilise que les representamens des coefficients a_i, le deuxième (indication de l'ensemble des types de groupement) n'utilise que les representamens des ordres 10^i, le troisième (système « mixte ») utilise les deux simultanément.
Il nous semble difficile d'envisager tous les systèmes possibles pouvant éventuellement combiner les trois. Cependant nous pourrons voir avec l'étude historique ceux qui ont été développés.
Comparons maintenant ces trois systèmes de numération différents, dont les principes mathématiques sous-jacents (première partie de l'interprétant) ont été considérés ici comme identiques[36]. Dans la description à partir de la théorie des langages formels, rien n'indique a priori la spécificité du nombre 0. Cependant lorsqu'un des a_i est nul, l'ordre correspondant n'apparaît pas dans le développement (zéro est l'élément neutre de l'addition). Ainsi, une erreur peut s'introduire dans le mot correspondant $a_n a_{n-1} ... a_1 a_0$ et par conséquent dans la suite de chiffres $\alpha_n \alpha_{n-1} ... \alpha_1 \alpha_0$. Quand on considère l'algorithme glouton ou celui d'Euclide, cette erreur ne peut se produire, mais quand on considère un des deux procédés « pragmatiques », elle peut surgir puisque les ordres affectés d'un coefficient 0 ne sont pas visibles dans l'organisation obtenue. Pour ne pas être ambigüe, la transcription pragmatique oblige donc à indiquer l'absence de tel ou tel ordre, absence signalée par le chiffre 0. Autrement dit, la nécessité d'introduire un signe pour noter l'absence oblige à se référer à la décomposition polynomiale, tout au moins à considérer tous les ordres, alors même qu'ils sont absents dans les representamens de la décomposition.
Le deuxième système, celui notifiant chaque groupement, ne requiert pas de noter les nombres a_i, mais chacun des ordres 10^i par un signe graphique par exemple par une lettre (nous avons utilisé les lettres I, A, B, C pour les quatre premières puissances de dix). Le principe est de répéter les signes autant de fois que nécessaire. Il faut alors un nombre infini de signes graphiques pour désigner les entiers mais il n'est pas nécessaire d'utiliser des chiffres pour transcrire les a_i. Nous avons déjà souligné en quoi ce système était tout aussi bien adapté à n'importe quel développement $\sum_{i=0}^{n} a_i d_i$, les signes graphiques nécessaires correspondant à chaque terme de la suite (d_i) : $d_0=1$ pour l'exhaustivité, representamens des coefficients d_i différents deux à deux pour une non ambiguïté, condition (1) remplie pour une non redondance. Mais si la condition $d_0=1$ assure l'exhaustivité théorique, une infinité de signes est nécessaire pour constituer une numération rendant compte de tous les nombres, quelle que soit leur grandeur. Remarquons que selon les graphèmes utilisés, le lien entre les ordres peut être indiqué ou non : I, A, B, C, D n'indique rien, mais les notations I, A, A^2, A^3 donnent des informations supplémentaires sur l'échelle de numération utilisée (ici une base A). Tous les ordres ne sont pas évoqués dans l'écriture de tel nombre, même si cet ordre lui est inférieur. Ainsi, il n'y a pas de nécessité à utiliser de representamen pour désigner le nombre zéro. En ce qui concerne les coefficients a_i, leur visibilité n'est pas immédiate, ils ne sont appréhendables que par la limitation de la répétition de chaque signe. Ceci traduit entre autre une proximité moins forte avec la décomposition polynomiale.
Le troisième système de transcription, celui que nous avons qualifié de « mixte », met en jeu les couples $(a_i, 10^i)$: les a_i étant signalés par une catégorie de representamen et les 10^i par

[36] Remarquons que nous n'avons pas étudié les systèmes de numération autres que celui de l'écriture chiffrée de position. Nous n'écartons pas l'hypothèse de pouvoir associer aux deux nouveaux systèmes dont il est question ici des principes mathématiques sous-jacents différents de ceux de la décomposition polynomiale. L'étude que nous ferons sur la numération orale en français va en fournir d'ailleurs des exemples.

une autre. Cette possibilité est offerte aussi avec les couples (a_i, d_i) d'un développement $\sum_{i=0}^{n} a_i d_i$. Ici aussi l'ordre de prise en compte n'a pas d'importance, et les mêmes remarques que pour le système précédent peuvent être faites sur le zéro et les ordres. Cependant il est nécessaire de transcrire les a_i par des chiffres, ce qui rend cette numération plus facilement interprétable en termes de $\sum_{i=0}^{n} a_i 10^i$, a_i <10, au moins pour le chercheur.

6. Conclusion sur la numération écrite chiffrée de position

6.1 Une définition en terme de processus

Nous avons décidé d'interpréter notre numération dans le cadre de la théorie des langages et nous avons conclu que notre numération écrite chiffrée s'interprète de manière non ambigüe à l'aide d'un processus mathématique de la théorie des langages.
L'étude nous montre que le qualificatif de numération décimale de position pour notre numération vient de l'interprétation mathématique que nous faisons de cette numération, interprétation qu'il est toujours possible de questionner. Cependant notre numération écrite chiffrée peut être facilement interprétée dans le cadre de la théorie des langages et cette interprétation permet de la rendre cohérente, exhaustive et non redondante. En effet à partir des representamens graphiques 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 désignant les premiers nombres entiers, la théorie des langages permet de fournir un processus de mise en signes de tous les nombres entiers. Le résultat de cette mise en signes correspond à notre numération écrite chiffrée. Dans le cadre de cette théorie, aucune autre interprétation n'est possible, sauf à considérer des systèmes plus complexes mais ceux-ci mettent néanmoins en jeu les mêmes principes de base. Voici le processus mis en évidence :

1. Une définition du nombre entier et des structures algébriques (addition, soustraction, multiplication, ordre).
2. Des representamens graphiques α_i désignant les premiers nombres entiers : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
3. Une expression des nombres mettant en jeu les structures opératoires : a = $\sum_{i=0}^{n} a_i d_i$, (d_i) étant une suite fixée avec $d_0 = 1$, permettant l'existence d'un tel développement pour tout entier. Nous avons nommé les éléments de (d_i) les *ordres* de l'échelle de la numération et les éléments de (a_i) les *coefficients* qui dépendent du nombre a.
4. Une échelle privilégiée, $d_i = k^i$, mettant en avant un nombre k, ainsi que la condition a_i<k assurant l'unicité du développement appelé alors décomposition polynomiale : ce sont les principes de la base k.
5. Un système de mise en signes qui privilégie la suite (a_i) des coefficients grâce à la bijection entre le développement $\sum_{i=0}^{n} a_i k^i$ et le mot du langage $a_n a_{n-1} ... a_1 a_0$.
6. Un choix de k comme le successeur de 9 (ou bien désignant le cardinal d'un ensemble dans lequel un élément a été ajouté à un ensemble de cardinal 9). En conséquence 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 permettent de désigner n'importe quel coefficient de la suite (a_i)

7. Des choix conventionnels présentant la suite α_i pour indiquer la bijection entre les coefficients a_i et les ordres k^i, les representamens 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 acquièrent par là même ainsi un statut de chiffre..

Exemples d'écritures chiffrées :
X le successeur de 9, se décompose de manière unique en **1**x X+**0**x1, X étant la base choisie, selon les conventions d'écriture, 10 est le representamen de X[37]: la présentation est linéaire, le chiffre le plus à droite indique le coefficient de l'ordre le plus petit, ainsi de suite en remontant par ordre croissant des ordres. De même, comme X^2=**1**xX^2+**0**xX+**0**x1, X^2 s'écrit 100 et de la même manière 10^i s'écrit d'un 1 suivit de i 0.

6.2 La première partie de l'interprétant : les principes mathématiques

Les étapes 1, 3, 4, 5 sont propres à la théorie des langages. Elles permettent entre autres de justifier la cohérence, la non-redondance et la non ambiguïté de notre numération écrite chiffrée usuelle. Elles comportent cependant un certain nombre d'arbitraires dans les paramètres : l'échelle en progression géométrique de type k^i et le choix du nombre k. L'échelle permet néanmoins de n'utiliser que k coefficients, les mêmes pour chaque ordre, ce qui va permettre d'élaborer un procédé de mise en signes dans lequel seuls les coefficients a_i apparaissent.

Le choix d'une base k comme échelle de numération est lié à l'utilisation de k chiffres. En effet, en ce qui concerne le choix de la base, l'étape 2 a un statut particulier, elle peut en fait être associée à l'étape 6. Mathématiquement, deux possibilités sont à envisager : soit c'est le fait de fixer la base k comme échelle de numération qui oblige à donner les representamens des k entiers inférieurs à k, soit c'est le fait de n'utiliser que les representamens des k premiers entiers qui fixe la base k. Nous ne pouvons en dire davantage sur le choix de ce paramètre k.

6.3 La deuxième partie de l'interprétant : le choix du système d'écriture dans la mise en signes.

Nous dégageons ici aussi deux points importants.

De la décomposition polynomiale au système d'écriture : le lien avec la numération de position

Les étapes 2, 6 et 7 sont à distinguer des autres, ce sont elles qui utilisent les possibilités offertes par les principes de base k pour finaliser la mise en signes des nombres : les écritures. Même si le choix fait utilise les potentialités offertes par l'état du processus à l'étape 5, d'autres choix sont possibles : la transcription dans notre système de numération de position chiffré est une des possibilités[38]. Ainsi, le passage de la décomposition polynomiale à nos écritures chiffrées n'est pas obligatoire et n'est qu'un choix parmi d'autres : nous avons donné quelques exemples à ce sujet. Ces systèmes de numération doivent indiquer la décomposition polynomiale par le biais des coefficients et des ordres. Le système objet de notre étude permet de le faire en indiquant uniquement par écrit les coefficients (par des chiffres). L'association de ces coefficients avec un ordre (les k^i) se fait en couplant un ordre de lecture des chiffres

[37] Remarquons que dans une base X quelconque, X s'écrit toujours 10 avec un tel procédé. C'est pourquoi, dans la thèse, nous utilisons aussi le mot « dix » pour désigner la base que nous utilisons usuellement.

[38] Remarquons que la transcription en signes écrits n'est pas nécessaire pour les mathématiques, puisqu'il est possible de définir le nombre indépendamment de ses désignations. Cependant cette transcription semble bien utile voire nécessaire pour faire des mathématiques, ceci rejoint les questions sur le rôle des representamens et de l'interprétant dans la conceptualisation, questions abordées dans le cadre de la théorie des champs conceptuels.

(indiqué par un sens conventionnel de lecture de chiffres alignés) avec un ordre d'énumération des ordres k^i. Les autres systèmes envisagés n'utilisent pas toutes les potentialités de la décomposition en base permettant en particulier, grâce à l'écriture de position, de n'avoir recours qu'à un nombre fini de chiffres pour désigner tous les nombres entiers. En effet ces systèmes s'adaptent tout aussi facilement à n'importe quelle échelle de numération.
Remarquons aussi qu'une écriture de position ne traduit pas nécessairement la décomposition polynomiale en base dix. Elle peut par exemple faire référence à une autre base, nous l'avons déjà dit. Mais le fait de n'utiliser que dix chiffres que l'on peut rencontrer à n'importe quelle place dans l'écriture et tels que deux dispositions différentes désignent deux nombres différents, ne peut s'interpréter dans la théorie des langages qu'en termes de base dix : si tel n'était pas le cas, la numération serait soit non exhaustive, soit ambigüe, soit redondante.

Des principes de l'écriture de position au système employé de nos jours : des choix et conventions de natures différentes.

Nous pouvons distinguer d'un côté les principes mathématiques de la base dix (étapes 1, 3, 4, 5) et d'un autre côté notre traduction dans un système d'écriture positionnel (étapes 2, 6, 7), celui-ci comportant lui-même un certain nombre de conventions. En outre, les choix ne semblent pas tous du même ordre. Le premier est le choix du nombre de base, nous l'avons déjà évoqué, il est mathématiquement parlant arbitraire et est lié au nombre de chiffres employés. Par ailleurs, dans la disposition des chiffres, nous pouvons distinguer un choix « pragmatique » du fait qu'il semble favoriser la lecture des nombres : celui d'une disposition soit en colonne soit en ligne, c'est-à-dire linéaire, et non pas autrement, par exemple en tableau. Nous pouvons aussi considérer des choix « culturels » : la graphie des chiffres, le fait de choisir entre la disposition ligne ou celle en colonne, ainsi que le sens de lecture. Un dernier choix est à questionner, c'est l'emploi du zéro. Lefort (1984) construit une numération de position chiffrée de base dix sans zéro, (qu'il appelle dix prime) qui repose sur une décomposition polynomiale unique d'un nombre en $\sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ avec la condition $1 \leq a_i \leq X$.
Cependant, le zéro n'est pas mis en signe (il n'a pas de representamen), ce qui oblige par exemple dans la technique de la division à laisser des espaces. En outre, les deux algorithmes mis en évidence pour obtenir la décomposition avec la condition $0 \leq a_i \leq 9$ doivent être revus. Pour être opérants, ils doivent être modifiés : on ne doit pas grouper « au maximum » dans certaines circonstances. Ainsi on doit obtenir AAA IIIIIIIII et non pas AAAA : il doit toujours rester au moins un groupement de chaque ordre. Le principe de groupement maximum entraîne quant à lui l'utilisation d'un representamen pour marquer l'absence.

6.4 Synthèse

Nous avons pu distinguer dans notre numération écrite chiffrée, d'une part les principes mathématiques de base dix à partir desquels elle peut être interprétée et construite sans doute possible et d'autre part le système d'écriture. Plus précisément, l'écriture de position est liée au fait de n'utiliser que les coefficients dans un développement obtenu dans une échelle de numération. Les possibilités graphiques (disposition ordonnée des chiffres désignant les coefficients) permettent de fournir les informations pour retrouver le développement complet d'un nombre, c'est-à-dire la relation entre coefficients et ordres. Nous avons indiqué les différentes règles, contraintes et conventions liées à ce choix, règles que les utilisateurs du système doivent connaître. Mathématiquement, l'utilisation limitée d'un nombre de chiffres (quelle que soit la place dans l'écriture) est intrinsèquement lié à la notion de base k, c'est-à-

dire au développement $\sum_{i=0}^{n} a_i k^i$, mais le choix de la base est arbitraire. L'unicité du développement est assurée par $0 \leq a_i$ <k[39]. Une fois déterminé le representamen des k nombres strictement inférieurs à k (les k chiffres), les autres nombres s'écrivent de manière unique selon une suite de chiffres. En particulier si 0 et 1 sont les écritures des deux premiers nombres, k s'écrit 10.
L'étude mathématique nous a fourni deux algorithmes qui ont été liés à deux procédés pratiques de mise en signes du cardinal d'une collection à l'aide de groupements. Ces deux procédés peuvent en particulier contribuer à mieux comprendre quels sont les enjeux mathématiques dans l'apprentissage de notre numération écrite chiffrée. Nous retenons qu'ils mettent en exergue le rôle d'une organisation reflétant la décomposition polynomiale. Cependant cette organisation peut être codée de différentes manières. Les deux autres possibilités envisagées n'aboutissent pas à des systèmes de numération de position. En outre, elles ne nécessitent ni zéro, ni utilisation d'un nombre limité de chiffres. En ce sens elles sont tout aussi bien adaptées à un développement non polynomial (c'est-à-dire un développement non relatif à une base). En outre, les deux procédés pratiques de mise en signes sont associés étroitement à deux algorithmes de la théorie des langages. Ils nous indiquent en quoi l'aspect cardinal du nombre est en jeu dans cette numération, plus encore que les structures opératoires et la structure d'ordre des entiers naturels.

Par ailleurs, des éléments de réponse peuvent être apportés sur les relations entre les définitions du nombre et notre système d'écritures chiffrées actuel. La première étape du processus de mise en signes exposé ci-avant met en exergue la distinction entre la définition des entiers naturels et les systèmes de numération. Dans la théorie des langages, ce sont finalement les structures algébriques et la relation d'ordre de l'ensemble des naturels qui sont utilisées. La non nécessité de revenir aux définitions abstraites du nombre (entier naturel) explique pourquoi nous avons aussi indiqué une définition « pragmatique » du nombre. Ces remarques questionnent la position de l'objet « nombre » dans l'ensemble du signe, la triade representamen/objet/interprétant. D'un point de vue de chercheur nous pouvons faire ces distinctions, c'est ce que nous tentons de faire ici, mais pour une personne qui utilise le nombre, aucun des trois n'est facilement dissociable. Ce point important est au cœur de notre thèse et nous l'abordons dans sa deuxième partie. A l'aide de l'analyse que nous avons faite, nous pouvons relier notre numération écrite chiffrée à une définition du nombre. Considérons l'algorithme glouton et l'algorithme d'Euclide. Ils permettent sans ambiguïté d'indiquer le cardinal d'une collection par la même suite de chiffres[40]. Ils sont reliés tous les deux à des égalités numériques équivalentes à la décomposition polynomiale. De ce point de vue, c'est surtout l'aspect structurel des nombres entiers qui est convoqué : les propriétés relatives aux opérations. Cependant quand nous considérons les deux procédés pratiques de mise en signes par des groupements, nous pouvons émettre l'hypothèse que ce sont les propriétés de l'aspect cardinal du nombre (en référence à la définition par les relations d'équipotence) qui sont à l'œuvre dans ces procédés. En effet, ils mettent en jeu une structuration de la collection ne faisant pas appel à l'idée de successeur, si ce n'est éventuellement pour déterminer les groupements de dix éléments par un compteur. Cette méthode n'est cependant pas obligatoire puisqu'il suffit par exemple de disposer d'un gabarit comportant le nombre d'emplacements nécessaires et que l'on se contente de remplir et de vider. Par ailleurs, le code écrit chiffré peut être déduit de l'organisation globale de la collection, qu'elle soit obtenue par un procédé

[39] L'autre possibilité est $1 \leq a_i \leq \mathrm{k}$, menant à la base k prime, mais dans ce cas zéro n'est pas mis en signe.

[40] En ce qui concerne l'existence d'autres procédés que ces deux ci, l'analyse mathématique n'a pas fait émerger d'autres possibilités si ce n'est un mélange des deux.

ou l'autre : là encore l'aspect ordinal n'entre pas en compte. Pour être plus précis, l'organisation est considérée indépendamment de la nature des éléments qui composent chaque groupement. De surcroît un groupement peut être considéré lui-même comme un élément d'un groupement supérieur.

Des questions se posent cependant encore, par exemple sur les motivations de l'adoption d'un système de numération fondé sur le principe de base, et du choix de dix comme base. A ce stade de la thèse, certaines pistes sont entrevues. En effet, nous avons indiqué en quoi notre numération décimale de position chiffrée était liée étroitement à la décomposition polynomiale, elle-même étroitement liée à l'organisation d'une collection d'objets. Nous avons aussi montré en quoi cette décomposition ne se traduisait pas nécessairement par une telle numération. Cependant, nous n'avons pas encore considéré les opérations. Rappelons que nous avons fait ce choix afin d'envisager les propriétés, théorèmes et relations entre nombre et numération, sans étude des algorithmes de calculs posés. Ce choix a été conditionné par le fait que les premiers apprentissages en CP ne font pas intervenir *a priori* ces calculs. L'étude des possibilités opératoires peut nous renseigner sur le pourquoi de l'adoption de notre système de numération. Il nous semble alors qu'une étude comparative avec d'autres systèmes de numération écrits peut nous éclairer. C'est pourquoi nous reviendrons sur l'aspect opératoire dans la conclusion de cette première partie de la thèse qui fait appel à des informations historiques.

Avant cette conclusion, il nous reste à étudier la numération parlée en France. En effet, si nous avons décidé d'envisager les écritures chiffrées sans cette dernière, des liens doivent exister entre les deux, du simple fait qu'elles servent à désigner toutes les deux les (mêmes) nombres. Un exemple de ces liens nous est fourni dans les procédés concrets de mise en signes du cardinal d'une collection. Nous avons en effet envisagé la détermination de groupements de dix comme pouvant se faire à l'aide d'un compteur « graphique », 1, 2, etc. Nous ne pouvons pas ignorer que si un tel procédé est théoriquement possible, il peut lui être substitué l'emploi d'un compteur oral, la comptine numérique. Interviennent alors non seulement une numération parlée, mais aussi une dimension mémorielle que nous n'avons pas encore considérée. En effet, si l'écriture peut servir à garder la trace des actions, ce n'est pas le cas de l'oral. Or certains procédés « concrets » de mise en signes à partir d'une collection nécessitent aussi de savoir, par exemple, combien de paquets de dix sont constitués au fur et à mesure afin de passer à un ordre supérieur. Il en est ainsi dans le procédé lié à l'algorithme glouton, dans lequel il est nécessaire de s'arrêter à dix à chaque fois. Nous aurons donc à étudier les spécificités des désignations parlées en France en lien avec notre numération écrite chiffrée. Cette étude est aussi nécessaire car en CP, c'est prioritairement via cette numération que les élèves ont eu accès au nombre, avant l'introduction de la numération écrite chiffrée dans son aspect positionnel.

CHAPITRE III
La numération parlée en France

1. Compléments méthodologiques

Dans ce chapitre, notre but est de voir quels interprétants peuvent être associés au système sémiotique de la numération parlée en français. Indiquons dès maintenant que nous allons étudier l'échelle longue de cette numération : celle qui emploie le terme de milliard pour 10^9 alors que billion désigne 10^{12}. Le cadre des mathématiques est naturel à l'étude de la numération écrite chiffrée. En ce qui concerne les representamens de la numération parlée en français, le cadre de la linguistique doit aussi être convoqué. Cauty (1986) en fait la démonstration. Il indique en particulier que les notions mathématiques de nombre, d'ordre, d'opération, de base et de numération de position ne peuvent expliquer à eux seuls certains faits. Il donne en exemple les nombres désignés par chacune des six permutations des trois mots « quatre », « vingt », « mille », ou bien le non sens (ou le sens perdu) de certaines expressions comme « quinze-vingts » par rapport à d'autres comme « quatre-vingts», ou encore l'emploi en France de « soixante-dix » plutôt que « dix-soixante » ou « septante ». Notre étude va consister à lier une étude d'orientation linguistique aux mathématiques, mathématiques qui ne peuvent être absentes du fait que l'objet dénoté est le nombre. Rappelons que nous avons écarté pour l'instant la question de la conceptualisation en elle-même qui, elle, questionne en particulier l'idée d'un « même objet » nombre dans les représentations/conceptions de tel ou tel sujet. Rappelons aussi que nous avons décidé de séparer l'étude des deux numérations pour ensuite mieux en saisir les liens : d'abord en comparant les interprétations[41] dégagées dans les chapitres 2 et 3, puis dans la conclusion de cette première partie de la thèse en élargissant l'étude à d'autres numérations par des considérations historiques et linguistiques.

Une fois indiquée une description « non interprétative » de la numération parlée (cf. le §1.2), pour la première partie de notre méthodologie, celle relative à l'établissement de modèles de numération théorique de référence, nous avons indiqué ne pas disposer de théorie mathématique dans laquelle la numération orale en français peut être interprétée *a priori*, du fait de sa composante linguistique. Notre premier travail va alors consister à définir différents types de numérations qui vont nous permettre de disposer d'une référence, de modèles. Pour ce faire nous allons utiliser cette fois-ci des travaux anciens, ceux qui abordent de manière approfondie les liens entre les mathématiques et les numérations. Ceux-ci vont nous amener, un peu à l'exemple des textes de Bezout et Reynaud, à poser les questions puis préciser une méthodologie et un plan d'étude.

1.1 L'étude linguistico-mathématique faite par Cauty

Cauty (1986) a fait une étude syntaxique de la numération parlée : elle consiste en « *une étude de la formation des expressions numériques composées dans une rationalité arithmétique ou ordinale par concaténation de nombrants ou de repérants* », Cauty (1986). Il qualifie la numération parlée en français de « *numération arithmétique (additivo-multiplicative parenthésée) à caractère décimal et vicésimal* ». Nous allons expliquer tous ces termes en les reprenant dans le cadre théorique que nous avons choisi. En particulier nous utilisons les termes de representamen, objet et interprétant pour reprendre certaines notions introduites par Cauty. C'est en partant des notions et résultats qu'il a obtenus que nous entreprenons ensuite notre propre analyse de la numération parlée en France.

---

[41] Nous utilisons les termes « interprétable » ou « interprétation » quand il s'agit de l'activité du chercheur concernant l'analyse des signes, et en particulier la recherche d'interprétants.

a. Les types de numération selon Cauty

Cauty (1984) distingue deux grands types de numération parlée : les numérations ordinales et les numérations arithmétiques. Les premières permettent de saisir les nombres grâce à des propriétés de la structure d'ordre des entiers naturels et ne font pas appel aux opérations de l'arithmétique. Le principe de construction de ces numérations consiste à établir une suite ordonnée de representamens qui vont servir comme representamens de la suite des nombres entiers (tels que définis par l'axiomatique de Peano). Les secondes, les numérations arithmétiques, permettent de rendre compte de l'existence des composés arithmétiques par addition, multiplication ou élévation à une puissance. La question est alors de classer telle ou telle numération dans un type ordinal ou cardinal (voire dans les deux à la fois). Cauty (1984) relève quatre critères (valables pour tout type de numération, parlée, écrite ou figurative[42]) : (C0) absence d'organisation ordinale et de toute opération, (C1) présence du principe ordinal, (C2) présence d'une ou plusieurs opérations arithmétiques, (C3) présence du principe de position au sens arithmétique du terme. Le premier critère (C0) comporte l'idée de representamens n'établissant pas de relation avec les autres representamens. Ainsi, il n'y a donc pas de système sémiotique à proprement parler. Le dernier critère (C3) est en fait celui que nous avons exposé dans l'analyse de la numération écrite chiffrée. Il indique que le système sémiotique repose sur le principe de la décomposition d'un nombre selon une base suivie de la mise en signes utilisant un système positionnel de chiffres[43]. Cauty indique qu'aucune numération parlée ne se base uniquement sur le critère (C0), et il ne signale pas de numération parlée comportant le critère (C3). C'est pourquoi seules deux catégories sont disponibles pour les numérations parlées, celles relevant du critère (C1) et celles du critère (C2). Décrivons plus en détail ces deux catégories.

Les numérations ordinales et cardinales.

La première, celle des numérations ordinales, est caractérisée par le fait que « *l'expression du nombre est in-analysable en termes d'opérations arithmétiques et que ces expressions ne peuvent être dites refléter des processus conceptuels de nature arithmétique* », Cauty (1984). Il précise en outre que « *les opérations conceptuelles du sujet énonciateur sont décrites dans le cadre de la topologie (relation d'ordre) ce qui permet d'introduire et de contrôler des notions comme le repérage sur une échelle, le franchissement d'une limite, la successivité, et d'initialiser le processus de la construction du système des représentations des phénomènes de comptage* ». D'autre part pour préciser ce qu'il entend par numération ordinale, Cauty introduit la notion de comptine et de comptage dont nous avons déjà parlé dans le paragraphe sur la numération chiffrée. Nous précisons ces notions. La comptine est pour Cauty « *une liste (conventionnelle ou idiosyncrasique, parlée, écrite ou mimée) ayant la propriété que tous les items de la liste apparaissent dans un ordre strict et immuable* ». Dans le champ de la didactique, le mot compteur est employé et le mot comptine concerne uniquement une liste parlée : nous adoptons cette terminologie. Le principe ordinal est donc lié intrinsèquement à l'élaboration d'une liste d'items qui sert en tant que comptine comme instrument de comptage. A contrario, le principe cardinal est lié à la construction de la numération selon ce que nous avons appelé une échelle de numération : ses caractéristiques ont été développées dans les paragraphes précédents concernant la numération écrite chiffrée.
Comment interprétons-nous ces notions dans notre recherche ? Nous allons considérer ces deux principes comme constitutifs des premières parties de deux interprétants différents auxquels il faut ajouter une deuxième partie concernant les différentes mises en

[42] Cauty distingue en effet au moins trois moyens pour représenter des nombres : deux sont linguistiques (oraux et écrits) et un troisième est figuratif (boulier, planche à compter, quipu, etc.).
[43] Cauty n'a cependant pas fait l'analyse de la numération écrite chiffrée que nous avons proposée. En particulier il ne distingue pas la décomposition polynomiale et les différentes mises en signe qui peuvent s'y adosser.

representamens (en mots dans une langue) : dans notre numération de position chiffrée nous avions distingué d'un côté les principes de base dix et de l'autre leur mise en representamens (en écriture chiffrée). A travers la comptine numérique, nous voyons aussi poindre un élément pour un procédé pratique de mise en signes du cardinal d'une collection : une énumération des éléments d'une collection associée à la récitation de la comptine. Cependant, si toute numération peut servir pour le comptage, pour autant elle n'est pas nécessairement construite sur un principe ordinal puisque certaines expressions peuvent être interprétables selon une échelle de numération (principe cardinal). Réciproquement, toute numération permet d'indiquer le cardinal d'une collection sans être nécessairement interprétable comme numération arithmétique. L'interprétation qu'en fait le chercheur est donc primordiale.

Une méthode d'analyse.

Comment alors argumenter l'interprétation des numérations pour lui donner des assises rationnelles ? Sur quels éléments s'appuyer ? Selon quelle méthode d'analyse ? Cauty indique un certain nombre de numérations qui sont sans aucun doute ordinales ou arithmétiques selon les critères qu'il expose. Nous allons suivre sa méthode. Il articule une étude syntaxique et une morphologique. Nous allons reprendre ses définitions. La syntaxe est, nous l'avons déjà dit, « *une étude de la formation des expressions numériques composées dans une rationalité arithmétique ou ordinale par concaténation de nombrants ou de repérants* », Cauty (1986). Précisons ce que signifie cette définition afin de permettre d'élaborer une méthode d'analyse de la numération parlée en français dans le cadre de cette thèse. La concaténation est le principe de mettre bout à bout des éléments (en chaîne). Elle peut aboutir à la chute d'un segment (tri+million devient trillion) ou à un ajout (vingt+un devient vingt-et-un) ou bien ne rien changer (vingt+trois devient vingt-trois). La première étape de l'analyse syntaxique est de relever les différents constituants effectivement engagés et d'établir ainsi le vocabulaire terminal de la numération (qui correspond à l'alphabet dans la théorie des langages) à partir duquel seront constitués tous les representamens : pour le français, « dix » et « sept » font partie de ce vocabulaire terminal mais pas « dix-sept ». Un nombrant est un representamen ayant une valeur numérique cardinale précise, qui n'est pas un composé arithmétique manifeste et qui sert à interpréter une numération dans une vision cardinale. Un repérant est un representamen ayant une valeur numérique ordinale, qui n'est pas analysable dans une analyse morphologique en termes de successeur, ou prédécesseur immédiat des deux entiers qui l'encadrent. Il sert à interpréter une numération dans une vision ordinale. Nous préciserons ultérieurement ces notions de nombrant et repérant quand nous allons les utiliser. A signaler que tout nombrant peut être interprété comme repérant (et réciproquement) puisque la comptine numérique peut servir d'instrument de comptage (lien entre nième et n), mais ceci dépend de l'interprétation que l'on en fait[44]. Nous retenons ici que c'est le fait d'interpréter certains representamens comme nombrant ou repérant qui détermine précisément une interprétation ordinale ou cardinale de la numération. Des choix sont à faire, en particulier grâce à une étude syntaxique, certains plus argumentés que d'autres. Une étude morphologique peut nous aider dans certains cas. La morphologie est en effet l'étude de la composition de chaque representamen qui n'est pas manifestement un composé de plusieurs representamens. Elle permet ainsi d'analyser les nombrants et les repérants à un niveau inférieur. Elle nous sert par exemple quand il s'agit de savoir si le representamen « onze » est un nombrant/repérant ou s'il a un lien ou non par exemple avec « dix ».
Ceci nous donne une méthode d'analyse de la numération parlée en français :
1ère étape : à partir du vocabulaire terminal (ce qui inclut une étude morphologique préalable), donner une description des representamens

[44] Nous verrons que dans la numération parlée en français, les nombrants et interprétants concernent souvent le même representamen.

2ème étape : faire une étude syntaxique, en particulier interpréter les relations entre les representamens en termes de nombrants ou repérants (ce qui engage en outre un classement en numération ordinale ou cardinale)
3ème étape : dégager de l'étude précédente les interprétations possibles, en distinguant en particulier la mise en representamens en français des principes mathématiques, comme il a été fait pour la numération écrite chiffrée.

b. Discussion de l'étude de Cauty.

Les résultats obtenus

La méthode précédente a été appliquée par Cauty (1986), ce qui l'amène à proposer de qualifier la numération parlée en français de numération arithmétique additivo-multiplicative parenthésée. Il considère que tous les representamens sont soit des nombrants, soit des composés de nombrants analysables en termes d'addition, de multiplication et de parenthèse. Ainsi, trois cent vingt-trois mille huit cent quatre-vingt-deux est analysable comme (((trois $\times$ cent) + vingt + trois) $\times$ mille) + (huit $\times$ cent) + (quatre $\times$ vingt) + deux. Pour étayer sa thèse, il introduit plusieurs notions. Ainsi, un nombre d'appui additif désigne un nombre n dont le representamen est un nombrant qui est concaténable à d'autres representamens désignant un nombre plus petit que n. Le résultat de cette concaténation « additive » est un representamen désignant un ou tous les nombres de la suite des successeurs de n, jusqu'au prédécesseur du double de n. Par exemple le nombre désigné par « dix » peut être interprété comme un nombre d'appui additif car « dix-sept », « dix-huit », « dix-neuf » désignent les trois prédécesseurs au double du nombre désigné par « dix ». Un nombre d'appui multiplicatif m est un nombre d'appui additif dont le representamen est de plus concaténable à quelques éléments des representamens des premiers entiers. Le résultat de la concaténation doit être un representamen désignant un des multiples de m. Le nombre désigné par « cent » est interprétable en tant que nombre d'appui multiplicatif, puisqu'il l'est en tant que nombre d'appui additif (par exemple dans « cent quarante » ou « cent trente-deux ») et que « deux cents » désigne un multiple du nombre désigné par « cent ». Trois éléments permettent alors d'interpréter la numération parlée en français comme une numération arithmétique additivo-multiplicative parenthésée : le tactème d'ordre, les nombres d'appui et la place. Ces éléments permettent tout d'abord d'interpréter sous forme de décomposition additive ou multiplicative des expressions « *élémentaires* » faisant intervenir uniquement deux arguments (donc deux places possibles) dont un des deux est un representamen d'un nombre d'appui. Le tactème d'ordre est le fait que l'ordre d'énonciation a du sens. Par exemple, en français, l'ordre croissant peut être interprété comme indiquant un composé multiplicatif et l'ordre décroissant comme un composé additif. Mais toute expression n'est pas « *élémentaire* », c'est-à-dire constituée de deux arguments dont l'un des deux est le representamen d'un nombre d'appui. Ainsi, pour interpréter toutes les expressions, un troisième élément est requis, c'est le découpage de la chaine des representamens en « tronçons » ou « tranches » d'expressions « élémentaires ». Pour la numération parlée en français, Cauty considère schématiquement les expressions des nombres jusqu'à mille puis celles au-delà. Il indique trois types de « tranches » dans la numération française jusqu'à mille : un premier concernant une séquence de representamens ne faisant pas intervenir « cent », un deuxième faisant intervenir « cent » sans qu'il soit suivi de quoi que ce soit, et un dernier faisant intervenir les deux.

Discussion

Nous allons reprendre à notre compte toutes ces définitions, mais nous allons rediscuter de l'interprétation de Cauty. Celle-ci est en effet fondée sur une description qui, un peu à l'exemple de Bezout et Reynaud, essaye de lier les écritures chiffrées et les expressions orales, en donnant un algorithme qui permet de passer de l'un à l'autre. Cet algorithme est justifié par une analyse syntaxique très précise. Nous pensons cependant qu'une telle description engage alors nécessairement vers une interprétation d'essence arithmétique. Ifrah (1994) et Guitel (1975) arrivent à des conclusions similaires sans l'analyse de Cauty, mais en recherchant des méthodes pour classifier l'ensemble des numérations parlées. Nous ne rejetons pas cette possibilité, mais essayons de voir s'il en existe d'autres, en particulier celle d'une numération « ordinale »[45]. En outre, il nous semble aussi pertinent d'apporter des précisions sur cette interprétation arithmétique de la numération parlée en français en tant que numération arithmétique avec la spécificité d'être additivo-multiplicative parenthésée. En effet, nous pouvons nous poser des questions sur la légitimité d'interpréter tel ou tel representamen en tant qu'appui additif ou multiplicatif[46] et par la suite sur la raison de ces choix : y a-t-il de manière sous-jacente des raisons mathématiques ? Ainsi, pouvons-nous évaluer la proximité de la numération parlée en France avec la numération écrite chiffrée de position.

c. Plan d'étude

Comme pour l'étude de la numération écrite chiffrée, nous allons constituer un cadre de référence afin d'interpréter celle parlée en France. Trois analyses syntaxiques reprenant les éléments théoriques dus à Cauty vont nous permettre dans le paragraphe 2 de pouvoir comprendre la numération à l'aide de systèmes différents. Ceci nous donne la possibilité ensuite de distinguer dans le paragraphe 3, pour chaque système, les deux parties de l'interprétant que nous dégageons. La première partie concerne les principes plus spécifiquement mathématiques (3.1) : ce sont nos modèles. Ce premier mouvement, des signes (analyse syntaxique) vers les mathématiques (première partie de l'interprétant), pose des questions sur les choix faits dans notre langue et amorce ainsi le deuxième mouvement, des mathématiques vers les signes, la deuxième partie de l'interprétant (3.2). Ceci permet d'avoir des éléments de réponse à la question : « en quoi les principes mathématiques retenus (première partie de l'interprétant) peuvent-ils mener à d'autres numérations que la numération parlée en France ? ».
Pour compléter notre analyse, nous abordons dans le paragraphe 4 les procédés « concrets » de mise en signes du cardinal d'une collection, procédés qui posent un autre regard sur le rapport entre les mathématiques et les signes.

Cependant, en tout premier lieu, il nous faut développer une description « non interprétative » de la numération parlée en France avant d'en faire l'analyse, c'est l'objet de ce qui suit.

1.2 Description de la numération parlée en français

La description de la numération parlée en France ne pose pas les mêmes problèmes que celle de la numération écrite chiffrée : les representamens de la seconde sont des suites de chiffres ayant toutes un sens et analysables dans le cadre de la théorie des langages, ce qui n'est pas le cas pour la première. Cette description est cependant indispensable pour définir l'ensemble des signes que nous voulons étudier. Comme nous l'avons signalé précédemment, utiliser tel ou tel algorithme peut sous-tendre de fait une interprétation et par là même masquer d'autres possibilités.
C'est pourquoi nous allons décrire la numération parlée sans l'aide de la numération écrite chiffrée, à l'inverse par exemple de la méthode de Numa Bocage (1997) et dans une moindre mesure de Cauty (1986), Guitel (1975) et Ifrah (1994). En effet, ces descriptions sont de fait une réorganisation par le chercheur de la numération. Cette réorganisation nous semble

[45] Qui l'est de fait jusqu'à dix.
[46] Par exemple jusqu'à cent, il ne semble y avoir que des appuis additifs.

induire d'emblée des principes arithmétiques liés à la numération écrite chiffrée. Or nos conceptions premières, voire nos *a priori*, ne doivent pas faire écran à toutes les possibilités.

Méthodologie

Notre numération parlée associe un representamen à chaque nombre. Dans le cadre propre à une numération parlée, nous parlerons aussi du nom d'un nombre, lorsque le representamen aura été associé au nombre qu'il dénote. Dans le processus de description, nous adoptons le principe de définir tout d'abord le vocabulaire terminal de la numération, c'est à dire les éléments lexicaux qui permettent par concaténation ou non de devenir des noms de nombre. Ensuite nous décrirons ces autres noms.
Pour les nombres inférieurs à une certaine borne, les mots utilisés pour le vocabulaire terminal sont : « un », « deux », « trois », « quatre », « cinq », « six », « sept », « huit », « neuf », « dix », « onze », « douze », « treize », « quatorze », « quinze », « seize », ainsi que « vingt », « trente », « quarante », « cinquante », « soixante », « cent », « mille », « million », « milliard ». Dans notre recherche, nous appelons ces mots les mots de base de la numération : ce sont les éléments du vocabulaire terminal de la numération. Les nombres de base seront les nombres que ces mots désignent. Dans cette numération, les nombres sont désignés soit par un de ces mots, soit une concaténation utilisant ces mots : c'est ainsi que nous passons des mots aux noms.
Ultérieurement, nous analysons ces composés, soit en termes arithmétiques soit en en termes d'ordinal, mais dans notre description nous évitons ces interprétations.

Par ailleurs, notre description ainsi que les analyses syntaxiques ultérieures doivent pouvoir s'appuyer sur des analyses des mots de base de la numération, y compris morphologiques. C'est pourquoi nous allons dès maintenant faire ces analyses pour les mots « dix », « onze », « douze », « treize », « quatorze », « quinze », « seize », ainsi que « vingt », « trente », « quarante », « cinquante », « soixante », « soixante-dix », « quatre-vingts », « quatre-vingt-dix », « cent », « mille », « million », « milliard ».

a. Les mots de base de la numération

De un à neuf, nous considérons que les representamens sont indépendants et in-analysables en termes de liens entre eux[47]. Pour les autres, nous nous référons au dictionnaire historique de la langue française sous la direction d'Alain Rey (1998) duquel sont extraites les origines du nom des nombres. Celles-ci sont données en annexe et nous présentons ici les points principaux sur lesquels nous nous appuyons ultérieurement.
Pour onze, douze, treize, quatorze, quinze, seize, nous retenons essentiellement leur origine latine et la concaténation de decim (dix) précédé du representamen latin de chacun des six premiers nombres. A noter que le dictionnaire interprète certaines concaténations, celles donnant onze, treize, quinze, comme une somme : ce n'est pas l'unique interprétation possible, nous le verrons dans la troisième interprétation que nous présentons dans ce travail. L'emploi de onze, douze, treize, quatorze, quinze, seize en tant que nom indique au moins autant un numéro ou un rang qu'un cardinal. Les ordinaux onzième, …, quinzième ne sont attestés que tardivement (12ème siècle). Seize a d'abord désigné aussi un ordinal. Nous pouvons faire l'hypothèse qu'il en était de même pour les autres.
L'origine des representamens vingt, trente, quarante, cinquante, soixante, indique l'utilisation de deux, trois, quatre, cinq, six, et de dix. Cependant si le suffixe latin –gint semble renvoyer à l'idée de dizaine à travers l'indo-européen « kmt », Pépin (2003), l'interprétation multiplicative deux fois dix n'est pas la seule : cela peut être par exemple la deuxième dizaine. Il se peut aussi que cela renvoie à une unité d'ordre supérieur, le processus de

[47] Ceci peut-être discuté mais cela ne rentre pas dans le cadre de ce travail.

concaténation n'est donc pas avéré. De même, il semble qu'au moins à une certaine époque, les representamens de ces dizaines aient une valeur ordinale et cardinale simultanée.
Tous ces termes sont invariables, mais en ce qui concerne un, deux, trois et quatre, ils sont à l'origine déclinables, comme pour tous les representamens oraux des quatre premiers nombres d'origine indoeuropéenne, Marchot (1897).

b. Les noms des autres nombres

Compléments méthodologiques

Nous allons maintenant donner une description de la numération parlée en France. Auparavant, donnons encore quelques précisions. Nous ne pouvons pas affirmer, comme pour la numération écrite chiffrée, que tous les mots du vocabulaire terminal de la numération (qui sont les chiffres pour la numération chiffrée) ont du sens quelle que soit la suite qu'ils constituent. C'est pourquoi, il va nous falloir indiquer les règles de formation des representamens. Mais, sans prendre de précaution, ces règles peuvent constituer déjà une interprétation, comme il nous semble que ce soit le cas pour les recherches anciennes que nous avons consultées. Pour éviter cet écueil, à l'inverse de la description de la numération écrite chiffrée, nous allons devoir dès maintenant relier le representamen au nombre qu'il désigne. Cependant, nous allons voir que cette obligation est d'une certaine manière intrinsèque au système de numération parlée en français, ce qui atténue des effets interprétatifs.
Pour différencier le mot du nom, nous prendrons l'habitude d'utiliser dans ce paragraphe des guillemets quand il va s'agir de le prendre dans le sens d'un mot sans que ce soit encore un nom, c'est-à-dire sans qu'il ait été encore relié au nombre qu'il désigne. Dans le cas contraire, c'est le nombre qui sera signifié à travers son nom. Ainsi, dans notre description, tant que nous n'avons pas introduit le mot en tant que nom de tel nombre, nous ne pourrons pas désigner ce dernier par ce mot. Un nombre sera signifié, nous le verrons, en tant que successeur d'un nombre que nous aurons précédemment désigné par son nom[48]. Notons que par la suite, les representamens ayant été définis, il nous faudra parfois distinguer le representamen du nombre qu'il désigne. Quand il sera nécessaire de lever une ambiguïté, nous utiliserons des guillemets cette fois-ci pour faire cette distinction : « onze » désignera le representamen, onze le nombre qu'il désigne. Les mots de base et les nombres de base sont propres à une numération orale. Ceci induit une structure sous-jacente, des principes et des conventions, que nous voulons mettre en évidence. Dans la description précise de notre numération parlée en France nous voulons éviter les « pièges » indiqués à la suite des descriptions de Bezout et Reynaud. C'est pourquoi nous ne ferons pas référence à notre numération écrite chiffrée, nous l'avons déjà dit, mais nous n'utiliserons pas non plus le biais d'une numération en unités. Dans la numération chiffrée de position, une fois les dix premiers entiers désignés par un chiffre (y compris zéro), nous pouvons donner directement la désignation écrite de tous les autres entiers et chaque suite de chiffres a un sens. A l'inverse, la description de la numération parlée en France suit un ordre, celui des nombres eux-mêmes. C'est une conséquence du fait que notre numération parlée soit constituée de concaténations : par exemple cent vingt-huit comporte le nom de trois autres nombres, noms qu'il est nécessaire d'avoir introduits auparavant pour comprendre la signification de cette désignation. Ajoutons finalement que nous avons décrit le nom des nombres bien au delà de cent (le champ numérique qui concerne le CP). La raison en est que les interprétations doivent être

[48] Nous voyons ici que nommer est une des façons de désigner un nombre, c'est-à-dire de l'indiquer. Nous pouvons distinguer en ce sens nommer et désigner, comme le fait Briand (1999). Cependant, dans le contexte de ce premier chapitre, mis à part ce passage relatif à la description de la numération parlée en France, cette distinction ne nous est pas utile. En effet, ici, toute désignation fait référence au representamen dans une des deux numérations étudiées, que ce soit une désignation écrite chiffrée ou une désignation orale.

inférées (et discutées) en considérant un large spectre, ceci se voit dans les descriptions de Reynaud et Bezout.

Description de la numération parlée en France

- Pour les premiers nombres : un mot est associé à chaque nombre donnant ainsi le nom du nombre, les mots sont différents deux à deux, ce sont dans l'ordre : « un », « deux », « trois », « quatre », « cinq », « six », « sept », « huit », « neuf », « dix », « onze », « douze », « treize », « quatorze », « quinze », « seize »[49].
- Pour les trois nombres qui suivent, le nom du nombre est obtenu par concaténation. Il est composé du mot « dix » suivi respectivement des mots « sept » pour le premier des trois, « huit » pour le deuxième, « neuf » pour le troisième, ce qui donne « dix-sept », « dix-huit », « dix-neuf » qui désignent dans cet ordre les trois nombres successeurs de quinze.
- Pour le suivant, un mot nouveau est employé, « vingt ». Puis pour les neuf nombres qui suivent, est utilisé un processus identique à celui de la dénomination des nombres dix-sept, dix-huit, dix-neuf. Deux mots sont juxtaposés. Le premier est toujours le mot « vingt », ensuite sont accolés successivement pour désigner chacun des neuf nombres suivant vingt, les mots désignant les neuf premiers nombres : « un », « deux », « trois », « quatre », « cinq », « six », « sept », « huit », « neuf ». A noter une exception pour le premier nombre après vingt, pour lequel on intercale le mot « et » entre « vingt » et « un ». Ce qui donne finalement « vingt et un », « vingt-deux », « vingt-trois », « vingt-quatre », « vingt-cinq », « vingt-six », « vingt-sept », « vingt-huit », « vingt-neuf » qui désignent dans cet ordre les neuf nombres successeurs de vingt.
- Le principe est le même en ajoutant un mot nouveau pour chaque dizaine jusqu'à cinquante-neuf.
- Pour le nombre suivant un mot nouveau est employé, « soixante ». Par la suite, on considère le processus de dénomination des dix-neuf nombres qui suivent. Pour ces dix-neuf nombres est utilisé un processus identique à celui de la dénomination des nombres vingt-et-un, vingt-deux, …, vingt-neuf. Ce qui donne finalement « soixante-et-un », « soixante-deux », « soixante-trois », « soixante-quatre », « soixante-cinq », « soixante-six », « soixante-sept », « soixante-huit », « soixante-neuf », « soixante-dix », « soixante-et-onze », « soixante-douze », « soixante-treize », « soixante-quatorze », « soixante-quinze », « soixante-seize », « soixante-dix-sept », « soixante-dix-huit », « soixante-dix-neuf » qui désignent dans cet ordre les dix-neuf successeurs immédiats de soixante[50]. A noter les cas particuliers de « soixante-et-onze » et « soixante-et-un », dans lesquels le mot « et » a été intercalée. Toutefois cette particularité avait déjà été notée pour les successeurs de vingt, trente, quarante et cinquante.
- Pour le nombre suivant un mot « nouveau » est employé, « quatre-vingts ». Par la suite, on considère le processus de dénomination des dix-neuf nombres qui suivent. Pour ces dix-neuf

[49] Dans l'analyse morphologique précédente, nous avons vu que les mots « onze », « douze », « treize », « quatorze », « quinze », « seize » peuvent être interprétés comme le résultat d'une concaténation altérée. Cependant du fait de la non évidence de cette concaténation (qui n'est qu'une interprétation puisque nous n'avons pas trouvé trace du mot dix ou decem), nous gardons l'idée que ces noms apparaissent comme nouveaux. Ajoutons que c'est une particularité de certaines numérations parlées d'altérer certains noms, particularité qui les distingue par exemple de notre numération chiffrée dont les transformations graphiques des chiffres au cours du temps ne sont pas du même ordre.

[50] A noter que d'autres numérations francophones sont différentes en ce point. Elles utilisent un mot particulier pour désigner soixante-dix, le mot « septante ». Ainsi on doit considérer le processus de dénomination des neufs successeurs à soixante, puis des neufs successeurs à septante, comme pour les nombres inférieurs à soixante. Remarquons qu'un mot, quand il est prononcé, ne garde pas forcément trace de sa composition. Ainsi par exemple « soixante-dix », tant qu'il n'est pas écrit en lettres peut être considéré comme d'un seul tenant « soissant'disse ». Ainsi, dans l'interprétation de la numération, nous aurons à tenir compte du fait qu'il est possible de considérer « soixante-dix » comme un mot de base de la numération. La même remarque est à faire pour « quatre-vingts »/« octante »/ « huitante » et « quatre-vingt-dix »/« nonante ».

nombres est utilisé un processus identique à celui de la dénomination des nombres vingt-et-un, vingt-deux, …, vingt-neuf. Ce qui donne finalement « quatre-vingt-un », « quatre-vingt-deux », « quatre-vingt-trois », « quatre-vingt-quatre », « quatre-vingt-cinq », « quatre-vingt-six », «quatre-vingt-sept », « quatre-vingt-huit », « quatre-vingt-neuf », « quatre-vingt-dix », « quatre-vingt-onze », « quatre-vingt-douze », « quatre-vingt-treize », « quatre-vingt-quatorze », « quatre-vingt-quinze », « quatre-vingt-seize », «quatre-vingt-dix-sept », « quatre-vingt-dix-huit », « quatre-vingt-dix-neuf » qui désignent dans cet ordre les dix-neuf successeurs immédiats de quatre-vingts. Cette fois-ci le mot « et » n'est pas utilisé[51].

- Pour le nombre suivant, un mot nouveau est employé, « cent ». Par la suite, on considère le processus de dénomination des quatre-vingt-dix-neuf nombres qui suivent. Pour ceux-ci, une concaténation constitue le nom du nombre. Il est composé du mot « cent » suivi du mot « un » pour le successeur immédiat de cent, du mot « deux » pour le suivant etc., jusqu'au mot « quatre-vingt-dix-neuf » pour le quatre-vingt-dix-neuvième successeur de cent. Ce qui donne « cent un », « cent deux », etc., « cent quatre-vingt-dix-neuf » pour désigner successivement les quatre-vingt-dix-neuf successeurs immédiats de cent.
- Le nombre suivant est dénommé grâce à la juxtaposition du mot « deux » suivi du mot « cents »[52]. Par la suite, on considère le processus de dénomination des quatre-vingt-dix-neuf nombres qui suivent, processus analogue à celui des nombres entre cent et cent quatre-vingt-dix-neuf Pour ceux-ci, un mot composé constitue le nom du nombre. Il est composé du mot « deux-cent » suivi du mot « un » pour le successeur immédiat à deux-cent, du mot « deux » pour le suivant etc., jusqu'au mot « quatre-vingt-dix-neuf » pour le quatre-vingt-dix-neuvième successeur de deux-cent. Ce qui donne « deux cent un », « deux cent deux », etc., « deux cent quatre-vingt-dix-neuf » pour désigner successivement les quatre-vingt-dix-neuf successeurs immédiats de deux cents.
- Le processus continue de la même manière, par l'introduction d'une dénomination particulière pour le nombre qui succède au quatre-vingt-dix-neuvième successeur du dernier nombre désigné successivement en accolant un mot parmi « trois », « quatre », « cinq », « six », « sept », « huit », « neuf » et le mot « cent ». Ce qui donne :
« Trois cents » suivi de « trois cent un », « trois cent deux », etc., « trois cent quatre-vingt-dix-neuf » pour désigner successivement les quatre-vingt-dix-neuf successeurs de trois cents, etc. jusqu'à « Neuf cents », suivi de « neuf cent un », « neuf cent deux », etc., « neuf cent quatre-vingt-dix-neuf » pour désigner successivement les quatre-vingt-dix-neuf successeurs de neuf cents.

- Pour le successeur de neuf cent quatre-vingt-dix-neuf, un mot nouveau est utilisé qui ne peut pas s'interpréter comme un mot composé de mots déjà utilisés : c'est le mot « mille »[53]. Pour les neuf cent quatre-vingt-dix-neuf successeurs de mille, on accole le mot mille successivement aux désignations des neuf cent quatre-vingt-dix-neuf premiers nombres dénommés. Ce qui donne dans l'ordre successivement : « mille un », « mille deux », etc., jusqu'à « mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf » pour dénommer le successeur de mille neuf cent quatre-vingt-dix-huit.

[51] Notons aussi que l'orthographe change : le « s » de « quatre-vingts » tombe dans la concaténation mais cela ne s'entend pas à l'oral.
[52] Nous verrons ultérieurement en quoi « deux cents » peut jouer d'une certaine manière le rôle d'un mot nouveau, c'est aussi le cas pour « trois cents », etc. Ceci est une conséquence de l'aspect « parlé » de la numération étudiée (importance de la phonétique), comme cela a été signalé dans une note précédente.
[53] Il n'était pas nécessaire d'introduire un mot nouveau ici : on aurait pu continuer dix cents, onze cents… quatre-vingt-dix-neuf cents quatre-vingt-dix-neuf. Mais dans l'histoire la numération s'est constituée en ajoutant ce mot mille et nous décrivons la numération parlée telle qu'elle existe.

- Ensuite le successeur de mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf est dénommé par « deux mille ». Pour les neuf cent quatre-vingt-dix-neuf successeurs de deux mille, on accole les mots « mille » successivement aux désignations des neuf cent quatre-vingt-dix-neuf premiers nombres dénommés. Ce qui donne dans l'ordre successivement : « deux mille un », « deux mille deux », etc., jusqu'à « deux mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf » pour dénommer le successeur de deux mille neuf cent quatre-vingt-dix-huit.
- Le processus continue de la même manière, par l'introduction d'une dénomination particulière pour le nombre qui succède au neuf cent quatre-vingt-dix-neuvième successeur du dernier nombre désigné successivement en accolant le nom désignant les neuf cent quatre-vingt-dix-neuf premiers entiers et le mot « mille ». Ce qui donne :
« Trois mille » … puis, « quatre mille » …. etc., jusqu'à …
« Neuf cent quatre-vingt-dix-neuf mille » pour désigner le successeur de neuf cent quatre-vingt-dix-huit mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf, suivi de « neuf cent quatre-vingt-dix-neuf mille un », « neuf cent quatre-vingt-dix-neuf mille deux », etc., jusqu'à « neuf cent quatre-vingt-dix-neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf » pour désigner successivement les neuf cent quatre-vingt-dix-neuf successeurs de neuf cent quatre-vingt-dix-neuf mille.

- Pour le successeur de neuf cent quatre-vingt-dix-neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf, un mot nouveau est utilisé qui ne peut pas s'interpréter comme un mot composé de mots déjà utilisés : c'est le mot « million ». Pour les neuf cent quatre-vingt-dix-neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf successeurs de un million, on accole à « un million » successivement les désignations des neuf cent quatre-vingt-dix-neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf premiers nombres dénommés. Ce qui donne dans l'ordre successivement : « un million un », « un million deux », etc., jusqu'à « un million neuf cent quatre-vingt-dix-neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf » pour dénommer le successeur du nombre un million neuf cent quatre-vingt-dix-neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-huit.
- Ensuite le successeur de un million neuf cent quatre-vingt-dix-neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf est dénommé par « deux millions ». Pour les neuf cent quatre-vingt-dix-neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf successeurs de deux millions, on accole à « deux millions » successivement les désignations des neuf cent quatre-vingt-dix-neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf premiers nombres dénommés. Ce qui donne dans l'ordre successivement : « deux millions un », « deux millions deux », etc., jusqu'à « deux millions neuf cent quatre-vingt-dix-neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf ».
- Le processus continue de la même manière, par l'introduction d'une dénomination particulière pour le nombre qui succède au neuf cent quatre-vingt-dix-neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuvième successeur du dernier nombre désigné en accolant successivement le nom désignant les neuf cent quatre-vingt-dix-neuf premiers entiers et « million ». Ce qui donne :
« Trois millions » pour désigner le successeur à deux millions neuf cent quatre-vingt-dix-neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf, suivi de « trois millions un », « trois millions deux », etc., jusqu'à « trois millions neuf cent quatre-vingt-dix-neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf ».
Puis, « quatre millions .etc., jusqu'à « neuf cent quatre-vingt-dix-neuf millions ».
« Neuf cent quatre-vingt-dix-neuf millions » pour désigner le successeur de neuf cent quatre-vingt-dix-huit millions neuf cent quatre-vingt-dix-neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf, suivi de « neuf cent quatre-vingt-dix-neuf millions un », etc., jusqu'à « neuf cent quatre-vingt-dix-neuf millions neuf cent quatre-vingt-dix-neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf » pour désigner successivement les neuf cent quatre-vingt-dix-neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf successeurs de neuf cent quatre-vingt-dix-neuf millions.

- Pour le successeur de neuf cent quatre-vingt-dix-neuf millions neuf cent quatre-vingt-dix-neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf, un mot nouveau est utilisé qui ne peut pas s'interpréter comme un mot composé de mots déjà utilisés : c'est le mot « milliard ». Pour les neuf cent quatre-vingt-dix-neuf millions neuf cent quatre-vingt-dix-neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf successeurs de un milliard, on accole à « un milliard » successivement les désignations des neuf cent quatre-vingt-dix-neuf millions neuf cent quatre-vingt-dix-neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf premiers nombres dénommés. Ce qui donne dans l'ordre successivement : « un milliard un », « un milliard deux », etc., jusqu'à « un milliard neuf cent quatre-vingt-dix-neuf millions neuf cent quatre-vingt-dix-neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf » pour dénommer le successeur du nombre un million neuf cent quatre-vingt-dix-neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-huit.
Le processus continue ainsi avec l'introduction de « deux milliards », puis « trois milliards » etc., jusqu'à neuf cent quatre-vingt-dix-neuf milliards. Le nombre succédant à neuf cent quatre-vingt-dix-neuf milliards neuf cent quatre-vingt-dix-neuf millions neuf cent quatre-vingt-dix-neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf est désigné par billion[54] .

c. Conclusions relatives à la description de la numération parlée en France

La numération parlée en France se fonde sur le principe de désignation de chaque nombre par un representamen différent. Mais ces différences ne sont pas toutes sans lien comme c'est le cas pour les noms des dix premiers nombre. C'est l'étude de ces liens qui va nous permettre de repérer, à travers une analyse syntaxique, des principes mathématiques sous-jacents et une certaine approche du nombre.
Notre numération orale se construit de proche en proche dans le sens où les nouvelles dénominations prennent en compte les désignations précédentes. Ceci est possible grâce à deux éléments de natures différentes : des mots et des compositions de mots (concaténation en particulier), ces compositions suivant des règles. Précisons ce fonctionnement.

Des noms définis au fur et à mesure, dans l'ordre croissant des entiers naturels

De nouveaux mots sont introduits au fur et à mesure des besoins de désignation des nombres de plus en plus grands, tout en utilisant des noms de nombre déjà introduits : un deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, dix, onze, douze, treize, quatorze, quinze, seize (un nom différent pour les seize premiers nombres) puis vingt, trente, quarante, cinquante, soixante, cent et enfin mille, million, milliard. Nous avons dénommé ces mots des mots de base, c'est-à-dire ceux qui forment le vocabulaire terminal de la numération. Ainsi par exemple la désignation des nombres entre cent et neuf cent quatre-vingt-dix-neuf nécessite tous les mots utilisés pour désigner les nombres entre un et quatre-vingt-dix-neuf plus le mot « cent ». Cependant un ordre est respecté dans les énonciations, que reflète-t-il mathématiquement ?

Des règles d'énonciation qui peuvent être interprétées comme le reflet d'une structure arithmétique

Cet ordre nous pouvons le traduire, comme le fait Cauty, en règles liées à des décompositions mettant en jeu l'addition et la multiplication. Les nombres peuvent être en effet décomposés en somme(s), et dans certaines sommes certains termes peuvent être décomposés en produits. Les règles d'énonciation peuvent être vues comme la traduction de ces décompositions qui nécessitent au fur à mesure l'introduction de nouveaux mots pour désigner par des noms de nouveaux nombres. Décrivons ces règles pour tous les nombres, ce qui va mettre aussi en

[54] Nous adoptons ici l'échelle longue. Dans les pays anglo-saxons qui utilisent l'échelle courte, le mot billion désigne le milliard, et c'est le mot trillion qui est utilisé pour ce qui a été appelé ici billion. Pour les noms de ces grands nombres, deux échelles sont en vigueur, l'échelle courte et l'échelle longue, voir par exemple Guitel (1975). Ceci dépasse le cadre de notre recherche qui concerne prioritairement les « petits » nombres.

exergue les nombres qui sont décomposés (et ceux qui ne le sont pas, ceux désignés par les nombrants) et le type de décomposition.
En ce qui concerne l'indication de telle ou telle opération dans les décompositions des nombres, les deux noms sont accolés mais pour une addition le plus grand précède le plus petit, et pour une multiplication, c'est l'inverse. La question que l'on peut se poser est de savoir si, connaissant les noms de base et les principes nous pouvons identifier le nombre désigné. Y a-t-il confusion possible ? Est-ce que cela suppose de connaître le type de décomposition ? Prenons l'exemple de trois cent vingt-trois. La désignation peut se référer à une décomposition en somme de deux termes dont le premier est la centaine immédiatement inférieure et non pas d'un produit : il ne s'agit pas de trois $\times$(cent vingt-trois) mais par exemple de (trois $\times$ cent) + (vingt-trois). Du fait de l'associativité de l'addition, le problème se pose uniquement pour les nombres dont la désignation sous-tend une décomposition mettant en jeu la multiplication et l'addition en même temps, cependant est-ce que toutes les désignations sous-tendent une décomposition mixte ? Ne peut-on pas aussi avoir une décomposition additive de la forme (trois cents) + (vingt-trois) ? Comment reconnaître la bonne décomposition uniquement avec l'énonciation ? Y a-t-il une règle qui permet de trancher entre deux décompositions ? Nous voulons trouver les principes mathématiques qui permettent de rendre cohérents et non ambigus des principes d'énonciation.
Notre première analyse syntaxique va nous permettre de répondre à ces questions, en partant d'une segmentation des désignations orales en segments séparés par les mots « cent », « mille », « million », « milliard ». Elle nous mène à considérer des décompositions mixtes. L'interprétation qui va en découler est proche de celle de Cauty, mais elle ne fait intervenir que des appuis multiplicatifs[55] et donc diffère de celle de Cauty, principalement pour les nombres inférieurs à cent. En outre, nous allons y distinguer une étude de la mise en representamen en français[56] (2ème partie de l'interprétant) ainsi qu'apporter une réflexion sur les choix de tel ou tel nombre comme appui multiplicatif.
Une deuxième analyse syntaxique va s'intéresser plus particulièrement aux entiers inférieurs à mille en considérant des décompositions additives. Elle donnera un éclairage un peu différent à la structure arithmétique que l'on peut inférer de la description de la numération. Ceci nous conduit alors à une interprétation arithmétique multiplicative.

<u>Des règles qui sont susceptibles d'être interprétées dans une interprétation ordinale de la numération</u>

Mais nous ne devons pas oublier que les décompositions que nous venons de considérer sont une façon de rationnaliser des règles d'énonciation. En particulier nous n'avons pour l'instant considéré que des principes arithmétiques. Or la description donnée ne met-elle pas en évidence une construction de proche en proche dans laquelle l'aspect ordinal est prépondérant ? Nous nous posons la question de savoir en quoi une analyse des representamens en tant que repérants est possible : cela mène vers une interprétation de la numération parlée en France en tant que numération ordinale (avec repérants).

2 Les analyses syntaxiques

Dans ce paragraphe, nous indiquons tout d'abord les éléments à partir desquels il va être possible de justifier les différentes interprétations que nous élaborons pour la numération

[55] Rappelons que dans la définition de Cauty, un appui multiplicatif est aussi nécessairement un appui additif.
[56] Rappelons qu'avec cette expression de « mise en representamen » nous faisons référence à la distinction que nous avons faite dans l'interprétant entre d'un côté les principes mathématiques (par exemple le développement d'un nombre selon une échelle de numération) et leur transcription dans tel ou tel système de système sémiotique (par exemple l'expression de ce développement dans une langue).

parlée en France. Il s'agit de mener trois analyses syntaxiques différentes qui permettent de structurer notre numération parlée selon trois modèles différents. Ces analyses permettent d'aboutir en particulier à un algorithme de construction des representamens de la numération. Dans le paragraphe 3, ce sont ces constructions qui sont ensuite considérées comme des modèles de système de numération (parlée) afin de déterminer différentes interprétations à la numération parlée en France.

2.1 Une analyse de la numération utilisant des appuis additifs et multiplicatifs

a. De la segmentation aux décompositions arithmétiques des nombres

Comme nous l'avons souligné, outre les nombrants qui désignent des nombres d'appui additifs ou multiplicatifs, nous devons déterminer des tronçons, des tranches, des segments qui structurent la lecture des noms des nombres afin de les interpréter comme composés arithmétiques. Dans l'ordre d'énonciation, on considère le segment de mot jusqu'au mot « milliard », « milliard » non compris (segment des milliards), puis le segment de mots entre le mot « milliard » et le mot « million » (segment des millions), puis le segment de mots entre le mot « million » et le mot « mille » (segment des mille), puis le segment de mots entre le mot « mille » et le mot « cent » (segment des cents), et enfin le segment de mots restants. Nous appelons les mots « cent », « mille », « million », « milliard » des <u>mots-segments</u>, ce sont des mots de base particuliers qui désignent des <u>nombres-segments</u>. Chaque segment va désigner un nombre, qui lorsqu'on le multiplie par le nombre-segment auquel il se réfère, désigne un nouveau nombre. Ainsi chaque nombre segment est un appui multiplicatif de la numération[57] et tout appui multiplicatif est un nombre segment. Le nombre désigné par l'ensemble est la somme des nombres désignés par chacun de ces nouveaux nombres (ce qui est cohérent avec la règle d'ordre d'énonciation pour désigner une somme, le plus grand avant le plus petit).

Prenons l'exemple de trois <u>**millions**</u> cinq cent quatre-vingt-un <u>**mille**</u> trois cent vingt-trois[58] et décrivons les règles pour chaque segment. Pour le segment de mots restant (« vingt-trois » dans notre exemple) le nombre est désigné par un mot de base ou bien constitué par concaténation d'au plus quatre mots de base. Excepté pour les nombres entre quatre-vingts et quatre-vingt-dix-neuf dont le cas est traité ultérieurement, une des deux règles d'énonciation déjà données nous indique que le segment est interprétable selon une décomposition additive. Ceci met en exergue les nombres d'appui additif désignés par les nombrants « vingt », « trente », « quarante », « cinquante », « soixante », auquel on a ajouté ici « quatre-vingts ». A noter que les mots de base « un », « deux », « trois », « quatre », « cinq », « six », « sept », « huit », « neuf », « dix », « onze », « douze », « treize », « quatorze », « quinze », « seize » ne désignent pas des appuis additifs (ni donc multiplicatif). Le segment des cents (« trois » dans notre exemple) est composé au maximum d'un mot de base parmi « deux », « trois », « quatre », « cinq », « six », « sept », « huit », « neuf ». Pour le segment des mille (« cinq cent quatre-vingt-un » dans notre exemple), l'ensemble des mots avant mille désigne un nombre entre deux et neuf cent quatre-vingt-dix-neuf. Cet ensemble est traité selon les règles décrites précédemment, c'est-à-dire dans le cas où seul « cent » peut segmenter le representamen : le segment restant « quatre-vingt-un » désigne quatre-vingts + un et le segment des cent

---

[57] Les définitions des appuis multiplicatifs et additifs ont été données auparavant et sont dues à Cauty. Rappelons simplement ici qu'un appui multiplicatif est toujours aussi un appui additif.

[58] Nous verrons ultérieurement que « cent » ne joue pas toujours le même rôle que les autres mots segments, ce qui va nous permettre entre autres de traiter à part les nombres entiers inférieurs à mille.

« cinq » associé à « cent » désigne cinq fois cent, l'ensemble désigne ainsi (cinq $\times$cent) + (quatre-vingts + un) (puisque cinq $\times$cent est supérieur à quatre-vingts + un).
Le processus est donc décrit de manière itérative dans le sens où l'on réutilise les principes permettant de désigner des nombres inférieurs à celui désigné par un mot-segment. Ensuite le principe d'énonciation s'applique avec cet ensemble de mots qui précède le mot « mille » et le mot « mille » lui-même : le plus petit précède le plus grand ce qui indique un produit des nombres désignés. Il en est de même pour le segment des millions et celui des milliards : on considère le groupe de mots du segment des millions (resp. des milliards), puis on considère l'assemblage constitué de cette désignation et celle du mot « million » (resp. « milliard »). A remarquer que les segments des mille, millions, milliards, etc. désignent toujours un nombre entre un et neuf cent quatre-vingt-dix-neuf.

Revenons sur le cas particulier des nombres de quatre-vingts à quatre-vingt-dix-neuf. On peut énoncer une règle comparable en segmentant la désignation du nombre entre d'un côté les mots « quatre » et « vingt », et d'un autre côté les mots qui suivent (comme ce qui a été fait pour la segmentation s'appuyant sur cent, mille, milliard). « Vingt » joue donc pour les nombres de quatre-vingts à quatre-vingt-dix-neuf le rôle d'un mot-segment. Le nombre désigné par vingt est donc aussi un nombre d'appui multiplicatif, avec la particularité de ne pouvoir être précédé que de « quatre » et d'être suivi des noms des dix-neuf premiers nombres, ou bien de n'être précédé de rien et suivi des noms des neuf premiers nombres (pour les nombres de vingt à vingt-neuf). Notons finalement que ce qui n'est pas énoncé ne doit pas être pris en compte. Le vide est ainsi l'élément neutre de l'addition, sauf dans deux cas particuliers : devant le mot segment « cent » et devant le mot segment « mille », l'absence de mot signifie un, élément neutre de la multiplication, et non pas l'élément neutre de l'addition, on ne dit pas un-cent, ni un mille, alors qu'on dit un million et un milliard.
Ainsi, en considérant à la fois des principes additifs et multiplicatifs[59] :
Quarante-trois est décomposé en quarante + trois
Quatre-vingt-un est décomposé en (quatre $\times$ **vingt**) + un (vingt joue le rôle de mot-segment pour les nombres de quatre-vingts à quatre-vingt-dix-neuf)
Trois cent vingt-trois est décomposé en (trois $\times$ **cent**) + (vingt + trois),
Cinq cent quatre-vingt-un est décomposé en [cinq $\times$ **cent**] + [(quatre $\times$ ***vingt***) + un]
Cinq cent quatre-vingt-un mille trois cent vingt-trois est décomposé en [[(cinq $\times$ ***cent***) + [(quatre $\times$ **vingt** + un)]] $\times$ **mille**] + [(trois $\times$ **cent)** + (vingt + trois)].
En gras sont indiqués les nombres-segments principaux, en italique et gras, les nombres-segments qui sont réemployés dans un des segments (des mille, million, etc.). Ainsi cent en italique indique qu'il est utilisé comme nombre-segment secondaire dans le segment des mille ou million ou milliard.

b. Un algorithme de construction

L'algorithme structurant la numération est alors le suivant :
Signification des nombres désignés par les mots de base : « un », « deux », « trois », « quatre », « cinq », « six », « sept », « huit », « neuf », « dix », « onze », « douze », « treize », « quatorze », « quinze », « seize », ainsi que « vingt », « trente », « quarante », « cinquante », « soixante », « cent », « mille », « million », « milliard ».
Règle d'ordre de prise en compte des mots : règles de découpage en segments de mots décrites ci-dessus. Les mots de base « cent », « mille », « milliard » ont un rôle particulier[60],

---

[59] Ici nous utiliserons le parenthésage et les symboles + et -, en cohérence avec l'interprétation arithmétique.
[60] Une sorte d'unité de comptage intermédiaire. A noter que les désignations moins usitées, comme par exemple douze-cent-quarante pour 1240, indiquent que cent peut être considéré comme une unité de comptage au même titre que mille. (cf. la thèse de Chambris, 2008).

ils sont pour cela appelés mots-segments et les nombres qu'ils désignent nombres-segments. Le mot de base « vingt » joue pour les nombres entre quatre-vingts et quatre-vingt-dix-neuf le rôle de mot-segment.
Deux règles d'opération entre un segment et le mot segment auquel il se réfère (segmentation principale et secondaire) ou bien à l'intérieur d'un segment :
- deux désignations accolées signifie faire la <u>somme</u> des nombres quand le nombre désigné en premier est plus grand que le second
- deux désignations accolées signifie faire le <u>produit</u> des nombres quand le nombre désigné en premier est plus petit que le second.

c. Bilan de l'analyse syntaxique

Nous obtenons une analyse syntaxique qui peut être décrite à l'aide des termes empruntés à Cauty.
<u>Le vocabulaire terminal</u> composé des mots de base est constitué des termes suivants qui sont tous des nombrants : « un », « deux », « trois », « quatre », « cinq », « six », « sept », « huit », « neuf », « dix », « onze », « douze », « treize », « quatorze », « quinze », « seize », ainsi que « vingt », « trente », « quarante », « cinquante », « soixante », « cent », « mille », « million », « milliard ». On peut ajouter le mot « et ».
<u>Une segmentation</u> est décrite à l'aide de mots-segments : « vingt », « cent », « mille », « million », « milliard ». Elle induit une hiérarchie en segments principaux (segment des cents, des mille, des millions, des milliards). Les segments des mille, million, milliard peuvent comporter une segmentation secondaire faisant intervenir le segment des cents ou/et des vingts. Cette hiérarchisation permet d'indiquer un système de parenthésage, jusqu'à la prise en compte de deux mots de base. Les mots-segments sont des appuis multiplicatifs et additifs.
Le tactème d'ordre permet d'indiquer l'opération en jeu entre deux representamens, selon le mode de prise en compte indiqué par le parenthésage.
Les autres appuis additifs sont désignés par : « dix », « trente », « quarante », « cinquante », « soixante ».
<u>Les appuis additifs se différencient</u> :
- « trente » , « quarante », « cinquante » peuvent être suivis de « un », « deux », « trois », « quatre », « cinq », « six », « sept », « huit » ou « neuf » ;
- « soixante » peut être suivi de « et un », « deux », « trois », « quatre », « cinq », « six », « sept », « huit », « neuf », « dix », « onze », « douze », « treize », « quatorze », « quinze », « seize », « dix-sept », « dix-huit », « dix-neuf » ;
- « dix » ne peut être suivi que de « sept », « huit », « neuf ».
Les appuis multiplicatifs sont désignés par les mots-segments : « vingt », « cent », « mille », « million », « milliard ».
<u>Les appuis multiplicatifs se différencient</u> :
- « vingt » est précédé de rien ou de « quatre ». Quand il est précédé de rien il peut être suivi de « un », « deux », « trois », « quatre », « cinq », « six », « sept », « huit » ou « neuf », ce qui fait de lui un appui additif comme « trente », « quarante », « cinquante ». Quand il est précédé de « quatre », il peut être suivi de « un », « deux », « trois », « quatre », « cinq », « six », « sept », « huit », « neuf », « dix », « onze », « douze », « treize », « quatorze », « quinze », « seize », « dix-sept », « dix-huit », « dix-neuf ».
- « cent » est précédé de rien ou de « deux », « trois », « quatre », « cinq », « six », « sept », « huit » ou « neuf ». Dans chaque cas il peut être suivi de n'importe quel nom de nombre entre un et quatre-vingt-dix-neuf.

- « mille » est précédé de rien ou de n'importe quel nom de nombre entre deux et neuf cent quatre-vingt-dix-neuf. Dans chaque cas il peut être suivi de n'importe quel nom de nombre entre un et neuf cent quatre-vingt-dix-neuf.
- « million » et « milliard » sont précédés de n'importe quel nom de nombre entre un et neuf cent quatre-vingt-dix-neuf. Dans chaque cas ils peuvent être suivis de n'importe quel nom de nombre entre un et neuf cent quatre-vingt-dix-neuf.

Nous retrouvons dans cette analyse des points communs à celle de Cauty (1986) de la numération parlée en France en tant que numération arithmétique avec appuis multiplicatifs, mais en étant parti d'une description ne mettant pas en jeu la numération chiffrée.

2.2 Une analyse de la numération utilisant des appuis additifs uniquement

a. Une autre structure pour d'autres décompositions arithmétiques

Pourquoi une segmentation qui utilise cent comme appui multiplicatif ? Des indices nous permettent de chercher si ce n'est une raison à ce choix, du moins une régularité mathématique autre qu'une justification par dix en tant que premier appui multiplicatif. Pour cette deuxième analyse, nous allons regarder plus particulièrement les désignations des nombres inférieurs à mille.

En ce qui concerne les nombres inférieurs à cent, revenons tout d'abord sur le cas particulier de « vingt » qui intervient dans les désignations des nombres de quatre-vingts à quatre-vingt-dix-neuf. « vingt » y apparaît comme un mot-segment désignant un appui multiplicatif « lacunaire ». Considérons maintenant le cas des nombres inférieurs à soixante, leur désignation peut être interprétée comme un appui sur des dizaines successives, repérées par les mots de base dix, vingt, trente, quarante, cinquante, soixante ainsi que sur une simple décomposition additive. Le cas des nombres entre soixante-dix et soixante-dix-neuf semble à la croisée de ces deux derniers principes : un appui sur la vingtaine (la troisième vingtaine) qui ne se traduit pas par l'utilisation du nombre d'appui multiplicatif désigné par vingt (ce qui aurait donné trois-vingts) mais par le mot nouveau « soixante » en cohérence avec l'énonciation de la suite des dizaines commencées par les cinq premières dizaines (un mot différent pour chaque dizaine).

Cette organisation est assez complexe et comporte des irrégularités. Il nous semble qu'elle peut se concevoir selon un autre principe que celui des mots-segments/appuis multiplicatifs en étendant les mots de base du vocabulaire terminal de la numération à un ensemble plus large, que nous dénommons <u>les mots de base additifs</u>. Pour éclairer notre propos nous allons revenir sur les décompositions possibles à partir des désignations.

A partir de vingt, des mots désignent les nombres de dix en dix et ceci jusqu'à soixante. Chaque mot désignant la dizaine est nouveau. Les nombres qui se trouvent entre les dizaines sont alors nommés en prononçant d'abord la dizaine inférieure puis le nom d'un des neuf premiers entiers : ceci peut être interprété comme une somme de deux termes dont un des deux termes est la dizaine inférieure. Pour les nombres entre soixante et quatre-vingts (respectivement entre quatre-vingts et cent), on peut y voir, à travers la concaténation du nom soixante (resp. quatre-vingts) et le nom désignant un des dix-neuf premiers entiers, une décomposition en somme de deux termes dont un des deux est soixante (resp. quatre-vingts). Soixante-dix et quatre-vingt-dix ne semblent donc pas jouer le même rôle que les autres dizaines du fait qu'ils ne servent pas de base à la décomposition en somme (on ne dit pas soixante-dix-un). Par contre, même si son representamen peut faire référence à une décomposition en produit, quatre-vingts, lui, joue ce rôle, un rôle analogue à soixante. Cent joue aussi ce rôle, le representamen « cent » désigne la dixième dizaine, ce n'est qu'à partir de cent dix qu'il n'y aura plus d'introduction de mot nouveau pour désigner la nième dizaine.

Faisons à nouveau un point pour les nombres inférieurs à cent neuf, en considérant le nombre de mots de base utilisés :
- De un à seize, ainsi que vingt, trente, quarante, cinquante, soixante, cent : un mot par nombre (un mot de base de la numération), il n'y a pas de décomposition.
- Pour les nombres : dix-sept, dix-huit, dix-neuf, vingt-et-un à vingt-neuf, trente-et-un à trente-neuf, quarante-et-un à quarante-neuf, cinquante-et-un à cinquante-neuf, soixante-et-un à soixante-seize, deux mots de base de la numération accolés, celui désignant le plus grand précède celui désignant le plus petit, ce qui peut s'interpréter par une décomposition en une somme. Chaque terme de la somme est un nombre qui a été désigné par un mot de base[61].
- Pour quatre-vingts : deux mots de base sont accolés, celui désignant le plus petit nombre en premier, ce qui peut s'interpréter par une décomposition en produit ou bien, nous le verrons, le numéro de la vingtaine.
- Pour les nombres de quatre-vingt-un à quatre-vingt-dix-neuf et de soixante-dix-sept à soixante-dix-neuf : trois ou quatre mots de base sont accolés, leur ordre d'énonciation peut permettre d'interpréter des opérations.

Continuons notre exploration. Cent est la dernière dizaine dans la suite arithmétique de raison dix à être désignée par un seul mot de base. Dans une perspective de décomposition uniquement additive, les dizaines qui suivent sont désignées par un nom composé. Ceci donne la possibilité de lire dans le nom d'un nombre supérieur à cent une décomposition additive qui se fait non pas à partir d'une dizaine inférieure (cent vingt-huit = cent vingt + huit) mais à partir de la centaine inférieure (cent vingt-huit = cent + vingt-huit). En d'autres termes, puisque les désignations des nombres entre un et quatre-vingt-dix-neuf ont été déjà élaborées, le rôle joué par la dizaine pour les nombres inférieurs à cent peut être joué par la centaine pour les nombres entre cent et neuf cent quatre-vingt-dix-neuf. La désignation d'un nombre comme trois cents vingt-huit peut donc s'appuyer sur la décomposition en une somme dont le premier terme est la centaine inférieure trois cent vingt-huit = trois cents + vingt-huit : la décomposition n'est donc plus lue sous la forme trois $\times$ cent + vingt-huit. Autrement dit, trois cents peut être perçu comme la somme (deux cents) + cent, comme trente la somme vingt + dix. Tout comme il n'est pas obligatoire d'interpréter trente comme trois $\times$ dix ou encore soixante-dix comme sept $\times$ dix, nous n'interprétons pas trois cents comme trois $\times$ cent. Nous notons cependant que chaque centaine entre deux cents et neuf cents est numérotée, mais nous n'utilisons pas l'interprétation de cette numérotation en termes de produit. Par ailleurs, si le pluriel orthographique plaide en faveur d'une interprétation multiplicative, il ne s'entend pas, ce qui légitime d'en rechercher une autre.

C'est pourquoi, nous sommes amenés à considérer non pas les mots de base précités, mais <u>des mots de base additifs</u>, c'est-à-dire des representamens qui jouent le même rôle que les mots de base dans une perspective de décomposition additive uniquement : dix, vingt, trente, quarante, cinquante, soixante, quatre-vingts, cent, deux cents, trois cents, quatre cents, cinq cents, six cents, sept cents, huit cents, neuf cents. Quatre-vingt-dix et soixante-dix sont des candidats particuliers que nous devons étudier : en Belgique ou en Suisse, leur nom est nonante et septante, pour quatre-vingts c'est octante ou huitante.

[61] La présence du mot « et » sera étudiée ultérieurement.

b. Un autre algorithme de construction

Nous obtenons ainsi une autre description des régularités et irrégularités. Ainsi par exemple tous les nombres inférieurs à cent suivent la même règle de désignation orale : le nom de la dizaine inférieure pour les nombres inférieurs à soixante (resp. la vingtaine inférieure pour les nombres entiers de l'intervalle [[soixante ; cent]]) suivi du nom d'un nombre entre un et neuf (resp. le nom d'un nombre entier entre un et dix-neuf). A partir de cent, tous les nombres suivent aussi la même règle : le nom de la centaine inférieure suivi du nom du nombre d'un entier entre un et quatre-vingt-dix-neuf.

Ceci mène à considérer d'autres principes d'énonciation que ceux indiqués précédemment afin de comprendre la désignation d'un nombre.

- connaissance des nombres désignés par les noms de base additifs (et non pas seulement les mots du vocabulaire terminal de la numération),
- règles d'énonciation : accoler deux noms de base additifs signifie faire la somme des nombres désignés,
- règle de maximalité : les décompositions emploient systématiquement les nombres correspondant aux nombres de base les plus grands, ainsi deux cent cent vingt-huit n'est pas un nom de nombre, mais trois cent vingt-huit en est un,
- règle de distinction des mots de base : ils sont énoncés toujours dans l'ordre décroissant des nombres qu'ils désignent : ainsi on dit trois cent vingt-huit et non pas vingt-huit-trois-cent.

c. Bilan de l'analyse syntaxique

Avec les termes empruntés à Cauty, nous obtenons l'analyse syntaxique suivante :

<u>Le vocabulaire terminal</u> étendu est composé des mots de base additifs suivants qui sont tous des nombrants : « un », « deux », « trois », « quatre », « cinq », « six », « sept », « huit », « neuf », « dix », « onze », « douze », « treize », « quatorze », « quinze », « seize », ainsi que « vingt », « trente », « quarante », « cinquante », « soixante », « quatre-vingts », « cent », « deux cents », « trois cents », « quatre cents », « cinq cents », « six cents », « sept cents », « huit cents », « neuf cents ». On peut ajouter le mot « et ».

Tous les nombres désignés par les mots de base additifs sont des appuis additifs : une concaténation de ceux-ci indique une addition.

<u>Les appuis additifs se différencient</u> :

- « dix » ne peut être suivi que de « sept », « huit », « neuf » ;
- « vingt », « trente » , « quarante », « cinquante » peuvent être suivi de « et un », « deux », « trois », « quatre », « cinq », « six », « sept », « huit » ou « neuf » ;
- « soixante » peut être suivi de « et un », « deux », « trois », « quatre », « cinq », « six », « sept », « huit », « neuf », « dix », « et onze », « douze », « treize », « quatorze », « quinze », « seize », « dix-sept », « dix-huit », « dix-neuf ».
- « quatre-vingts » peut être suivi de « un », « deux », « trois », « quatre », « cinq », « six », « sept », « huit », « neuf », « dix », « onze », « douze », « treize », « quatorze », « quinze », « seize », « dix-sept », « dix-huit », « dix-neuf ».
- « cent », « deux cents », « trois cents », « quatre cents », « cinq cents », « six cents », « sept cents », « huit cents », « neuf cents » peuvent être suivis de n'importe quel nom de nombre entre un et quatre-vingt-dix-neuf.

A remarquer qu'alors il n'y a plus besoin théoriquement de segmentation (indiquant un parenthèsage) et de tactème d'ordre puisque la seule opération en jeu est l'addition et qu'elle est commutative. Cependant, lorsqu'il va s'agir d'énoncer un nombre, un ordre peut sembler nécessaire pour des raisons de non confusion dans les concaténations : trois cents et cent trois par exemple. Cependant, il est possible de considérer dans les codes langagiers oraux trois cents comme un nom non décomposable, la même phonétique que « troissan ».

Nous voyons que ces principes nous permettent de nous abstraire de la multiplication, seules des décompositions additives sont convoquées. A noter qu'ici nous nous sommes restreint aux nombres inférieurs à mille, bien qu'il soit théoriquement possible d'aller au-delà. Cependant, l'hypothèse d'une numération additive nous semble plus difficile à envisager. En effet, les appuis candidats seraient mille, deux mille, … puis dix mille, onze mille, …, cent mille, etc. Il nous semble difficile de ne pas considérer que mille est un appui multiplicatif.

2.3 Une analyse de la numération utilisant des repérants ordinaux

a. Des arguments en faveur des repérants

A la différence des autres, l'analyse que nous allons faire est moins fréquente, par exemple ni Cauty, ni Guitel, ni Ifrah ne l'envisagent pour la numération en langue française. Cependant, même si elle ne se fait pas nécessairement sous l'angle linguistique ou historique, elle est familière aux didacticiens qui étudient les premiers pas des élèves dans l'utilisation de la numération parlée en France à travers la comptine numérique. En outre, une certaine proximité avec l'analyse précédente pourrait la faire apparaître comme une variante de cette dernière. Pour nous, il n'en est rien. Pour étayer notre thèse, rappelons ce que Cauty entend par numération ordinale. C'est une numération dont la construction s'est faite principalement en regard de son utilité en tant que compteur. Ainsi, il n'y est pas privilégié les aspects arithmétiques, mais l'élaboration d'une succession de representamens (ici oraux), a priori indépendants les uns des autres, qui vont servir de compteur. Ceci entraîne une construction, de proche en proche, qui n'est pas sans rappeler la construction de Peano des nombres entiers. La comparaison peut être poursuivie du fait que l'aspect cardinal est d'une certaine manière second, comme une conséquence de l'aspect ordinal : c'est précisément l'utilisation de la chaîne immuable des representamens oraux qui permet d'accéder à la désignation du cardinal d'une collection, via le dernier nom énoncé. Avant de décrire les éléments qui permettent d'envisager une analyse de la numération parlée en France en tant que numération ordinale, c'est-à-dire principalement la donnée des representamens qui vont servir de repérant, nous allons donner des arguments qui indiquent en quoi cette interprétation est envisageable et peut répondre à certaines questions qui ont émergé dans les analyses précédentes.
Tout d'abord, l'adoption d'un ordre d'énonciation, que ce soit dans l'interprétation additive ou multiplicative, a pour conséquence que la commutativité des opérations n'est pas traduite dans les interprétants. On ne dit pas trente-deux-cent mais cent trente-deux, ni cinq-quarante mais quarante-cinq. Ainsi les structures arithmétiques que l'on pourrait mettre en avant sont « incomplètes ». L'étude morphologique des representamens, montre que les noms des nombres jusqu'à dix au moins ne sont pas analysables : il semble qu'ils soient indépendants les uns des autres. Donc, au moins jusqu'à dix, l'hypothèse ordinale est attestée, la numération pouvant servir comme « compteur ». Si nous poursuivons, onze, douze, treize, quatorze, quinze, seize renforcent cette hypothèse ordinale. En effet, s'il est possible d'y voir des traces de dix et d'un representamen des nombres de un à six, le changement à dix-sept pose une question : pourquoi apparaît-il bien après dix ? Des hypothèses ont été faites quand nous nous sommes tourné vers l'origine latine de la numération parlée en français. Nous n'avons pas pu nécessairement y voir des concaténations, par exemple des noms comme « dix-un » éventuellement altérés. Ceci permet que les representamens des nombres jusqu'à seize puissent être interprétés comme poursuivant une logique purement ordinale. Remarquons en outre que l'analyse morphologique mène à une décomposition de type « un-dix » et non « dix-un », ce qui n'est plus le cas après dix-sept, ce qui renforce leur spécificité par rapport aux autres representamens
Par ailleurs, nous avons interprété pour l'instant la concaténation « vingt-et-un » comme vingt plus un ou (deux $\times$ dix) + un. « Vingt-et-un » comporte le mot de liaison « et » que nous

avons interprété pour l'instant en un signe +. Le dictionnaire historique de la langue française (1998) nous donne l'origine de ce mot : « *Réfection graphique étymologique (XII*[è] *s.) de e (842), est issu du latin et, conjonction de coordination utilisée pour unir deux mots ou deux phrases, pour exprimer l'opposition, le renforcement ; cette conjonction est fréquente en tête de phrases exclamatives ou interrogatives. Et est un mot d'origine indoeuropéenne, à rapprocher du grec eti « de plus, encore », du gaulois etic « et », du sanskrit ati « au-delà », ce qui semble être le sens initial de cette famille de mots*. ». Ainsi, « et » a, à l'origine, le sens de au-delà et non le sens additif de l'arithmétique. Dans le même dictionnaire, nous notons : « *La conjonction française conserve ces valeurs [...] , (il) s'ajoute au terme d'une énumération pour mettre en évidence un processus* ». Il est donc tout à fait possible d'interpréter « vingt-et-un » comme un au-delà de vingt, comme la reprise d'une énumération après avoir atteint une première étape, « vingt ». Le dictionnaire ajoute « Et a servi autrefois, dans les nombres composés, à joindre les unités au mot dix (dix et sept, remplacé par dix-sept) ». Il est ainsi possible d'interpréter d'autres representamens comme « quarante-sept » venant de « quarante-et-sept » en tant que « sept au-delà de quarante ». Dans le même esprit, « vingt », « trente », « quarante », « cinquante », « soixante », gardent des traces de deux, trois, quatre, cinq, six. Nous l'avons interprété comme « deux fois dix », …, « six fois dix » dans la première interprétation, mais nous avons souligné que pour la deuxième interprétation avancée, celle utilisant les nombres d'appui additifs, il est possible d'y voir une numérotation des dizaines (cf. annexe). Ainsi, est-il permis aussi de le considérer comme le marquage de la succession des dizaines, la deuxième, la troisième etc., et non l'obtention successive des dizaines par ajout de dix. Nous notons cependant une différence entre la formation linguistique des representamens de la suite des centaines (simple juxtaposition de « cent » et de ce que nous proposons d'interpréter comme le numéro de la centaine) et celle de la suite des dizaines. Pour aller dans le sens d'une interprétation ordinale, nous pouvons formuler l'hypothèse que l'accent est mis dans les deux suites, non pas sur le rang ou le nombre de dizaines auquel se réfère par exemple « quarante » (c'est la quatrième dizaine ou il y a quatre dizaines), mais sur le fait de placer le nom de dizaine (et aussi celui de la centaine) parmi la suite des dizaines « dix », « vingt », « trente », etc., dans l'ordre d'énonciation établi (quarante c'est après trente et avant cinquante). Remarquons cependant qu'alors « soixante-dix », « quatre-vingts », « quatre-vingt-dix », et plus encore cent ne permettent pas de se situer dans cette suite par des indices sur la composition de leur representamen.

Nous avons indiqué dans les lignes qui précèdent différents facteurs contribuant à motiver une interprétation ordinale de la numération parlée en français. Afin de nous permettre dans un deuxième temps de définir les principes généraux d'une numération arithmétique avec repérants, nous allons indiquer dans ce qui suit quels sont les representamens qui peuvent nous servir comme repérants dans notre description. Nous revenons pour ce faire tout d'abord sur la définition de repérant et plus généralement sur la notion de numération ordinale.

b. La numération ordinale

Une numération ordinale est caractérisée par le fait que « *l'expression du nombre est in-analysable en termes d'opérations arithmétiques et que ces expressions ne peuvent être dites refléter des processus conceptuels de nature arithmétique* », Cauty (1984). Il précise en outre que « *les opérations conceptuelles du sujet énonciateur sont décrites dans le cadre de la topologie (relation d'ordre) ce qui permet d'introduire et de contrôler des notions comme le repérage sur une échelle, le franchissement d'une limite, la successivité, et d'initialiser le processus de la construction du système des représentations des phénomènes de comptage* ». De plus pour préciser ce qu'il entend par numération ordinale, Cauty introduit la notion de comptine et de comptage, dont nous avons déjà parlé dans notre travail. Rappelons qu'une

comptine est « *une liste (conventionnelle ou idiosyncrasique, parlée, écrite ou mimée) ayant la propriété que tous les items de la liste apparaissent dans un ordre strict et immuable* », Cauty (1984). Dans notre travail une comptine sera toujours orale et donc nous appelons compteur ce que Cauty nomme comptine. Le comptage est alors « *une opération qui consiste à mettre en correspondance les termes d'une comptine*[62] *et les éléments d'un ensemble dans le but d'en déterminer le nombre d'éléments (le cardinal)* ». Le comptage « *implique qu'il y ait désignation - sans répétition ni omission - des éléments de l'ensemble par les items de la comptine, et que le dernier item énoncé soit utilisé comme une désignation du cardinal de l'ensemble* ».
Le principe ordinal est lié intrinsèquement à l'élaboration d'une liste d'items qui sert en tant que comptine comme instrument de comptage. Comment se traduit-il dans les representamens ? Nous reprenons la notion de repérant due à Cauty, en la traduisant dans notre terminologie. Un repérant est ainsi un representamen ayant une valeur numérique ordinale, que l'on n'interprète pas en termes de successeur[63], et qui sert à interpréter une numération dans une vision ordinale. Par exemple « vingt » peut être considéré comme un repérant car il peut indiquer un nombre atteint après la comptine de un à dix-neuf, il n'a pas de lien explicite avec son prédécesseur[64] et il peut permettre d'interpréter « vingt-quatre » comme le quatrième après vingt. Le principe général d'une numération ordinale avec repérant est alors de permettre à la numération de rendre compte de la succession des nombres entre deux repérants. Ainsi, deux repérants ne désignent pas deux nombres successifs, ils sont des éléments d'une graduation non unitaire. Deux principes peuvent être convoqués pour désigner un nombre à partir d'un repérant : un principe de postériorité, « un après trente », ou un principe d'antériorité, « neuf avant quarante ». Cauty (1986) introduit alors l'idée de divisions qui sont des éléments d'une graduation unitaire, c'est-à-dire de la suite ordonnée des premiers nombres. Ces divisions seront les moyens d'indiquer la succession des nombres entre deux repérants. Ils servent de comptine numérique que ce soit dans un principe d'antériorité ou de postériorité. Comme le mot division nous semble ambivalent, nous introduisons le mot de comptant. Une suite de comptants est donc une suite de representamens qui servent comme comptine pour désigner les nombres entre deux repérants.
Nous allons considérer qu'un representamen comme « quarante » est un repérant, bien qu'il soit possible d'y voir un lien de succession avec trente, du fait du lien entre trois et quatre dans la succession des nombres. Mais ici quarante n'est pas le successeur immédiat de trente : le lien n'est pas du même ordre qu'entre trente et trente-et-un. Nous allons donc interpréter quarante comme le successeur de trente dans la suite des repérants, du fait qu'il vient à sa suite dans l'ordre des nombres et que l'on peut l'atteindre à partir de trente avec la suite des comptants « un », « deux », « trois », « quatre », « cinq », « six », « sept », « huit », « neuf ».

c. Bilan de l'analyse syntaxique

Pour les nombres inférieurs à cent, avec les notions décrites précédemment, nous pouvons faire l'analyse syntaxique suivante :
Le vocabulaire terminal de la numération, jusqu'à mille exclu, est constitué des mots de base suivants rangés dans l'ordre croissant : « un », « deux », « trois », « quatre », « cinq », « six », « sept », « huit », « neuf », « dix », « onze », « douze », « treize », « quatorze », « quinze »,

[62] Ou d'un « compteur » pour nous.
[63] Successeur pour une numération ordinale utilisant un principe de postériorité (par exemple neuf après le repérant dix, ce qui donne en français dix-neuf) et prédécesseur, pour une numération ordinale utilisant un principe d'antériorité (par exemple un avant le repérant vingt, qui a donné le latin undeviginti). Ces principes sont repris ultérieurement.
[64] Il n'est pas interprétable comme le successeur de dix-neuf.

« seize », ainsi que « vingt », « trente », « quarante », « cinquante », « soixante », « quatre-vingts », « cent ». On peut ajouter le mot « et ».
Le premier mot énoncé est toujours un repérant, il est concaténé à un comptant. C'est le principe de postériorité qui est toujours utilisé.
<u>Les repérants</u> sont : « vingt », « trente », « quarante », « cinquante », « soixante », « quatre-vingts », « cent »
<u>Les comptants</u> sont : « un », « deux », « trois », « quatre », « cinq », « six », « sept », « huit », « neuf », « dix », « onze », « douze », « treize », « quatorze », « quinze », « seize », « dix-sept », « dix-huit », « dix-neuf ».
<u>Les comptants se différencient</u> :
- Suivant l'interprétation choisie, la suite des comptants « un », « deux », « trois », « quatre », « cinq », « six », « sept », « huit », « neuf » ou « un », « deux », « trois », « quatre », « cinq », « six », « sept », « huit », « neuf », « dix », « onze », « douze », « treize », « quatorze », « quinze », « seize », « dix-sept », « dix-huit », « dix-neuf » permet d'atteindre le premier repérant « dix » ou le premier repérant « vingt ».
- « un », « deux », « trois », « quatre », « cinq », « six », « sept », « huit », « neuf », ne sont pas morphologiquement décomposables : ils sont utilisés comme comptants entre les repérants désignés par vingt, trente, quarante, cinquante, soixante.
- « onze », « douze », « treize », « quatorze », « quinze », « seize », peuvent être analysés comme une concaténation altérée de « dix » et du representamen d'un des six premiers nombres. Avec cette hypothèse « dix » acquiert un statut de repérant utilisé pour les nombres entre dix et vingt.
- « dix-sept », « dix-huit », « dix-neuf » sont des concaténations mettant en jeu le repérant dix.
- « un », « deux », « trois », « quatre », « cinq », « six », « sept », « huit », « neuf », « dix », « onze », « douze », « treize », « quatorze », « quinze », « seize », « dix-sept », « dix-huit », « dix-neuf » sont des comptants utilisés entre les repérants soixante, quatre-vingts, cent.
- Les repérants se différencient :
- « vingt », « trente », « quarante », « cinquante » sont des repérants entre lesquels sont utilisés la suite de comptants « un », « deux », « trois », « quatre », « cinq », « six », « sept », « huit », « neuf ».
- « soixante », « quatre-vingts », « cent » sont des repérants entre lesquels est utilisée la suite de comptants « un », « deux », « trois », « quatre », « cinq », « six », « sept », « huit », « neuf », « dix », « onze », « douze », « treize », « quatorze », « quinze », « seize », « dix-sept », « dix-huit », « dix-neuf ».
- « dix » est un repérant qui est utilisé pour désigner les trois nombres avant le repérant « vingt ».
- Dans l'hypothèse d'une interprétation de « onze », « douze », « treize », « quatorze », « quinze », « seize » avec le repérant dix, dix est alors un repérant de même nature que « vingt », « trente », « quarante », « cinquante », c'est-à-dire qui est utilisé avec les comptants un », « deux », « trois », « quatre », « cinq », « six », « sept », « huit », « neuf »
- « dix » est le seul à pouvoir être et repérant et comptant.

Ainsi, pour les nombres inférieurs à cent, il n'y a plus besoin ni de segmentation (indiquant un parenthésage), mais d'une suite ordonnée de comptants, ni de tactème d'ordre puisque les comptants sont toujours inférieurs aux repérants.
Pour une extension au-delà de cent, théoriquement, il est possible de considérer que cent, deux cents, trois cents, quatre cents, cinq cents, six cents, sept cents, huit cents, neuf cents, mille sont des repérants. Les comptants sont alors les representamens des nombres entre un et quatre-vingt-dix-neuf. Le processus peut se poursuivre théoriquement au-delà. Notons alors que, du fait de la morphologie des repérants, lorsqu'il va s'agir d'énoncer un nombre, un

ordre peut sembler nécessaire pour des raisons de non confusion dans les concaténations : trois cents et cent trois par exemple. Comme pour la numération arithmétique additive, il est possible de considérer dans les codes langagiers oraux trois cents comme un nom non décomposable, la même phonétique que « troissan ». Cependant, pour ces raisons et du fait de l'emploi d'une comptine « longue », l'hypothèse d'une numération ordinale nous semble plus difficile à tenir pour les nombres supérieurs à cent[65] (et plus encore pour les nombres supérieurs à mille).
C'est pourquoi, nous centrons principalement la suite de notre étude sur des nombres inférieurs à cent. La description faite ci-avant laisse envisager plusieurs possibilités dans le choix des repérants et comptants. D'une manière générale nous retrouvons les options dégagées dans l'analyse précédente. Nous nous attacherons essentiellement alors dans la suite à indiquer quelles sont les différences.

Nous allons maintenant voir quels principes mathématiques sous-jacents permettent de rendre opérationnel ces principes de désignation.

3 Les interprétations

A la suite de ce qui précède, il nous faut étudier les choix faits dans la numération parlée en France. Quels sont-ils ? Y a-t-il plusieurs options ? En quoi sont-ils mathématiquement nécessaires ?
Rappelons que nous employons le mot interprétation pour mettre en avant le fait que celle-ci est une construction du chercheur. En outre, nous utilisons le mot interprétant dans une acception relativement naïve de la sémiotique de Peirce, c'est-à-dire sans utiliser toutes les ressources que celle-ci comporte. C'est pourquoi nous préférons ne pas employer le mot interprétant dans la formulation du résultat de nos recherches. Cependant, comme dans l'analyse de la numération chiffrée, nous distinguons dans l'interprétant les principes mathématiques du choix des representamens, ici en langue française. Dans ce paragraphe, nous indiquons trois interprétations différentes qui font écho aux trois analyses syntaxiques précédentes. Ces interprétations comportent deux parties : tout d'abord la première partie de l'interprétant, les éléments plus particulièrement mathématiques (§3.1), ensuite la deuxième partie, le choix des representamens (§3.2).
Pour les deux premières interprétations, nous avons choisi de mettre en annexe certains éléments qui précisent nos analyses afin de ne pas alourdir la lecture et mettre ainsi en relief les points essentiels. Ainsi, les annexes détaillent le processus de définition des principes mathématiques, indiquent des algorithmes qui permettent de construire les representamens à partir de ces principes et donne un éclairage sur les choix des appuis/appuyants

3.1 La première partie de l'interprétant

Nous allons voir quels principes mathématiques sous-jacents nous permettent de rendre opérationnels les principes de désignation dégagés dans les analyses syntaxiques du paragraphe 2. L'élaboration des définitions des types de numération se fonde en particulier sur les principes d'exhaustivité (tous les entiers doivent pouvoir avoir un nom), de non redondance (un entier n'a qu'un seul nom) et de non ambiguïté (un nom ne désigne qu'un seul nombre) auxquels doit se conformer *a minima* une numération. A titre indicatif, nous indiquons ici aussi les choix faits dans la numération parlée en France en ce qui concerne les

[65] D'ailleurs l'orthographe, deux cents, trois cents, etc. (le « s » pris par cent) peut aller dans le sens du cardinal et non de l'ordinal.

appuis ou repérants. Leur étude fait partie de la deuxième partie de l'interprétant qui est entreprise dans le paragraphe 3.2 (et complétée en annexe).

Nous adoptons la convention suivante : le representamen est noté en italique, par exemple $p_i(n)$, le nombre qu'il désigne ne l'est pas, par exemple $\mathrm{p_i(n)}$.

a. L'interprétation arithmétique multiplicative

Les principes

En considérant l'analyse syntaxique précédente, nous posons que le principe général constitutif d'une numération arithmétique avec appui multiplicatif qui permet de relier un nombre à son representamen est le suivant :

Soit la suite $(\mathrm{M_n})$, n entier strictement positif, la suite croissante de ces nombres d'appui multiplicatif. A chacun, on associe la suite croissante des appuyants multiplicatifs $(\mathrm{p_i(n)})$ et la suite croissante des appuyants additifs $(\mathrm{s_j(n)})$ de sorte que la concaténation $p_i(n)\ M_n\ s_j(n)$ ou bien la concaténation $s_j(n)\ M_n\ p_i(n)$ désigne le nombre $\mathrm{p_i(n) \times M_n + s_j(n)}$.

Pour fixer les idées, prenons l'exemple de l'appui multiplicatif désigné par cent dans notre numération parlée en France. Ses appuyants multiplicatifs sont les nombres de un à neuf, tandis que ses appuyants additifs sont les nombres de zéro à quatre-vingt-dix-neuf[66]. Ce principe seul n'assure pas une non ambiguïté, une exhaustivité et une non redondance au système. Notre méthode va consister à chercher quels sont les principes mathématiques qui rendent non ambigu, non redondant et exhaustive le système de désignation d'un nombre. Ceci va nous amener en particulier à pouvoir ensuite questionner les choix des nombres d'appui additifs et multiplicatifs faits en français. Le respect de ces trois principes impose des contraintes. Cette étude est donnée en annexe. Elle conduit à ajouter à l'encadré précédent les règles suivantes qui permettent de définir une numération arithmétique avec appuis multiplicatifs :

Les appuis et appuyants doivent vérifier :

(1) La suite $(\mathrm{s_j(n)})$ est constituée des entiers naturels de 1 à $\mathrm{M_n}$- 1. On note s(n) sont maximum.

(2) Pour tout n, les nombres $\mathrm{p_i(n)}$ sont en nombre fini, ils peuvent être rangés selon une progression arithmétique de raison un à partir de un. On note p(n) son maximum.

(3) p(n), le maximum de la suite $(\mathrm{p_i(n)})$ est tel que $\mathrm{M_{n+1} = (p(n)+1) \times M_n}$.

(4) Les representamens M_n des nombres $\mathrm{M_n}$ ainsi que les representamens $s_j(1)$ sont définis de manière conventionnelle et non redondante.

(5) Principes de récurrence :

- comme $\mathrm{s_j(n)}$ est strictement inférieur à $\mathrm{M_n}$, il sera obtenu via une décomposition analysable en terme de division euclidienne de $\mathrm{s_j(n)}$ par un appui multiplicatif strictement inférieur à $\mathrm{M_n}$. Le procédé de concaténation est appliqué alors pour obtenir $s_j(n)$.
- en imposant de plus l'inégalité $\mathrm{p_i(n) \leq M_n}$ les representamens $p_1(n)$ des nombres $\mathrm{p_1(n)}$ peuvent aux aussi être définis par un procédé identique au précédent.

[66] Nous avons déjà signalé que l'absence de representamen accolé à cent signifiait tantôt un (appuyant multiplicatif), tantôt zéro (appuyant additif).

Cet ensemble, l'encadré et les cinq règles, définissent dans le cadre de cette thèse une numération arithmétique avec appuis multiplicatifs, que nous nommerons parfois de manière plus courte « numération arithmétique multiplicative ». Les trois premières règles permettent au système d'être exhaustif et non ambigu, elles reviennent à choisir la division euclidienne, ce choix est commenté en annexe. La quatrième permet d'amorcer un procédé de définition des désignations des nombres de proche en proche. La cinquième indique comment obtenir les appuyants de chaque appui multiplicatif. A noter cependant que pour les appuyants additifs d'un certain appui multiplicatif M_n, le fait de décrire tous les entiers de 1 à M_n entraîne que leur representamen a déjà été défini par le système de numération. Il n'en est pas de même pour les appuyants multiplicatifs $p_i(n)$. En effet, l'inégalité $p_i(n) \le M_n$ n'est imposée que pour ne pas avoir à introduire de nouveaux representamens qui pourraient alors être en concurrence avec ceux introduits ultérieurement par le système, menant à une redondance de la numération. Par ailleurs, rien n'oblige à ce que $p_i(n)$ décrivent les entiers de 1 à M_{n-1} comme pour les appuyants additifs : la suite peut s'arrêter avant.

Comparaison avec une échelle de numération

Les règles (4) et (5) permettent de décrire l'algorithme sur lequel s'appuie la mise en signe[67]. Elles mettent en avant une élaboration du système nécessairement de proche en proche, en partant des premiers nombres. Les intervalles de nombre qui doivent être définis sont successivement inclus dans: [[1 ; M_1]][68], [[1; M_2]], …, [[1 ; M_n]], sachant que $M_{n+1} \le M_n{}^2$. L'élaboration de l'égalité permettant la mise en signes d'un nombre x se fait par récurrence à partir du reste de la division euclidienne de x par le plus grand nombre d'appui multiplicatif qui lui est inférieur : on établit l'égalité traduisant la division euclidienne de ce reste par le plus grand nombre d'appui multiplicatif qui lui est inférieur et ainsi de suite. On obtient alors les égalités :

$x = q_{x1}\,M_{x1} + r_{x1}$, puis $r_{x1} = q_{x2}\,M_{x2} + r_{x2}$ etc. On obtient finalement $x = \sum_{i=1}^{n} q_{xi}M_{xi} + r_{xn}$, avec la condition ($\alpha$) $q_{xi} < M_{xi}$ et $r_{x1} < M_{xn}$. Cette égalité est à rapprocher de l'égalité obtenue par l'échelle de numération $x = \sum_{i=0}^{n} x_i M_i$, en posant $M_0 = 1$, avec la condition $x_i < M_i$.

Elles sont mathématiquement équivalentes, cependant notons que pour être une suite de nombres d'appuis multiplicatifs, l'échelle de numération doit remplir les conditions supplémentaires suivantes : $M_{n+1} \le M_n{}^2$ et M_{n+1} multiple de M_n. Ceci justifie *a posteriori* le fait de ne pas être parti de la théorie des langages pour définir des modèles pour les numérations parlées : nous n'aurions pas pu envisager ces deux relations entre les appuis multiplicatifs comme inhérentes à une numération parlée.

Indication des choix pour la numération parlée en France

1^er^ choix : M_1 désigné par cent, M_2 par mille, M_3 par million, M_4 par milliard.

2^ème^ choix : M_1 désigné par dix, M_2 par cent, M_3 par mille, M_4 par million et M_5 par milliard.

Ces choix sont discutés dans le paragraphe 3.2 concernant la deuxième partie de l'interprétant.

[67] Un algorithme de construction associé qui éclaire cette mise en signes est indiqué en annexe.

[68] Rappelons qu'on note [[a, b]], les nombres entiers de l'intervalle [a, b].

b. L'interprétation arithmétique additive

Nous donnerons deux descriptions pour l'interprétation arithmétique additive : la première choisit les principes les plus simples ; la seconde tente de plus de rendre compte de relations entre les appuis additifs qui sont décomposés en plusieurs suites.

Les principes (1ère description)

Voici la définition d'une numération arithmétique avec appuis additifs.

Soit la suite (A_n), n entier strictement positif, une suite croissante de nombres d'appui additif. A chacun, on associe la suite croissante des appuyants additifs ($s_j(n)$) de sorte que la concaténation $A_n\ s_j(n)$ [69] désigne le nombre $A_n + s_j(n)$.

(1) Pour tout n> 0, $A_{n+1} - A_n \leq A_n$, c'est-à-dire que $A_{n+1} \leq 2A_n$

Pour tout n> 0, $s_j(n)$ décrit tous les entiers de l'intervalle [[1 ; $A_{n+1} - A_n$ -1]].

Soit x un nombre entier quelconque, la décomposition additive est obtenue par soustraction entre x et A_k, A_k étant le plus grand nombre d'appui inférieur à x. On a donc x = $A_k + s_{j(x)}(k)$ et ainsi le representamen de x est $s_{j(x)}(k)\ A_k$.

Cet ensemble constitue les principes fondateurs qui définissent une numération arithmétique avec appuis additifs : c'est la première partie de l'interprétant. Son élaboration est justifiée grâce à nouveau aux principes de non redondance, d'exhaustivité et de non ambiguïté qui entraînent de respecter des contraintes. Elle est donnée en annexe et à sa suite nous donnons aussi un algorithme de construction qui permet de comprendre son fonctionnement.

Indication des choix pour la numération parlée en France

1er choix

Il s'agit du choix le plus « régulier » :

dix pour A_1 le premier appui additif, vingt pour A_2, trente pour A_3, quarante pour A_4, cinquante pour A_5, soixante pour A_6, soixante-dix (septante) pour A_7, quatre-vingts (octante, huitante)) pour A_8, quatre-vingt-dix (nonante) pour A_9, puis, cent, deux cents, trois cents, quatre cents, cinq cents, six cents, sept cents, huit cents, neuf cents, mille.

2ème choix

Pour les nombres inférieurs à mille et pour tenir compte de la rupture d'énonciation des dizaines après soixante, une deuxième possibilité nous est offerte pour notre système de numération oral qui est plus cohérent avec la numération parlée en France.

On obtient dix pour A_1 le premier appui additif, vingt pour A_2, trente pour A_3, quarante pour A_4, cinquante pour A_5, soixante pour A_6, quatre-vingts pour A_7, puis, cent, deux cents, trois cents, quatre cents, cinq cents, six cents, sept cents, huit cents, neuf cents, mille.

3ème choix

Ici, nous prenons en compte le fait que les nombres inférieurs à vingt peuvent constituer la première « vingtaine », vingtaine qui peut se retrouver à partir de soixante.

On obtient vingt pour A_1 le premier appui additif, trente pour A_2, quarante pour A_3, cinquante pour A_4, soixante pour A_5, quatre-vingts pour A_6, puis, cent, deux cents, trois cents, quatre cents, cinq cents, six cents, sept cents, huit cents, neuf cents, mille.

[69] Ou bien la concaténation $s_j(n)\ A_n$.

Un 4ème choix consiste à prendre pour appuis additifs la suite vingt, trente, quarante, cinquante, soixante, soixante-dix (septante), quatre-vingts (octante), quatre-vingt-dix (nonante), puis, cent, deux cents, trois cents, quatre cents, cinq cents, six cents, sept cents, huit cents, neuf cents, mille.

Les principes (2ème description)

Nous proposons maintenant une description d'une numération arithmétique avec appuis additifs qui va fournir un autre moyen d'analyser les choix faits en français pour les appuis et appuyants additifs (2ème partie de l'interprétant étudiée dans le paragraphe 3.2).

On considère la suite (A_i) des appuis additifs introduite pour définir la numération arithmétique additive comme composée de plusieurs suites (ou groupements) d'appui additifs avec les mêmes appuyants. L'idée vient de la possibilité de considérer dans la numération parlée en France l'appui A_1 (dix) et ses appuyants de un à neuf qui permettent d'obtenir les autres appuis de la même « famille » A_2, A_3, A_4, A_5 ; l'appui soixante (A_6) et ses appuyants de un à dix-neuf qui permettent d'obtenir l'autre appui de la même « famille » A_7 (quatre-vingts) ; l'appui A_8 (cent) et ses appuyants de un à quatre-vingt-dix-neuf qui permettent d'obtenir les autres appuis de la même « famille » A_9 (deux cents), A_{10} (trois cents), A_{11} (quatre cents) A_{12} (cinq cents), A_{13} (six cents), A_{14} (sept cents), A_{15} (huit cents), A_{16} (neuf cents). A partir d'une notion de groupement d'appui, nous allons dégager des principes généraux qui permettent de donner une définition d'une numération arithmétique additive équivalente à celle donnée précédemment.
Pour ce faire nous introduisons une suite de couples (G_k, n_k), k entier, G_k étant les groupements d'appui, que nous allons relier à la suite (A_i) des appuis additifs introduite pour définir la numération arithmétique additive.
Afin de mieux comprendre cette nouvelle description, nous allons l'élaborer en l'illustrant avec un des choix possible pour la numération parlée en France.

Description des principes avec les couples (G_k, n_k).

Nous utilisons la suite (G_k), qui génère les n_k appuis additifs G_k, $2G_k$, …, n_k G_k. Il est important de signaler que si nous les notons avec un produit, le representamen n'est pas *a priori* une concaténation des deux facteurs et n'est pas interprété ici comme un produit. La notation multiplicative est pour nous une économie d'écriture pour une numérotation de ces appuis. Nous allons indiquer un algorithme de construction du système de numération qui permet de donner la description avec les couples (G_k, n_k).

G_1 est le premier groupement d'appui utilisé pour décrire notre organisation des nombres. Le deuxième est $G_1 + G_1$ que nous notons $2G_1$, le suivant est $2G_1 + G_1$ que nous notons $3G_1$, etc., jusqu'à n_1 G_1 qui désigne ainsi le nombre $(n_1\text{-}1)G_1 + G_1$. n_1 est donc le nombre de fois que G_1 est additionné successivement (à partir e zéro).

Si on considère le couple d'entiers non nuls (G_1, n_1), $n_1 > 1$, on définit les representamens des nombres G_1, $2G_1$, $3G_1$, … , n_1 G_1 ainsi que ceux de l'intervalle [[1, G_1-1]] par des mots de base additifs désignant des appuis additifs et des appuyants additifs. G_1 est donc aussi un appui additif. Il suffit ensuite d'accoler les representamens de l'ensemble $\{G_1, 2G_1, 3G_1, \ldots$

, $(n_1\text{-}1)G_1\}$ à un representamen d'un nombre de l'intervalle [[1, G_1-1]] pour désigner (par additivité) n'importe quel nombre entier de l'intervalle [[1,n_1 G_1-1]]. Un des choix possible pour la numération parlée en France est de prendre dix pour G_1 et six pour n_1. Dix, vingt, trente, quarante, cinquante, soixante sont les representamens de G_1, $2G_1$, $3G_1$, … , $6G_1$. Ceux de l'intervalle [[1, G_1-1]] sont un, deux, trois, ..., neuf. On peut ainsi définir par concaténation les representamens des nombres jusqu'à cinquante-neuf (à des exceptions près, les concaténations étant plus ou moins altérées ou plus ou moins facilement identifiables par une analyse morphologique).
D'une manière générale, les premiers appuyants additifs sont : un, …,G_1-1,
et les premiers appuis additifs sont :
$A_{1.1}=G_1$, $A_{1.2}=2G_1$, $A_{1.3}=3G_1$, … , $A_{1.\,n_1-1}=(n_1\text{-}1)\,G_1$, $A_{1.\,n_1}=n_1\,G_1$
L'appui n_1 G_1 se distingue par le fait qu'il n'a pas nécessairement les mêmes appuyants que les appuis qui lui sont inférieurs. En effet à partir de ce nombre, c'est un nouveau groupement d'appui qui est utilisé, G_2, qui va être successivement additionné n_2 fois. On considère donc un deuxième couple d'entiers non nuls (G_2, n_2), $n_2>1$. On définit les representamens des appuis additifs $n_1\,G_1+G_2$, $(n_1\,G_1+G_2)+G_2$ noté $n_1\,G_1+2G_2$, … , $n_1\,G_1+n_2\,G_2$ par des mots de base additifs. Il suffit ensuite d'accoler (concaténation) un nom de base désignant un nombre de l'ensemble des appuis additifs $\{n_1\,G_1$, $n_1\,G_1+G_2$, $n_1\,G_1+2G_2$, $n_1\,G_1+3G_2$, … , $n_1\,G_1+(n_2\text{-}1)\,G_2\}$ à un nom désignant un nombre de [[1, G_2-1]] (la deuxième série d'appuyants additifs) pour désigner par additivité n'importe quel nombre de l'intervalle [[n_1 G_1, $n_1\,G_1+n_2\,G_2$-1]].
Pour poursuivre notre exemple, nous prenons vingt pour G_2 et deux pour n_2. Quatre-vingts et cent désignent les nouveaux appuis additifs $n_1\,G_1+G_2$ (soixante plus vingt) et $(n_1\,G_1+G_2)$+ G_2 (quatre-vingts plus vingt). Comme G_2 est inférieur à soixante(n_1 G_1, le plus grand appui obtenu avec G_1 uniquement dans la première boucle), on peut choisir pour les nombres de l'intervalle [[1, G_2-1]] les representamens déjà définis, c'est-à-dire un, eux, trois, ..., dix-neuf. On peut ainsi définir par concaténation les representamens des nombres jusqu'à quatre-vingt-dix-neuf (à des exceptions près, les concaténations étant plus ou moins altérées ou plus ou moins facilement identifiables par une analyse morphologique).
On obtient ainsi les n_2 nombres d'appui additif suivants :
$A_{2.1}=n_1\,G_1(=A_{1.\,n_1})$, $A_{2.2}=n_1\,G_1+G_2$, $A_{2.3}=n_1\,G_1+2G_2$, …, $A_{2.\,n_2-1}=n_1\,G_1+(n_2\text{-}1)\,G_2$, $A_{2.\,n_2}=n_1\,G_1+n_2\,G_2$.
Le deuxième couple d'entiers non nuls (G_2, n_2), $n_2>1$ sert à désigner des nombres que le premier algorithme n'a pas encore considérés, il prend le relais à partir de n_1 G_1. Cependant pour être viable, les nombres de [[1, G_2-1]] doivent déjà avoir été désignés. Ceci nous amène pour $A_{2.1}$ et $A_{2.2}$ à l'inégalité $n_1\,G_1+G_2\leq 2n_1\,G_1$, c'est-à-dire à $G_2\leq n_1\,G_1$. Par construction, (1) est alors vérifié pour tout couple $A_{2.\,i}$, $A_{2.\,i+1}$.
On obtient ainsi un procédé de description des entiers naturels à l'aide de couples d'entiers strictement supérieurs à 1, (G_k, n_k), tels que $G_k \leq \sum_{i=1}^{k-1} n_i G_i$, permettant de dénommer au fur

et à mesure les nombres des intervalles $I_1 = [[1,\ n_1\ G_1\text{-}1]]$ et $I_k\ = [[\sum_{i=1}^{k-1} n_i G_i\ ,\ -1+\sum_{i=1}^{k} n_i G_i\ ]]$, uniquement avec des principes additifs et des mots de base additifs. Ces intervalles forment une partition des entiers naturels non nuls. Leur amplitude est $n_k G_k$.

On obtient successivement les nombres d'appui additifs :

…

$A_{k.1} = A_{k\text{-}1.n_{k-1}}$, $A_{k.2} = A_{k\text{-}1.n_{k-1}} + G_k$, $A_{2.3} = A_{k\text{-}1.n_{k-1}} + 2\,G_k$, …, $A_{k.\,n_k} = A_{k\text{-}1.n_{k-1}} + n_k\ G_k$

….

L'inégalité $G_k\ \le \sum_{i=1}^{k-1} n_i G_i$ traduit sur les couples (G_k, n_k) ce que l'inégalité (1) indiquait pour les A_n (ici notés $A_{k.\,i}$).

Indication des choix exprimés avec les couples (G_k, n_k).

Le 1er choix

G_1 = dix, G_2 = cent, G_3 = mille, n_1 =dix et n_2 =neuf. Ceci correspond aux appuis additifs, dix (G_1), vingt ($G_1 + G_1$ noté $2\,G_1$), trente ($2\,G_1 + G_1$ noté $3\,G_1$), quarante, cinquante, soixante, soixante-dix, quatre-vingts, quatre-vingt-dix ($8G_1 + G_1$ noté $9\,G_1$), cent ($9G_1 + G_1 = n_1 G_1$), deux cents ($n_1 G_1 + G_2$), trois cents, quatre cents, cinq cents, six cents, sept cents, huit cents, neuf cents ($n_1 G_1 + (n_2\text{-}1) G_2$), mille ($n_1 G_1 + n_2 G_2$), deux mille ($n_1 G_1 + n_2 G_2 + G_3$)

Le 2ème choix : (c'est celui qui a servit à illustrer la définition ci-avant).

Pour les nombres inférieurs à mille, nous pouvons considérer que G_1 = dix, G_2 = vingt, G_3 = cent, n_1 = six, n_2 = deux et n_3 = neuf. Ceci correspond aux appuis additifs, dix (G_1), vingt ($G_1 + G_1$ noté $2\,G_1$), trente ($2\,G_1 + G_1$ noté $3\,G_1$), quarante, cinquante ($4G_1 + G_1$ noté $5\,G_1$), soixante ($5G_1 + G_1 = n_1 G_1$), quatre-vingts ($n_1 G_1 + G_2$), cent ($n_1 G_1 + 2G_2 = n_1 G_1 + n_2 G_2$), deux cents $(n_1 G_1 + n_2 G_2) + G_3$, trois cents, quatre cents, cinq cents, six cents, sept cents, huit cents, neuf cents, mille ($(n_1 G_1 + n_2 G_2) + 9G_3 = (n_1 G_1 + n_2 G_2) + n_3 G_3$).

Le 3ème choix :

G_1 = vingt, n_1 = un ; G_2 = dix, n_2 = quatre ; G_3 = vingt, n_3 = deux, G_4 = cent, n_4 = neuf. Ceci correspond aux appuis additifs, vingt ($G_1 = n_1 G_1$), trente ($n_1 G_1 + G_2$), quarante ($n_1 G_1 + 2G_2$), cinquante ($n_1 G_1 + 3G_2$), soixante ($n_1 G_1 + 4G_2 = n_1 G_1 + n_2 G_2$), quatre-vingts ($(n_1 G_1 + n_2 G_2) + G_3$), cent ($(n_1 G_1 + n_2 G_2) + 2G_3 = n_1 G_1 + n_2 G_2 + n_3 G_3$), deux cents ($(n_1 G_1 + n_2 G_2 + n_3 G_3) + G_4$), trois cents, quatre cents, cinq cents, six cents, sept cents, huit cents, neuf cents, mille ($(n_1 G_1 + n_2 G_2 + n_3 G_3) + 9G_4 = n_1 G_1 + n_2 G_2 + n_3 G_3 + n_4 G_4$).

D'autres choix sont possibles encore par exemple si on considère qu'à partir de soixante, le groupement de vingt est additionné à trois reprises. Nous allons discuter de ces choix dans le §3.2.

c. L'interprétation ordinale avec repérants

Les principes

Voici alors le principe de construction d'une numération ordinale : il permet de relier un nombre à son representamen.

Soit la suite (A_n), n entier strictement positif, une suite croissante de nombres désignés par des repérants. A chacun, on associe la suite croissante $(s_j(n))$ de nombres désignés par des comptants. La concaténation $A_n\ s_j(n)$ ou bien la concaténation $s_j(n)\ A_n$ désigne le $s_j(n)^{\text{ième}}$ successeur de A_n.

Cette description est formellement identique à celle faite pour les appuis additifs, la différence étant que le nombre est défini non par une somme mais par son rang dans deux suites « imbriquées » de repérants et comptants.
Pour une numération exhaustive, non ambiguë, non redondante, on doit avoir ici aussi
(1) Pour tout n> 0, $A_{n+1} - A_n \leq A_n$, c'est-à-dire que $A_{n+1} \leq 2\,A_n$

Indication des choix pour la numération parlée en France

Nous avons les mêmes possibilités que pour l'interprétation (additive) précédente, les repérants jouant le rôle des appuis additifs.

1er choix

dix pour A_1 le premier repérant, vingt pour A_2, trente pour A_3, quarante pour A_4, cinquante pour A_5, soixante pour A_6, septante (soixante-dix) pour A_7, octante (quatre-vingts) pour A_8, nonante (quatre-vingt-dix) pour A_9, puis, cent, deux cents, trois cents, quatre cents, cinq cents, six cents, sept cents, huit cents, neuf cents, mille.

2ème choix

dix pour A_1 le premier repérant, vingt pour A_2, trente pour A_3, quarante pour A_4, cinquante pour A_5, soixante pour A_6, quatre-vingts pour A_7, puis, cent, deux cents, trois cents, quatre cents, cinq cents, six cents, sept cents, huit cents, neuf cents, mille.

3ème choix

vingt pour A_1 le premier repérant, trente pour A_2, quarante pour A_3, cinquante pour A_4, soixante pour A_5, quatre-vingts pour A_6, puis, cent, deux cents, trois cents, quatre cents, cinq cents, six cents, sept cents, huit cents, neuf cents, mille.

3.2 La deuxième partie de l'interprétant

L'étude faite en 3.1 concerne la première partie de l'interprétant, la partie mathématique. Nous amorçons ici le mouvement des mathématiques vers les signes afin d'appréhender les spécificités de la mise en signes dans la numération parlée en français : c'est la deuxième partie de l'interprétant, l'incarnation de ces principes dans la langue.

Pour chaque interprétation, elle concerne tout d'abord des éléments de réponses éclairant les choix faits pour les appuis/appuyants repérants/comptants que nous avons indiqués par ailleurs qui permettaient de classer la numération parlée en France dans un des trois types : arithmétique multiplicative, arithmétique additive ou ordinale (avec repérants). En ce qui concerne ce premier volet, des éléments complémentaires sont fournis en annexe.

Ensuite sont abordées les questions sur le choix des representamens, en particulier leur phonétique et leur ordre d'énonciation.

a. L’interprétation arithmétique multiplicative

a.1 Le choix des appuis et des appuyants

Nous avons vu que dans la numération orale en français deux choix sont possibles pour la suite des appuis multiplicatifs :

1er choix : M_1 désigné par cent, M_2 par mille, M_3 par million, M_4 par milliard.

2ème choix : M_1 désigné par dix, M_2 par cent, M_3 par mille, M_4 par million et M_5 par milliard.

Dans les justifications données en annexe, nous détaillons des arguments linguistiques pour les éclairer, la segmentation, la « lisibilité » de cette segmentation et des concaténations, mais aussi l’utilisation d’un nombre limité de representamens non analysables en termes de concaténation (c'est-à-dire un nombre limité de mots à retenir pour le vocabulaire de base de la numération). En particulier, nous indiquons que l’utilisation au maximum de deux niveaux de segmentation permet une lisibilité plus claire de ces dernières. Ceci pourrait éclairer en particulier l’utilisation des appuis multiplicatifs (principaux) mille, million, milliard, etc., en progression géométrique de raison mille. C’est par ce biais que nous retrouvons des principes de base mille à partir d’une numération arithmétique avec appuis multiplicatifs, sans être parti initialement des principes de base mille. Par ailleurs, ces choix nécessitent une désignation des nombres inférieurs à mille. En ne considérant que des principes de base mille, ces désignations sont théoriquement arbitraires. Cependant l’analyse morphologique nous permet de voir qu’il n’en est rien. Pour ces nombres, nous pouvons notamment modéliser les principes sous-jacents à nouveau à l’aide d’un appui multiplicatif, celui désigné par cent. Ce qui requiert cette fois-ci une définition des representamens des nombres inférieurs à cent. Le choix de cent comme premier appui multiplicatif pose en effet le problème de nécessiter quatre-vingt-dix-neuf appuyants additifs. Pour résoudre ce problème, tout en restant dans une interprétation multiplicative de la numération, nous proposons le choix de l’appui multiplicatif désigné par dix. Il met en évidence de nombreuses irrégularités, en particulier la présence « parasite » d’un appui multiplicatif « lacunaire » vingt ainsi que la spécificité des nombres de onze à seize.

Ainsi est-il possible d’interpréter notre numération parlée en France comme une numération arithmétique avec appuis multiplicatifs. Pour les nombres supérieurs à mille, les choix faits permettent d’y voir des principes de base mille (M_1 désigné par mille comme premier appui multiplicatif), et pour les nombres inférieurs à mille des principes de base dix (M_1 désigné par dix comme premier appui multiplicatif) ou non (M_1 désigné par cent comme premier appui multiplicatif). Les deux systèmes, concernant les nombres inférieurs à mille et ceux supérieurs à mille, sont « compatibles ». En effet, le deuxième permet de construire un système de désignation des nombres inférieurs à mille qui est nécessaire au premier. Mais de nombreuses irrégularités (surtout pour les nombres inférieurs à cent) permettent de penser que ces choix n’ont pas été faits à partir des principes mathématiques traduits ensuite en representamens oraux. Certains arguments linguistiques (concaténation, niveau de segmentation, étude morphologique, etc.) en lien avec la définition mathématique ont déjà été avancés pour éclairer les options prises en langue française. Pour mieux comprendre les liens entre les mathématiques et notre numération parlée nous allons regarder, comme pour la numération écrite chiffrée, le lien entre les principes exposés et la mise en representamens oraux dans notre langue.

a.2 Les choix liés à la constitution des representamens en langue française

En ce qui concerne les désignations pour le vocabulaire terminal de la numération (les mots de base), leur phonétique est arbitraire. Tout en soulignant des irrégularités, l’étude morphologique a permis d’interpréter la numération parlée en France comme une numération

arithmétique avec appuis multiplicatifs. Ceci a été développé précédemment, nous n'y revenons pas ici.
En ce qui concerne la notion de tactème d'ordre, elle n'est pas à considérer indépendamment de la segmentation. En effet, la présence de ce tactème est inhérente aux principes mathématiques fondateurs. Une fois reconnue la segmentation, c'est-à-dire repérées les désignations des nombres d'appui multiplicatif, nous avons en effet les deux possibilités indiquées dans les principes : la concaténation $p_i(n)\ M_n\ s_j(n)$ ou bien la concaténation $s_j(n)$ $M_n\ p_i(n)$ pour désigner le nombre $\mathrm{p_i(n)} \times \mathrm{M_n}\ +\ \mathrm{s_j(n)}$. Ce qui donne deux choix d'ordre d'énonciation. Fixer un choix permet en pratique de rendre la numération non ambiguë : différencier cent deux de deux cents. Il est difficile de justifier ici le choix de l'un ou l'autre. Nous constatons que dans notre numération parlée nous énonçons l'appuyant multiplicatif avant l'appui, et l'appuyant additif après[70]. Parallèlement, nous constatons qu'en français les noms des nombres sont aussi adjectifs numéraux[71], et la règle est qu'ils précèdent le nom. Ainsi, deux cents pourrait se comprendre en considérant cent comme un nom (synonyme de centaine) et donc donnerait deux centaines, ce qui ferait référence au double de cent. Bien entendu, nous pourrions aussi entendre cent comme adjectif et deux comme nom dans cent deux (il y aurait ainsi cent « deuzaines »), mais l'usage des petits nombres comme adjectifs numéraux est plus fréquent. Nous n'allons pas plus loin dans notre analyse et relevons cette proximité entre les désignations des nombres et la langue parlée.
La segmentation est, elle aussi, inhérente aux principes mathématiques fondateurs. Cependant, nous avons indiqué une hiérarchie dans la segmentation, hiérarchie qu'il faut signifier dans l'énonciation du nombre.
Un premier niveau de segmentation concerne uniquement les nombres supérieurs à mille : il faut par exemple connaître la segmentation utilisée pour un nombre tel que trois cent vingt mille. Considérer que cent est du même niveau que mille, conduit à interpréter ce nombre en tant que (trois $\times$ cent) + (vingt $\times$ mille), ce qui est erroné. L'interprétation « base mille » est à mettre en parallèle avec une mise en signes non ambiguë comportant les segmentations principales délimitées par les mots-segments principaux mille, million, milliard, etc.
Le deuxième niveau de segmentation concerne les nombres inférieurs à mille qui vont servir d'appuyant à chaque nombre-segment principal (appuis multiplicatifs principaux). Nous avons vu que deux choix sont possibles, avec chacun des spécificités. Si on considère un seul niveau de segmentation, le seul appui multiplicatif est cent. On ne tient pas compte de la morphologie des appuyants additifs (les nombres inférieurs à cent), les appuyants multiplicatifs étant les nombres de un à neuf. Si on utilise deux niveaux de segmentation, on considère deux appuis multiplicatifs, dix et cent. Les appuyants sont les mêmes pour les deux, les nombres de un à neuf, et on retrouve des principes de base dix.
Le repérage de l'un ou l'autre niveau de segmentation est nécessaire à la compréhension de la numération et nous n'avons trouvé aucun indicateur linguistique qui permet de le signifier dans l'énonciation, mise à part une hiérarchie des segmentations. En effet, l'ordre d'énonciation des segments est *a priori* arbitraire. Le choix fait dans notre numération parlée, quel que soit le niveau de segmentation, est d'énoncer les segments par ordre décroissant des appuis auxquels ils se réfèrent. Le type de classification, c'est-à-dire une classification monotone des appuis, peut être mis en parallèle avec le procédé de construction « par récurrence », de proche en proche. Cependant le choix de l'ordre décroissant n'est pas cohérent avec le sens de construction des désignations des nombres, des plus petits aux plus

[70] A noter les exceptions des nombres de onze à seize. Mais ici, leur formation peut ne pas être issue d'un procédé de concaténation. Nous y reviendrons dans le troisième interprétant.
[71] Sauf million et milliard qui sont des noms. Remarquons en outre que les codes d'écritures avant sa réforme ne comportaient pas de trait d'union.

grands. Nous verrons que des processus de mise en signes « concrets » du cardinal d'une collection suivent par contre cet ordre.

b. L'interprétation arithmétique additive

b.1 Le choix des appuis additifs et des appuyants

Nous exposons tout d'abord des principes d'économie de mots. Nous les avons élaborés à partir de la description en termes de couples (G_k, n_k). Ils vont nous donner un éclairage linguistique sur les différents choix.de la numération en France.

Les principes linguistiques de maximalité forte et faible

Pour éclairer les choix faits pour la numération parlée en français, nous proposons d'introduire l'idée d'un principe linguistique de maximalité dans l'utilisation des dénominations anciennes. Ce principe consiste à tenter de désigner le maximum de nombres à partir du minimum de mots, en conservant le principe d'additivité. Ceci va jouer sur les choix successifs des couples(G_k, n_k).

Supposons G_1 choisi et donc des mots de base désignant les nombres entiers de l'intervalle $[[1,\ G_1]]$. Pour le choix de n_1, le principe linguistique de maximalité va consister à essayer de désigner tous les nombres de $[[1,\ n_1\ G_1\text{-}1]]$ avec ces mots. Dans notre interprétation, cela entraîne de déterminer un nom pour les appuis additifs $2G_1,\ 3G_1,\ \ldots\ ,\ n_1\ G_1$. Il suffit pour cela de former un mot composé à partir d'un des n_1 premiers entiers et le nom de G_1. Notons la parenté avec la première interprétation qui utilise les appuis multiplicatifs. Mais à la différence de cette dernière, les nombres $2G_1,\ 3G_1,\ \ldots\ ,\ n_1\ G_1$ ne sont pas pris *a priori* comme appuis multiplicatifs. L'idée ici est de les numéroter et pour les nommer d'utiliser les noms déjà à disposition. Il suffit ainsi de prendre $n_1 \leq G_1$. Le principe de maximalité sera de prendre $n_1 = G_1$, c'est-à-dire de numéroter en utilisant tous les noms des nombres inférieurs à G_1. Ceci peut fournir une explication à la morphologie des noms des six premières dizaines. Quarante indique la dizaine numéro quatre, elle est obtenue à partir de la précédente par addition de dix, addition réitérée à partir de la première qui est l'appui additif principal.

Essayons maintenant de voir les incidences sur le choix de G_2. D'après ce même principe, on doit avoir $G_2 \leq\ n_1\ G_1$ pour pouvoir nommer les nombres entre $n_1\ G_1$ et $n_1\ G_1 + G_2$. Le principe de maximalité « forte » entraîne donc que $G_2 =\ n_1\ G_1$.

Pour le choix de n_2, le principe de maximalité impose de le prendre égal à $n_1\ G_1$. En effet tous ces nombres ont déjà été désignés auparavant. Mais on peut aussi penser à un principe de maximalité faible qui demande de réutiliser uniquement les premiers mots de base, ceux désignant les nombres entiers de l'intervalle $[[1,\ G_1]]$. Mais si auparavant on a pris $G_2 =\ n_1\ G_1$, il s'agit de numéroter à partir de $n_1\ G_1$, On obtient alors $n_2 = G_1\text{-}1$.

En généralisant, une fois le couple (G_k, n_k) utilisé pour définir les nombres jusqu'à $-1+\sum_{i=1}^{k} n_i G_i$, nous disposons donc de deux principes pour le choix du couple suivant $(G_{k+1},\ n_{k+1})$. Le principe de maximalité forte consiste à réutiliser tous les (noms des) nombres jusqu'à $-1+\sum_{i=1}^{k} n_i G_i$, celui de maximalité faible à n'utiliser que les nombres de $[[1,\ G_1]]$ ou $[[1,\ G_1\text{-}1]]$.

Les éclairages sur les choix exprimés avec les couples (G_k, n_k)

Le 1er choix

G_1 = dix, G_2 = cent, G_3 = mille, n_1 =dix et n_2 =neuf.

On considère ici, que soixante-dix, quatre-vingts et quatre-vingt-dix sont des appuis additifs (désignant les nombres $7G_1$, $8G_1$ et $9G_1$) sans se préoccuper de leur morphologie (ni de celles de leurs successeurs). L'alternance des principes de maximalité forte pour les G_i et faible pour les n_i permet d'éclairer la constitution des representamens dans la numération orale « régulière » en français de Belgique et de Suisse.
Remarquons que la maximalité forte entraîne que le dernier appui généré par un groupement d'appui G_{k-1} devienne le nouveau groupement d'appui G_k. Or dès que k>1, n_k donne le nombre de fois que G_k est ajouté successivement à partir du dernier appui généré par un groupement d'appui. C'est donc $1+n_k$ et non n_k qui donne le nombre de fois qu'apparaît en fait G_k. Ainsi n_2 =neuf, mais en fait le nombre désigné par G_2 = cent apparaît dix fois : il est répété neuf fois à partir de $G_2 = n_1 G_1$.
Si cette alternance continue au-delà de mille, on obtient la structure de base dix. Ceci oblige à donner un nouveau nom pour « dix mille », « cent mille », etc. Ce n'est pas le choix qui a été fait dans les numérations parlées en langue française. En fait, à partir de mille, pour les n_k, un choix intermédiaire a été fait entre la maximalité forte et faible. L'appui est répété neuf cent quatre-vingt-dix-neuf fois. Comme l'appui G_k est toujours le dernier appui généré par le groupement d'appui G_{k-1} précédent (maximalité forte), les différents appuis G_k apparaissent ainsi mille fois. D'où G_4 = million, G_5 =milliard, etc. et n_k = neuf cent quatre-vingt-dix-neuf pour k>2. Cette dernière remarque permet d'éclairer les choix pour les nombres supérieurs à mille. Nous retrouvons en particulier une structure de base mille.

Le 2ème choix : (c'est celui qui a servit à illustrer la définition ci-avant).

Pour les nombres inférieurs à mille, nous pouvons considérer que G_1 = dix, G_2 = vingt, G_3 = cent, n_1 = six, n_2 = deux et n_3 = neuf.

Si G_1 = dix, le choix de n_1 = six ne peut pas s'expliquer par le principe de maximalité forte. Notons cependant que, mis à part vingt, le nom des premières dizaines garde bien trace de l'utilisation des noms des entiers de un à six. Pour G_1 = dix et n_1 = six, pourquoi G_2 = vingt, puis pourquoi n_2 = deux et G_3 = cent ? Une fois choisi G_1 =dix, n_1 = six, le principe de maximalité forte aurait dû mener à $G_2 = n_1 G_1$ donc soixante, ce qui n'a pas été le cas. Nous pouvons faire l'hypothèse que G_2 = vingt est la trace d'une autre numération telle que G_1 = vingt, n_1 = cinq et G_2 = cent qui se superpose à celle décrite auparavant (jusqu'à mille), superposition rendue possible du fait que certains nombres de base additifs sont identiques : 1ère, 2ème, 3ème, 4ème, 5ème vingtaines correspondent aux 2ème, 4ème, 6ème, 8ème et 10ème dizaines. Ceci nous mène alors vers le troisième choix : G_1 = vingt, n_1 = un ; G_2 = dix, n_2 = quatre ; G_3 = vingt, n_3 = deux, G_4 = cent, n_4 = neuf. Il peut être éclairé par les mêmes arguments, dès l'appui vingt, la superposition de deux systèmes de numération.

Dans le cadre de notre thèse, nous retenons qu'il est possible de faire une telle analyse, mais nous ne nous lui donnons pas le statut de cause, d'explication des choix faits dans notre langue. Nous retenons cependant que les particularités mises en évidence dans la numération

parlée en France par rapport à celle parlée en Belgique ou en Suisse pourraient s'expliquer par une superposition de deux logiques de numération : une avec un premier appui additif (principal) de dix, générant avec les appuyants additifs de un à neuf[72] d'autres appuis additifs, une autre avec un premier appui additif (principal) de vingt, générant avec les appuyants additifs de un à dix-neuf[73] d'autres appuis additifs. Par la suite, dans ces deux logiques de numération, le deuxième appui additif principal est cent et il génère à l'aide des appuyants additifs de un à quatre-vingt-dix-neuf[74] d'autres appuis additifs. Nous retenons aussi une certaine proximité avec les principes mathématiques de la base.
Pour les nombres supérieurs à mille, nous avons $1+n_i = 10^3$ et $G_i = 10^{3i-6}$ pour i>3, ce qui correspond mathématiquement au système de base mille que nous avons vu précédemment. En outre, une alternance de principe de maximalité « forte » pour les G_i et « faible » pour les n_i permet de retrouver les principes mathématiques de base dix pour les nombres inférieurs à mille. Cependant pour ceux-ci, des irrégularités sont à noter dans la formation des representamens dans la numération parlée en France. Nous avons émis alors l'hypothèse du chevauchement avec une numération utilisant G_2 = vingt.

Nous sommes conscient qu'une analyse comparable peut être menée pour une numération multiplicative, les notations que nous avons prises en attestent. Cependant, nous avons voulons observer comment, dans la numération, les principes multiplicatifs pouvaient dériver de principes additifs quand il s'agit de réitérer une addition. C'est pourquoi nous avons recherché des arguments linguistiques et adopté la solution pratique consistant à numéroter les additions opérées. Ici ce sont bien des principes additifs qui sont considérés *a priori*.

Par ailleurs, d'autres choix sont à éclairer dans le système de numération parlée en France, choix liés à la constitution des representamens en français. C'est ce que nous faisons dans le paragraphe qui suit.

b.2 Les choix liés à la constitution des representamens en langue française

Le choix des representamens oraux pour les appuis additifs principaux est arbitraire, il en est de même pour les nombres inférieurs au premier appui.
En étudiant les autres contraintes liées à la mise en mots des principes d'une numération arithmétique additive, c'est-à-dire le passage des principes au système de representamens oraux utilisés, nous allons éclairer certains choix faits en France : pourquoi quarante-trois et non pas trois-quarante, pourquoi l'analyse morphologique de seize renvoie à six-dix et non pas à dix-six ? Comme dans l'interprétant précédent nous allons essayer de comprendre ces choix en considérant l'intelligibilité des representamens constitués. Cependant, nous n'avons pas *a priori* d'arguments concernant la « lisibilité de la segmentation » comme pour l'interprétation multiplicative. En effet, l'addition, seule opération en jeu, étant commutative les différents mots de base et appuis additifs peuvent être énoncés dans n'importe quel ordre. Pourtant un ordre est à relever, puisque pour les nombres supérieurs à dix-sept, l'appui additif est toujours énoncé avant l'appuyant. Nous allons formuler la même hypothèse avancée dans l'interprétation précédente. En français, les noms des nombres sont aussi adjectifs numéraux, et la règle est qu'ils précèdent le nom. Ainsi, deux-quarante pourrait se comprendre en considérant quarante comme un nom (synonyme de quarantaine) et donc donnerait deux quarantaines, ce qui ferait référence au double de quarante.

[72] C'est-à-dire les nombres strictement inférieurs à ce premier appui additif « principal ».
[73] C'est-à-dire ici aussi les nombres strictement inférieurs à ce premier appui additif « principal ».
[74] C'est-à-dire les nombres strictement inférieurs à ce deuxième appui additif « principal ».

Cependant, comme nous l'avons déjà remarqué, pour les six premiers successeurs de dix, une analyse morphologique nous a amené à y voir une construction dans laquelle dix ou l'idée de dizaine est toujours indiqué en second : onze pour un/dix, douze pour deux/dix. L'hypothèse linguistique précédente n'est plus valable[75].

c. L'interprétation ordinale avec repérants

c.1 Le choix des repérants et comptants

Rappelons ces choix :

1er choix

dix pour A_1 le premier repérant, vingt pour A_2, trente pour A_3, quarante pour A_4, cinquante pour A_5, soixante pour A_6, septante (soixante-dix) pour A_7, octante (quatre-vingts) pour A_8, nonante (quatre-vingt-dix) pour A_9, puis, cent, deux cents, trois cents, quatre cents, cinq cents, six cents, sept cents, huit cents, neuf cents, mille.

2ème choix

dix pour A_1 le premier repérant, vingt pour A_2, trente pour A_3, quarante pour A_4, cinquante pour A_5, soixante pour A_6, quatre-vingts pour A_7, puis, cent, deux cents, trois cents, quatre cents, cinq cents, six cents, sept cents, huit cents, neuf cents, mille.

3ème choix

vingt pour A_1 le premier repérant, trente pour A_2, quarante pour A_3, cinquante pour A_4, soixante pour A_5, quatre-vingts pour A_6, puis, cent, deux cents, trois cents, quatre cents, cinq cents, six cents, sept cents, huit cents, neuf cents, mille.

Nous observons que nous pouvons interpréter la numération parlée en France comme une numération ordinale décrivant (au moins partiellement) des suites arithmétiques de raison dix ou/et vingt pour les nombres inférieurs à cent. En outre le choix fait est une numération ordinale qui n'est pas avec antériorité réflexive (Cauty, 1988). Autrement dit la suite des comptants est utilisée dans l'ordre croissant à partir du repérant qui la précède. Ainsi, par exemple « trente-deux », désigne le deuxième après trente et non le deuxième avant trente. Ce choix sera peu questionné par la suite car nous n'avons pas trouvé d'argument linguistique qui peut l'éclairer.

Par ailleurs, lorsqu'on prend le plus grand A_n possible à chaque fois, on obtient l'égalité $A_{n+1} = 2\,A_n$, qui mène à la suite géométrique $A_n = 2^{n-1}\,A_1$. Quelles que soient les possibilités envisagées, les repérants de la numération parlée en français ne suivent pas cette progression. Ainsi, comme pour l'interprétation précédente, cette description de la première partie de l'interprétant, la partie spécifiquement dédiée aux principes mathématiques, ne permet pas d'éclairer complètement les choix faits. Nous allons reprendre ici l'argument linguistique de l'interprétation additive, argument qui concerne une économie de mots à introduire au fur et à mesure de la mise en signes.

Le principe consiste à tenter de désigner le maximum de nombres à partir du minimum de mots, en conservant les principes mathématiques d'une numération ordinale décrits précédemment. Ceci va jouer sur les choix successifs des couples (G_k, n_k). Nous allons extraire les conclusions principales de l'interprétation additive en les adaptant à l'interprétation ordinale, surtout en ce qui concerne les nombres inférieurs à cent.

[75] Remarquons que dans certaines langues, comme l'allemand, il y a changement de l'ordre d'énonciation entre les dizaines et les centaines mais quand le petit à ajouter est avant on met « und ».

Nous avons vu qu'une alternance de principe de maximalité pour les G_i et pour les n_i permet de retrouver des principes mathématiques de base, que ce soit de base dix pour les nombres inférieurs à mille, ou de base mille pour les nombres supérieurs à mille. La différence principale avec l'interprétation additive est que la maximalité « faible » concerne les repérants et non les appuis additifs. Elle consiste alors à utiliser la comptine de un à neuf pour numéroter les repérants successifs jusqu'à mille, celle de un à neuf cent quatre-vingt-dix-neuf pour les repérants au-delà de mille. La maximalité forte porte, elle, sur les comptants disponibles entre repérants : de un à neuf pour les repérants avant cent, de un à quatre-vingt-dix-neuf pour les repérants avant mille, de un à neuf cent quatre-vingt-dix-neuf au-delà de mille. Avec ces principes de maximalité, nous retrouvons donc les principes de base dix et base mille. Pour les nombres inférieurs à cent[76], cette analyse de la numération permet d'éclairer de manière plus convaincante les choix faits dans la numération parlée en français de Suisse et de Belgique, dans laquelle, septante, octante (huitante) et nonante sont employés pour soixante-dix, quatre-vingts et quatre-vingt-dix. En France, un plus grand nombre d'irrégularités est à noter. Nous avons déjà émis l'hypothèse du chevauchement entre une numération utilisant deux types de groupement, vingt et dix. Nous reprenons cette hypothèse dans le cadre d'une numération ordinale, hypothèse qui correspond au 3ème choix. Entre un et vingt ainsi qu'entre soixante et cent (voire même cent vingt) on peut interpréter la numération comme utilisant les comptants de un à dix-neuf entre deux repérants. Si ces comptants avaient été utilisés pour tous les nombres on aurait la suite des repérants suivants : vingt, deux-vingts, trois-vingts, quatre-vingts, cinq-vingts, etc. jusqu'à dix-neuf-vingt si on considère le principe de maximalité faible pour les repérants. Or dans cette suite, « quatre-vingts » désigne le même nombre que « quatre-vingts » dans la numération parlée en France. C'est cet élément qui rend mathématiquement possible une hypothèse de chevauchement de deux numérations[77], ce qui a été signalé par ailleurs. Chacune de ces deux numérations peut donc être modélisée avec des couples (G_k, n_k), différents pour chacune, et nos éclairages linguistiques peuvent leur convenir.

D'autres particularités sont à éclairer dans le système de numération parlée en France, comme celles liées à la constitution de certains representamens en français qui ne suivent pas toujours exactement les règles données dans la définition.

c.2 Les choix liés à la constitution des representamens en langue française

Nous allons nous tourner vers un deuxième argument linguistique pour voir en quoi il peut expliquer certaines irrégularités dans la constitution des representamens. Nous allons nous centrer sur les nombres inférieurs à cent. Il s'agit en particulier d'expliquer[78] pourquoi « seize » pourrait provenir de six-dix et non pas de dix-six, question laissée en suspend dans les interprétations précédentes. En effet, une analyse morphologique nous a déjà mené à formuler l'hypothèse d'une altération ou évolution du latin dans laquelle l'idée de dix est indiquée en second, par exemple « onze » venant de la concaténation latine « undecim », « un-dix ». Dans une interprétation ordinale, nous pouvons formuler l'hypothèse que le suffixe « ze » indique que le dernier repérant passé est dix, sans (plus) nécessairement faire référence à une concaténation ancienne. Si ceci renforce la possibilité d'une interprétation ordinale de la numération, cela n'explique pas l'inversion repérant/comptant à partir de dix-sept. Nous faisons cependant deux remarques. D'abord, les nombres après vingt sont désignés en énonçant en premier le repérant, ceci peut-être pour mettre en avant cette fois-ci le

[76] Nous avons déjà indiqué les raisons d'étudier tout particulièrement les nombres inférieurs à cent.
[77] Cette hypothèse est renforcée du fait des emplois attestés de formes anciennes comme quinze-vingts qui reste dans le nom d'un hôpital.
[78] L'emploi de « quarante-deux » et non celui de « deux-quarante » a déjà été traité dans l'interprétation additive.

repérant, information qui devient primordiale pour l'ordre de grandeur des nombres ou pour se souvenir du dernier repérant (ceci est une hypothèse qui pourra être questionnée en considérant les procédés de mise en signes du cardinal d'une collection). Ensuite, en latin (Noel, 1833), dix-sept se dit « decem et septem »[79], dix-huit se dit « decem et octo », dix-neuf se dit « decem et novem », alors que seize se dit sexdecim. Comme en français, de onze à seize la racine latine nomme dix (decem) après les representamens latin des nombres de un à six (voire sept). La même irrégularité est donc à noter, ce qui ne l'explique pas, mais en fournit une origine. Notons encore que le latin utilise aussi « duodeviginti » pour « dix huit » et « undeviginti » pour « dix-neuf ». Les representamens sont donc interprétables dans une numération ordinale avec antériorité réflexive (Cauty, 1988), c'est-à-dire que « duodevinginti » est analysable comme deux avant vingt et non comme vingt moins deux. Plus précisément, « de » signifie « à cause de » ou encore « provenant de », « avant la fin de », « relativement à » et ne fait pas référence à une soustraction (Goelzer, 1966). A ce propos nous avions déjà indiqué dans l'introduction de l'interprétation ordinale en quoi le « et » français peut s'interpréter comme « après » (et non forcément comme plus) : le « et » latin a aussi cette acception.
Nous allons finir ce paragraphe par des remarques sur la présence de « et » pour « soixante et onze » ainsi que pour le premier successeur des repérants « vingt », « trente », « quarante », « cinquante », « soixante », et de son absence pour « quatre-vingt-un » et « quatre-vingt-onze ». En fait, d'après le dictionnaire historique de la langue française de Rey (1997) et le dictionnaire français-latin de Goelzer (1966), le « et » était la règle entre repérant et comptant : il a donc disparu plus qu'il n'est apparu. Le fait qu'il subsiste pour le representamen du nombre succédant immédiatement après un repérant peut être interprété comme un signe indiquant la rupture entre repérant et comptant, l'amorçage d'un processus à réitérer. Mais cette analyse convient aussi pour les deux premières interprétations.
Concluons ce paragraphe en insistant sur le fait que, comme pour l'interprétation additive, l'éclairage linguistique que nous avons fourni n'explique pas tout et n'est (donc) pas forcément premier. Autrement dit nous ne lui donnons pas le statut de cause. D'autres éclairages sont possibles, en particulier ceux issus de l'étude des procédés concrets de mise en signes du cardinal d'une collection, c'est l'objet du paragraphe suivant.

4 Les procédés concrets de mise en signes

Dans le paragraphe précédent les éclairages donnés permettent de distinguer les éléments de notre système de numération parlée qui sont inhérents aux principes mathématiques (1ère partie de l'interprétant) de ceux qui relèvent de nécessités linguistiques de mise en mots et d'intelligibilité. Cependant, nous n'avons pas d'éclairage d'origine linguistique complet quant aux choix qui sont faits, par exemple ceux afférents à l'ordre d'énonciation Or d'autres paramètres peuvent intervenir, ceux liés aux activités pratiques (en référence à une définition pragmatique du nombre). Nous nous centrons sur celle consistant à déterminer la désignation orale d'une collection d'objets (ou d'éléments dans la terminologie ensembliste). Nous suivons ainsi la progression utilisée pour la numération écrite chiffrée de position.
Nous allons indiquer des procédés d'obtention de cardinaux de collections manipulables ou figurées qui sont cohérents avec nos interprétations de la numération. **Il ne s'agit donc pas de décrire des procédés qui nous semblent les plus efficaces ou les plus usités**. La description de ces procédés consiste en une narration des mots prononcés et (des résultats) des actions sur

[79] Noel (1833) indique aussi septemdecem. Goelzer (1966) indique quant à lui uniquement septemdecem, ce qui continue la logique de formation de la désignation en latin des nombres de onze à seize. Les deux existaient sans doute.

la collection afin d'obtenir la désignation parlée. Dans l'interprétant nous avons distingué les contingences mathématiques des contingences linguistiques. Nous tiendrons compte des deux. En outre, pour les désignations orales, deux problèmes pratiques se posent, différents de ceux de la mise en signes des principes de base dix dans la numération écrite chiffrée de position.
Le premier concerne la mémorisation des mots utilisés, problème dû au fait que l'oralité n'assure pas une fonction mémorielle de la même façon que l'écrit. Le deuxième concerne le passage des mots obtenus à la désignation parlée (par exemple de sept (dix) cinq à soixante-quinze), ce qui est cette fois-ci dû aux choix d'ordre d'énonciation et de segmentation ainsi qu'aux concaténations plus ou moins altérées. Par exemple, dans une interprétation multiplicative, pour les nombres inférieurs à cent, cette désignation n'est en effet jamais une simple juxtaposition appuyant multiplicatif/appui/appuyant additif.
Nous allons nous limiter à décrire les procédés pour les nombres inférieurs à cent dix, ceux qui nous intéressent en premier lieu pour la suite de la thèse, sachant qu'il a été tenu compte d'un spectre numérique plus large pour les interprétations dont ils sont issus.

Voici les notations que nous allons employer, qui permettent de prendre en compte les deux logiques de groupement que nous avons dégagées :

I désigne une unité

α_1 est un groupement dont le cardinal est dix

α_2 est un groupement dont le cardinal est vingt,

α_3 est un groupement dont le cardinal est trente,

α_4 est un groupement dont le cardinal est quarante,

α_5 est un groupement dont le cardinal est cinquante,

α_6 est un groupement dont le cardinal est soixante,

α_7 est un groupement dont le cardinal est soixante-dix (septante)

α_8 est un groupement dont le cardinal est quatre-vingts (octante, huitante)

α_9 est un groupement dont le cardinal est quatre-vingt-dix (nonante),

$\alpha_{10} (= \delta_1)$ est un groupement dont le cardinal est cent,

β_1 est un groupement dont le cardinal est (un) vingt,

β_2 est un groupement dont le cardinal est deux-vingts (quarante),

β_3 est un groupement dont le cardinal est trois-vingts (soixante),

β_4 est un groupement dont le cardinal est quatre-vingts,

β_5 $(= \delta_1)$ est un groupement dont le cardinal est cinq-vingts (cent).

La description des procédés consiste alors à donner l'organisation de la collection obtenue au fur et à mesure des mots prononcés. Les points virgules qui séparent les différents groupements indiquent que les groupements sont disjoints.

4.1 1ère étape : les procédés selon la première partie de l'interprétant

Les procédés sont tout d'abord indiqués selon les principes mathématiques de chacune des interprétations et les différents choix faits pour les appuis/repérants. Rappelons que nous traitons des nombres strictement inférieurs à cent dix.

Pour l'interprétation arithmétique multiplicative

Il s'agit de considérer le nombre de groupements de dix par addition réitérée.

Le choix 1 consiste en l'appui multiplicatif cent, (puis mille, million, milliard).
Issu de ce choix, le procédé « multiplicatif » 1 est :

Les mots prononcés	L'organisation de la collection
un	I ; le reste de la collection
deux	I ; I ; le reste de la collection
…	I ; I ; … ; I ; le reste de la collection
quatre-vingt-dix-neuf	I ; I ; … ; I ; I ; le reste de la collection
cent	δ_1 ; le reste de la collection

Le choix 2 consiste en la suite des appuis multiplicatifs dix, cent, (puis mille, million et milliard).
Issu de ce choix, le procédé « multiplicatif » 2 est :

Les mots prononcés	L'organisation de la collection
un, deux, …, neuf, dix,	α_1 ; le reste de la collection
un, deux, …, neuf, dix,	α_1 ; α_1 ; le reste de la collection
un, deux, …, neuf, dix,	α_1 ; α_1 ; α_1 le reste de la collection
un, deux, …, neuf, dix,	α_1 ; α_1 ; α_1 ; α_1 ; le reste de la collection
un, deux, …, neuf, dix,	α_1 ; α_1 ; α_1 ; α_1 ; α_1 ; le reste de la collection
un, deux, …, neuf, dix,	α_1 ; α_1 ; α_1 ; α_1 ; α_1 ; α_1 ;le reste de la collection
un, deux, …, neuf, dix,	α_1 ; α_1 ; α_1 ; α_1 ; α_1 ; α_1 ; α_1 ; le reste de la collection
un, deux, …, neuf, dix,	α_1 ; α_1 ; α_1 ; α_1 ; α_1 ; α_1 ; α_1 ; α_1 le reste de la collection
un, deux, …, neuf, dix,	α_1 ; α_1 ; α_1 ; α_1 ; α_1 ; α_1 ; α_1 ; α_1 ; α_1 ; le reste de la collection
cent	$10\alpha_1 (= \delta_1)$; le reste de la collection

En ce qui concerne le procédé 1, pour les nombres inférieurs à cent, il s'agit d'une interprétation purement ordinale, qui ne pose pas de problème de mise en signes. Par la suite nous analysons alors le seul procédé 2, qui lui fait intervenir des principes arithmétiques multiplicatifs pour les nombres inférieurs à cent dix.

Pour l'interprétation arithmétique additive

Il s'agit ici d'ajouter au fur et à mesure dix éléments à la collection des éléments déjà dénombrés.
Le choix 1 consiste en la suite des appuis additifs dix, vingt, trente, quarante, cinquante, soixante, soixante-dix (septante), quatre-vingts (octante, huitante) quatre-vingt-dix (nonante), cent (puis deux cents, trois cents, etc.).
Issu de ce choix, le procédé « additif » 1 est :

Les mots prononcés	L'organisation de la collection
un, deux, …, neuf, dix,	α_1 ; le reste de la collection
un, deux, …, neuf, dix,	α_2 ; le reste de la collection
un, deux, …, neuf, dix,	α_3 ; le reste de la collection
un, deux, …, neuf, dix,	α_4 ; le reste de la collection
un, deux, …, neuf, dix,	α_5 ; le reste de la collection
un, deux, …, neuf, dix,	α_6 ; le reste de la collection
un, deux, …, neuf, dix,	α_7 ; le reste de la collection

un, deux, …, neuf, dix,	α_8 ; le reste de la collection
un, deux, …, neuf, dix,	α_9 ; le reste de la collection
un, deux, …, neuf, dix,	$\alpha_{10}(=\delta_1)$; le reste de la collection

Le choix 2 consiste en la suite des appuis additifs dix, vingt, trente, quarante, cinquante, soixante, quatre-vingts, cent (puis deux cents, trois cents, etc.).
Issu de ce choix, <u>le procédé « additif » 2</u> est :

<u>Les mots prononcés</u>	<u>L'organisation de la collection</u>
un, deux, …, neuf, dix,	α_1 ; le reste de la collection
un, deux, …, neuf, dix,	α_2 ; le reste de la collection
un, deux, …, neuf, dix,	α_3 ; le reste de la collection
un, deux, …, neuf, dix,	α_4 ; le reste de la collection
un, deux, …, neuf, dix,	α_5 ; le reste de la collection
un, deux, …, neuf, dix,	α_6 $(=\beta_3)$; le reste de la collection
un, deux, …, dix-neuf, vingt,	β_4 ; le reste de la collection
un, deux, …, dix-neuf, vingt,	$\beta_5(=\delta_1)$; le reste de la collection

Le choix 3 consiste en la suite des appuis additifs vingt, trente, quarante, cinquante, soixante, quatre-vingts, cent (puis deux cents, trois cents, etc.).
Issu de ce choix, le procédé « additif » 3 est :

Les mots prononcés	L'organisation de la collection
un, deux, …, dix-neuf, vingt,	β_1 ; le reste de la collection
un, deux, …, neuf, dix,	α_3 ; le reste de la collection
un, deux, …, neuf, dix,	α_4 ; le reste de la collection
un, deux, …, neuf, dix,	α_5 ; le reste de la collection
un, deux, …, neuf, dix	α_6 $(=\beta_3)$; le reste de la collection
un, deux, …, dix-neuf, vingt,	β_4 ; le reste de la collection
un, deux, …, dix-neuf, vingt,	$\beta_5(=\ \delta_1)$; le reste de la collection

Pour l'interprétation ordinale avec repérants

Il s'agit à partir d'un repérant atteint, d'atteindre le repérant suivant : soit avec la comptine de un à neuf, soit avec celle de un à dix-neuf suivant les choix opérés.

Le choix 1 consiste en la suite des repérants dix, vingt, trente, quarante, cinquante, soixante, soixante-dix (septante), quatre-vingts (octante, huitante) quatre-vingt-dix (nonante), cent (puis deux cents, trois cents, etc.).
Issu de ce choix, le procédé «ordinal » 1 est :

Les mots prononcés	L'organisation de la collection
un, deux, …, neuf, **dix,**	α_1 ; le reste de la collection
un, deux, …, neuf, **vingt**,	α_2 ; le reste de la collection
un, deux, …, neuf, **trente**,	α_3 ; le reste de la collection
un, deux, …, neuf, **quarante**,	α_4 ; le reste de la collection
un, deux, …, neuf, **cinquante**,	α_5 ; le reste de la collection
un, deux, …, neuf, **soixante**,	α_6 ; le reste de la collection
un, deux, …, neuf, **soixante-dix**,	α_7 ; le reste de la collection
un, deux, …, neuf, **quatre-vingts**,	α_8 ; le reste de la collection
un, deux, …, neuf, **quatre-vingt-dix**,	α_9 ; le reste de la collection
un, deux, …, neuf, dix, **cent**	$\alpha_{10}(=\delta_1)$; le reste de la collection

Le choix 2 consiste en la suite des repérants dix, vingt, trente, quarante, cinquante, soixante, quatre-vingts, cent (puis deux cents, trois cents, etc.).
Issu de ce choix, le procédé « ordinal » 2 est :

Les mots prononcés	L'organisation de la collection
un, deux, …, neuf, **dix,**	α_1 ; le reste de la collection
un, deux, …, neuf, **vingt**,	α_2 ; le reste de la collection
un, deux, …, neuf, **trente**,	α_3 ; le reste de la collection
un, deux, …, neuf, **quarante**,	α_4 ; le reste de la collection
un, deux, …, neuf, **cinquante**,	α_5 ; le reste de la collection
un, deux, …, neuf, **soixante**,	α_6 $(=\beta_3)$; le reste de la collection
un, deux, …, dix-neuf, **quatre-vingts**,	β_4 ; le reste de la collection
un, deux, …, dix-neuf, **cent**.	$\beta_5 (= \delta_1)$; le reste de la collection

Le choix 3 consiste en la suite des appuis additifs vingt, trente, quarante, cinquante, soixante, quatre-vingts, cent (puis deux cents, trois cents, etc.).
Issu de ce choix, le procédé « ordinal» 3 est :

Les mots prononcés	L'organisation de la collection
un, deux, …, dix-neuf, **vingt**,	β_1 ; le reste de la collection
un, deux, …, neuf, **trente**,	α_3 ; le reste de la collection
un, deux, …, neuf, **quarante**,	α_4 ; le reste de la collection
un, deux, …, neuf, **cinquante**,	α_5 ; le reste de la collection
un, deux, …, neuf, **soixante**,	α_6 $(=\beta_3)$; le reste de la collection
un, deux, …, dix-neuf, **quatre-vingts**,	β_4 ; le reste de la collection
un, deux, …, dix-neuf, **cent**.	$\beta_5 (= \delta_1)$; le reste de la collection

Commentaires

Les deux procédés arithmétiques, multiplicatif 2 et additif 1, se différencient dans l'organisation de la collection : dans le procédé multiplicatif les dizaines restent constituées, dans le procédé additif, ce n'est pas nécessaire (à cette étape tout au moins).
Les procédés additifs et ordinaux se distinguent par le fait de prononcer la comptine jusqu'à dix (ou vingt) pour l'un et neuf (ou dix-neuf) pour l'autre. Mais aussi le fait de prononcer ou non les appuyants/repérants.
Ces distinctions vont avoir une conséquence pour obtenir le representamen du cardinal de la collection : comment obtenir le dernier appui/repérant et le dernier appuyant/comptant ?

4.2 2ème étape : la mise en signes : obtenir le dernier appui/repérant et le dernier appuyant/comptant

En ce qui concerne le nom du dernier appuyant ou comptant, il est obtenu de fait par les mots prononcés à la fin du procédé. Il n'en est pas toujours de même pour le dernier appui/repérant.

Pour l'interprétation arithmétique multiplicative

Le nombre de « dix » obtenus peut soit être compté à la fin du procédé grâce à l'organisation de la collection, soit il est compté au fur et à mesure (est prononcé alors à chaque fois qu'a été formé un groupement de dix, successivement les mots de la comptine un, deux, trois, etc.), ce qui n'oblige plus *a priori* à garder l'organisation de la collection sous forme de groupements de dix.

Pour l'interprétation arithmétique additive

Pour connaître le dernier appui additif, deux possibilités sont envisageables : utiliser les mots prononcés ou utiliser l'organisation, et ceci pour chacun des trois procédés, ce qui donne six autres procédés. Nous allons donner deux exemples.

Utilisation de l'organisation pour le procédé 1 :
Nous obtenons l'organisation du procédé multiplicatif 1. Mais il reste néanmoins différent de ce dernier car le dernier appui additif s'obtient en considérant un ajout de dix au fur et à mesure (dix (plus dix), vingt (plus dix), trente (plus dix), quarante, etc.), et non en comptant les groupements de dix obtenus.

Utilisation des mots prononcés pour le procédé 3 :

Les mots prononcés	L'organisation de la collection
un, deux, …, dix-neuf, vingt, (**vingt)**	β_1 ; le reste de la collection
un, deux, …, neuf, dix, **trente**	α_3 ; le reste de la collection
un, deux, …, neuf, dix, **quarante**	α_4 ; le reste de la collection
un, deux, …, neuf, dix, **cinquante**	α_5 ; le reste de la collection
un, deux, …, neuf, dix, **soixante**	α_6 $(=\beta_3)$; le reste de la collection
un, deux, …, dix-neuf, vingt, **quatre-vingts**	β_4 ; le reste de la collection
un, deux, …, dix-neuf, vingt, **cent**	$\beta_5 (= \delta_1)$; le reste de la collection

Ce procédé est proche des procédés ordinaux (du 3 plus exactement, car nous avons pris comme exemple le procédé additif 3), à la différence que dix (ou vingt) est prononcé à chaque fois pour constituer des groupes de dix ou vingt[80]
Notons qu'une variante est la suivante :

[80] Rappelons que nous considérons des procédés théoriques, qui sont issus des interprétations et nous ne discutons pas de leur usage pratique « réel ».

Les mots prononcés	L'organisation de la collection
un, deux, …, dix-neuf, vingt, (**vingt**),	α_3 ; le reste de la collection
vingt-un, **vingt**-deux, …, **vingt**-neuf, **vingt**-dix, **trente**	α_4 ; le reste de la collection
trente-un,…, **trente**-neuf, **trente**-dix, **quarante**	α_5 ; le reste de la collection
quarante-un,…, **quarante**-neuf, **quarante**-dix, **cinquante**	α_6 $(=\beta_3)$; le reste de la collection
cinquante-un,…, **cinquante**-neuf, **cinquante**-dix, **soixante**	β_4 ; le reste de la collection
soixante-un,…, **soixante**-dix-neuf, **soixante**-vingt, **quatre-vingts**	$\beta_5(=\delta_1)$; le reste de la collection
quatre-vingt-un,…, **quatre-vingt**-dix-neuf, **quatre-vingt**-vingt**,** **cent**	$\beta_4(=\delta_1)$; le reste de la collection

Cette dernière permet de nommer le dernier appui additif obtenu au fur et à mesure (et donc le retenir).

Pour l'interprétation ordinale avec repérants

Le procédé permet d'obtenir le dernier appui obtenu. Cependant, à l'exemple du précédent, il est aussi possible de nommer le dernier repérant atteint au fur et à mesure. Ce qui donne par exemple pour le procédé ordinal 3 :

Les mots prononcés	L'organisation de la collection
un, deux, …, dix-neuf, (**vingt**),	α_3 ; le reste de la collection
vingt-un, **vingt**-deux, …, **vingt**-neuf, **trente**	α_4 ; le reste de la collection
trente-un,…, **trente**-neuf, **quarante**	α_5 ; le reste de la collection
quarante-un,…, **quarante**-neuf, **cinquante**	α_6 $(=\beta_3)$; le reste de la collection
cinquante-un,…, **cinquante**-neuf, **soixante**	β_4 ; le reste de la collection
soixante-un,…, **soixante**-dix-neuf, **quatre-vingts**	$\beta_5(=\delta_1)$; le reste de la collection
quatre-vingt-un,…, **quatre-vingt**-dix-neuf, **cent**	$\beta_4(=\delta_1)$; le reste de la collection

Sa similitude avec le dernier est grande. En outre il correspond exactement au procédé issu d'une interprétation ordinale sans repérant, donc aussi au procédé multiplicatif 1.

4.3 3ème étape : la mise en signes : obtenir les noms des nombres

La question qui se pose est de passer de la donnée des appuis/appuyants ou des repérants/comptants au nom des nombres.

Pour la dizaine qui doit être nommée, nous retrouvons des problèmes déjà soulevés. Ainsi pour le procédé multiplicatif 2, il s'agit de passer de l'appuyant multiplicatif de la 2ème étape un, deux, ... ou dix, au nom de la dizaine (qui correspond au nom du groupement de 2ème ordre dans le cas de dix groupements de dix). Outre les cas particuliers de dix et vingt, les dizaines soixante-dix, quatre-vingts et quatre-vingt-dix posent des problèmes spécifiques à la

numération parlée en France qu'on ne rencontre pas en Suisse ou en Belgique. Pour le reste des dizaines leur marque en tant qu'ordre supérieur est indiquée par le suffixe « ante »[81].
Dans les différents procédés additifs le problème est identique, avec les mêmes spécificités suivant les appuis choisis. Cependant les variantes données à la deuxième étape pour accéder au dernier appui fournissent des solutions.
Finalement, en ce qui concerne les procédés ordinaux, dès la première étape le problème peut être résolu, toujours avec les spécificités signalées qui apparaissent ou non selon les repérants utilisés.

5. Bilan

La première partie de l'interprétant : de l'analyse syntaxique vers la définition mathématique de trois types de numération.

Notre numération parlée établit une bijection entre une partie finie de l'ensemble des nombres entiers naturels non nuls et un ensemble de désignations. Ce problème est résolu en utilisant un nombre limité de mots. L'analyse a permis de dégager les principes mathématiques sous-jacents. Pour ce faire, nous avons décrit précisément le système de numération parlée en français. Nous avons distingué les representamens entre eux : ceux morphologiquement indépendants les uns des autres et indécomposables (un, deux, trois, …), ceux qui se répètent régulièrement (vingt, trente, deux cents, trois mille, …), ceux enfin qui sont une concaténation non altérée des representamens des deux premiers types (trente-deux, deux cent vingt-quatre, …). Selon le rôle que nous avons fait jouer à chacun, une analyse syntaxique a permis de dégager des principes mathématiques généraux qui définissent trois types de numération[82] : une numération arithmétique multiplicative fondée sur des décompositions mixtes[83] utilisant des appuis multiplicatifs et additifs, une numération arithmétique additive (dont nous avons présenté deux versions) fondée sur des décompositions additives utilisant des appuis additifs et enfin une numération ordinale fondée sur l'obtention de cardinaux par des principes ordinaux et utilisant des repérants. Par exemple quarante a été analysé comme quatre fois dix (appuyant multiplicatif/appui multiplicatif), comme trente plus dix (obtention de l'appui additif par ajout de dix) et comme quatrième repère (succession des repérants). Dans la détermination des interprétations, ces définitions ont permis d'envisager trois alternatives pour la première partie de l'interprétant. Nous sommes alors revenu sur la mise en representamens dans la numération parlée en France à partir de chacun de ces trois principes mathématiques.

La deuxième partie de l'interprétant : des définitions mathématiques aux choix de la mise en signes dans la numération parlée en France.

Bien qu'élaborés à partir d'une analyse de la numération parlée en langue française, ces principes mathématiques ne sont pas nécessairement traduits d'une manière univoque dans une langue et donc ne conduisent pas nécessairement à la numération parlée dans notre

[81] Rappelons que nous n'avons pas trouvé d'articles ou d'ouvrages attestant d'une concaténation certaine, la racine indo-européenne « kmt », Pépin (2003), renvoyant à l'idée de dizaine (ou unité d'ordre supérieur ?) sans que l'on sache s'il s'agit de désigner le nom du nombre dix.
[82] Dans l'élaboration des définitions des principes mathématiques de la première partie de l'interprétant nous avons dû faire cependant certains choix. Il fallait en effet arbitrer entre ce qui peut être retenu de suffisamment général pour permettre de définir une numération non ambiguë, non redondante et exhaustive, et de suffisamment précis pour permettre d'analyser la numération parlée en français. Ainsi par exemple, pour définir un type de numération, nous avons retenu le principe de concaténation et le rôle particulier de certains nombres, sans pour autant ni indiquer l'ordre dans la concaténation ni imposer le choix de tel ou tel nombre pour jouer ces rôles particuliers.
[83] C'est-à-dire mettant en jeu des produits et des sommes.

langue. Nous avons indiqué les choix qui ont été faits en français et tenté de les éclairer. Deux catégories de choix sont à distinguer : ceux liés aux nombres qui vont servir à structurer la numération (les repérants ou appuis additifs ou appuis multiplicatifs, en parallèle des comptants ou appuyants), et ceux liés à la formulation dans une langue afin de rendre non ambiguës les expressions utilisées pour désigner le nombre.
Dans cette deuxième catégorie, certains choix sont des conventions qui ne sont pas toutes du même ordre. Nous distinguons une convention « utilitaire » dans le sens où nous pouvons supposer qu'elle favorise une lecture non ambiguë du système, par exemple le choix d'un ordre d'énonciation des appuis additifs, multiplicatifs ou repérants, soit par ordre croissant soit par ordre décroissant et non pas dans un ordre arbitraire. Nous pouvons aussi considérer des conventions « culturelles » : l'expression phonétique choisie pour dire les nombres ou encore le fait de choisir entre l'énonciation par ordre croissant ou décroissant des appuis additifs, multiplicatifs ou repérants[84]. A propos de l'ordre d'énonciation des nombres intervenant dans les concaténations, nous avons avancé des arguments basés sur des considérations linguistiques qui gardent un statut d'hypothèse quelle que soit l'interprétation choisie.
En ce qui concerne la première catégorie des choix, ceux des éléments structurant la numération (les repérants ou appuis additifs ou appuis multiplicatifs, en parallèle des comptants ou appuyants), nous avons aussi avancé des éclairages d'ordre linguistique en référence à la mise en representamen dans une langue (par exemple une économie de mots) ou pratique en référence à l'obtention du representamen du cardinal d'une collection d'objets (par exemple des appuis ou repérants réguliers pour faciliter leur mémorisation, l'utilisation de comptines ou de comptants toujours identiques entre deux appuis ou repérants). Il nous est difficile à partir de l'analyse entreprise de savoir si ce sont les appuis/repérants qui sont premiers dans la constitution de la numération ou si ce sont les appuyants/comptants : nous émettons l'hypothèse qu'ils se codéterminent pour des raisons à la fois mathématiques, linguistiques et pratiques. Nous n'excluons d'ailleurs pas qu'il y ait d'autres éclairages possibles, comme une numération en unités sous-jacente. Nous allons revenir sur ces interrogations dans la conclusion de la première partie de la thèse qui inclut un paragraphe consacré à l'étude historique. Pour autant, nous constatons que les choix opérés dans la numération permettent de dégager des structures pour l'ensemble des entiers naturels à l'aide de nombres comme dix, vingt, cent ou mille. Ces structures, différentes selon les interprétations, renvoient alors à des principes mathématiques plus précis que ceux contenus dans les définitions des trois numérations.

Les trois interprétations : le rôle de « dix » et les irrégularités.

Ainsi, pour l'interprétation arithmétique multiplicative, les choix dégagés permettent de retrouver une structure de base mille pour la décomposition des nombres supérieurs à mille et de base dix pour ceux qui lui sont inférieurs. Ces choix sont en fait permis par les principes d'une numération arithmétique multiplicative mais ils n'y ont pas de caractère obligatoire : c'est grâce à une certaine régularité dans les appuis multiplicatifs que nous retrouvons une décomposition polynomiale des nombres selon des principes de base dix ou base mille.
Avec l'interprétation arithmétique additive, il nous est possible de dire que dix, puis éventuellement cent vont jouer un rôle spécifique puisque les appuis additifs s'obtiennent par des suites arithmétiques de raison dix, puis éventuellement cent. Ce sont alors ces suites arithmétiques qui permettent de décrire plus précisément les principes mathématiques sous-jacents à l'interprétation arithmétique additive, sans que les principes de base (dix) y soient présents d'emblée. Cependant, un argument plus fort nous semble celui du champ numérique pour lequel l'interprétation arithmétique additive est la plus pertinente, c'est à dire celui des

[84] Ce choix peut être cependant lié à d'autres facteurs que nous ne pouvons cependant pas considérer ici.

nombres inférieurs à cent. Le passage au groupement d'un ordre supérieur qui caractérise la notion de base (ici d'un groupement de dix à dix groupement de dix), c'est-à-dire le groupement de groupements, n'est de fait pas en jeu. En outre, les nombreuses irrégularités semblent indiquer pour la numération parlée en France un mélange de deux types de groupements dix et vingt (donc de nombres d'appuis additifs principaux). Ainsi nous n'avons pas la régularité des types de groupements (cf. la description en termes de couple (G_k, n_k)) nécessaire aux principes de base (ici de base dix).
Finalement, en ce qui concerne l'interprétation ordinale avec repérants, nous retrouvons aussi le rôle joué par dix, mais cette fois-ci il apparaît comme une conséquence de l'énonciation de neuf representamens de nombres (les comptants) entre deux nombres (les repérants) : le dixième, étant le repérant suivant. Ici, c'est donc la régularité des suites de comptants employés successivement qui affine la structure mathématique en jeu. Les remarques précédentes sur le champ numérique et l'irrégularité des repérants dans la numération parlée en France sont aussi valables ici.

Les « irrégularités » qui viennent d'être évoquées attestent de la difficulté de justifier[85] la pertinence de telle ou telle interprétation. Nous n'allons pas ici les reprendre en détail. Indiquons cependant que ces « exceptions », loin de constituer un obstacle, nous ont permis au contraire d'envisager des interprétations qui sans elles auraient été difficilement perceptibles (nous pensons en particulier à l'ordinale). Cependant, il n'en reste pas moins que chacune d'entre elles est mieux adaptée à une certaine catégorie de nombres : les nombres inférieurs à cent pour une numération ordinale avec repérants, inférieurs à mille pour une numération arithmétique additive, au-delà de cent (et mieux encore mille) pour une numération arithmétique multiplicative

Les procédés « concrets » de mise en signes du cardinal d'une collection d'objets : prise en compte de l'interprétation et résolution de deux problèmes pratiques spécifiques.

Dans notre étude nous avons abordé la mise en signes « concrète » du cardinal d'une collection d'objets. Ce passage nous a semblé utile à analyser car il est emblématique des activités mathématiques premières en ce qui concerne une numération : premières à la fois dans les apprentissages scolaires (nous pensons au comptage) et dans la genèse historique. Il est aussi sous-jacent aux descriptions de Bezout et Reynaud, et est directement lié à la définition pragmatique du nombre donnée dans le chapitre 1. Les descriptions des différents procédés avaient pour but de fournir d'autres sources d'éclaircissements sur certains choix dans la numération parlée en français, de mettre en perspective les relations entre mathématiques et numération telle qu'elles avaient été envisagées jusque là. Elles nous permettaient aussi de rendre plus tangible les différences entre les trois interprétations. Ainsi, ces mises en signes « concrètes » du cardinal d'une collection ne constituent pas des descriptions de procédés réels (même s'ils peuvent être observés) mais des transcriptions des interprétations dégagées en termes de gestes et de mots. Nous avons alors noté des différences significatives, mais aussi des ressemblances, dues au fait de résoudre deux problèmes spécifiques. Le premier est le passage entre d'un côté les mots dits et l'organisation obtenue au fur et à mesure et d'un autre la désignation dans le système de numération en français. Le deuxième concerne la mémorisation inhérente au caractère oral de la numération (dans le sens où un son ne laisse pas de trace durable). Trois étapes ont été étudiées : l'adéquation aux principes mathématiques, l'obtention des repérants/appuis et comptants/appuyants, et enfin l'obtention de la désignation du cardinal à partir de ces derniers. Ceci nous a mené alors à

[85] Le fait même de dégager plusieurs interprétations possibles témoigne déjà de ces difficultés.

distinguer les trois interprétations selon son degré d'« adaptation » au problème de mise en signes du cardinal d'une collection figurée ou manipulable. La mise en signes complète peut être effectuée dès la première étape en ce qui concerne l'interprétation ordinale avec repérant, l'interprétation arithmétique additive nécessite de traiter la seconde, et la troisième étape requiert un traitement particulier pour l'interprétation arithmétique multiplicative. Ceci étant à relativiser suivant les différents choix pour les appuis/repérants modélisant les numérations.
En outre nous avons mis en exergue des procédés qui se ressemblent mais ne sont pas élaborés pour les mêmes raisons. Ils peuvent ainsi être issus de deux interprétations différentes mais mettre en jeu une même organisation de la collection ou encore issus de deux interprétations différentes et mettre en jeu la même séquence de mots prononcés. Plus encore, une fois le choix des appuis/repérants fixé, il est souvent possible de justifier *a posteriori* tel ou tel procédé comme émanant de telle interprétation. C'est en sens que nous indiquons qu'il impossible de faire une bijection entre une mise en signes concrète et une interprétation. Nous reviendrons sur cette question dans la conclusion générale de cette partie.

La question de l'« objet » nombre

Dans ce bilan nous abordons finalement une des questions posées initialement, celle relative à la relation entre l'objet « nombre » et la numération parlée en France. Les trois interprétations ont en commun d'être intrinsèquement liées à un procédé de définition des nombres par récurrence. Ceci est une conséquence des définitions mêmes des différents types de numération, puisqu'elles sous-tendent un processus de concaténation à partir de nombres déjà désignés (voir aussi la description des désignations dans le paragraphe 1.2). Ainsi, le système de numération élabore la désignation des nombres, si ce n'est de proche en proche, tout au moins d'intervalle en intervalle et les désignations sont données en respectant l'ordre des entiers naturels. C'est donc ici la structure d'ordre des nombres qui est mise en avant. Cependant, les deux premières interprétations se fondent sur des structures algébriques, mettant en jeu l'addition ou/et la multiplication. Ainsi avons nous interprété vingt-et-un comme étant le nombre vingt plus un ou encore deux fois dix plus un. Ceci est d'une certaine manière contradictoire avec une vision ordinale stricto-sensu, une vision qui correspondrait à l'approche des nombres de Peano dans laquelle les opérations arithmétiques sont « secondes ». L'interprétation ordinale, dans laquelle chaque signe additif d'une interprétation arithmétique peut se comprendre par la locution « suivi de », est une manière de rester dans une approche ordinale[86]. L'objet de notre étude n'est pas de trancher sur une « meilleure » interprétation, toutes les hypothèses ont leurs avantages et inconvénients. En particulier, toutes doivent composer avec des exceptions dans les désignations de certains nombres.
Cependant, nous l'avons déjà souligné, du fait de la constitution des representamens, chacune d'entre elles est mieux adaptée à une certaine catégorie de nombres, ce qui met en relief des aspects différents des nombres entiers selon le champ numérique concerné : pour les nombres inférieurs à seize, une interprétation ordinale sans repérant ; pour les nombres inférieurs à cent, un choix entre arithmétique additif ou ordinal avec repérant ; pour les nombres inférieurs à mille un choix entre arithmétique additif ou multiplicatif ; au delà, une interprétation arithmétique multiplicative.
Finalement, nous notons que dans les définitions mathématiques du nombre, l'ensemble des nombres entiers est muni d'une relation d'ordre et d'une structure arithmétique qui sont liées par des relations[87]. Selon la définition « ordinale » ou « cardinale » du nombre, c'est la

[86] Notons pour autant que l'application S de l'axiomatique de Peano, qui associe à un nombre son successeur, est surtout adaptée pour considérer les premiers nombres désignés par leur nom en français. Dans la définition de la numération ordinale, nous avons introduit l'idée de repérants qui n'a pas de correspondant dans l'axiomatique de Peano.
[87] Visibles par exemple dans le maniement des inégalités.

relation d'ordre ou la structure arithmétique qui est mise en avant, mais l'une et l'autre sont présentes. En considérant la définition pragmatique du nombre, le representamen du cardinal d'une collection peut être obtenu par un principe ordinal (à l'aide d'une comptine numérique) ou cardinal (la bijection avec une autre collection dont le cardinal est connu). Ainsi, la pertinence de l'interprétation arithmétique additive et de celle ordinale pour les nombres inférieurs à cent est à mettre en parallèle avec le fait que les principes cardinaux et ordinaux sont difficilement séparables dans les définitions du nombre.

Limites de l'analyse

Indiquons pour conclure ce bilan quelques remarques qui indiquent des limites à l'analyse que nous avons faite. Du fait de la méthode employée, les éclaircissements sur les choix faits pour modéliser notre numération parlée en France sont prioritairement linguistiques et mènent à des hypothèses. Ils ont été avancés car les principes mathématiques fondateurs ne peuvent pas nous éclairer au-delà d'un certain point. Nous devons cependant nous poser la question de l'existence d'autres influences en revenant par exemple sur les procédés de dénombrement. En effet, nous avons pour l'instant imaginé des procédés concrets de mise en signes qui correspondent aux modélisations que nous avons avancées. D'autres démarches peuvent être empruntées, comme celle consistant à considérer cette fois-ci la quantité (d'éléments) comme une grandeur (discrète), grandeur que l'on peut mesurer en fixant des unités de mesures : par exemple la dizaine, la centaine etc. La traduction parlée en est alors une numération en unités : par exemple « une centaine, deux dizaines, trois unités ». Mais alors se pose la question de la distance entre la numération parlée (celle que nous étudions) et cette numération en unités. Il nous semble difficile, comme le suggère Reynaud, de voir dans la numération parlée une « simplification » de la numération en unités. Les liens entre numération en unités et numération parlée sont donc à éclaircir. D'une manière plus générale, se pose la question de l'utilité et de l'utilisation des numérations : mesurer, mais aussi calculer. En outre, une autre distance doit être précisée, et c'est celle qui nous intéresse en premier lieu dans la thèse, c'est celle avec la numération décimale écrite chiffrée de position. Pour aborder ces questions, nous menons une étude historique au préalable de la conclusion de cette première partie de la thèse.

COMPLEMENTS HISTORIQUES ET CONCLUSION DE LA PREMIERE PARTIE

1. Les numérations étudiées dans une perspective historique

La méthodologie adoptée a permis d'interpréter d'une part la numération écrite chiffrée de position dans le cadre de la théorie des langages, d'autre part la numération parlée en français dans un cadre linguistico-mathématique. Des questions sont apparues en creux dans notre analyse entre les interprétations mais aussi sur la place des calculs et de la mesure.
Rappelons que des auteurs comme Ifrah (1994) et Charbonnier (2004), entre autres, montrent que la constitution même des systèmes de numération est le résultat d'un long processus dans lequel les mathématiques ont eu leur place, mais initialement au moins, de manière non explicite. Ce sont certains principes mathématiques qui ont rendu possibles (c'est-à-dire opérationnelles) les numérations, mais ils ont été éprouvés et utilisés d'une manière pragmatique, expérimentale et culturelle (Crump 1990). L'étude de ces processus est susceptible d'avoir des résonances dans l'enseignement et l'apprentissage. Ils nous renseignent sur les difficultés, les obstacles rencontrés par les Hommes pour construire les notions de numération objets d'enseignement. Le but de ce paragraphe est de compléter l'analyse faite précédemment afin de mieux comprendre la relation entre les mathématiques et les numérations.

1.1 La place des deux numérations étudiées dans l'ensemble des numérations

Il s'agit ici de confronter les interprétations[88] mises à jour de la numération parlée en français à d'autres numérations en utilisant les travaux existants comme ceux de Guitel , Ifrah, Cauty et Numa Bocage. Le chapitre s'appuie principalement sur des exemples montrant la diversité des cas rencontrés. La plus grande partie est extraite de Ifrah (1994). Dans le texte qui suit nous ne précisons alors les références que pour celles qui viennent d'autres auteurs. Cette prise de distance éclaire différemment les spécificités à chaque numération relevées précédemment.

Ifrah définit un système de numération comme une numération ayant adopté le « principe de la base », c'est-à-dire des « *systèmes dont la base n'est autre que le nombre d'unités qu'il est nécessaire de grouper à l'intérieur d'un ordre donné pour former une unité de l'ordre immédiatement supérieur* », p. 73. Ainsi il distingue les numérations concrètes (bouliers, abaques, quipus), orales ou écrites « *selon que ce principe a été appliqué à des intermédiaires matériels, à des mots d'une langue ou à des signes graphiques* ».

a. Quelles sont les interprétations envisageables pour les autres numérations parlées ?

Ifrah classifie les numérations parlées selon des principes arithmétiques sous-jacents. Pour une grande partie des numérations, l'analyse de chaque representamen provenant de concaténation (plus ou moins altérée) se fait en termes de développement utilisant des multiplications et des additions, comme nous l'avons fait pour l'interprétation de la numération parlée en France : avec le même succès, mais aussi avec les mêmes irrégularités. Ainsi, deux « problèmes » sont à signaler : la décomposition n'est pas toujours polynomiale de base dix et la mise en signes est différente selon les appuis prononcés.

---

88 Le mot interprétation désigne toujours ici le résultat du travail d'auteurs et de chercheurs plus particulièrement.

Ainsi quelques langues se prêtent particulièrement bien à une telle analyse pour tous les nombres, comme la numération orale tibétaine et chinoise[89] (p. 628) ainsi que les numérations orales indiennes (en particulier le sanskrit). A noter que les appuis multiplicatifs sont parfois prononcés (tibétaine et chinoise) et parfois non prononcés (dans certaines langues utilisées en Inde, il s'agit d'énoncer une suite de chiffres). En outre certaines sont de base dix, d'autres non. La langue api des Nouvelles-Hébrides, le khmer en Asie, le guarani en Amérique du Sud, le peul en Afrique (p. 96) peuvent être analysables comme ayant des principes de base cinq. Pour la base vingt (vigésimale) l'exemple le plus emblématique est la langue aztèque (p. 97) : les appuis multiplicatifs sont prononcés et les noms des dix-neuf premiers nombres sont analysables avec des repérants/appuis cinq voire dix. Mais des langues indo-européennes, celtes en particulier comme l'irlandais ou le gallois, utilisent aussi la base vingt, les appuis multiplicatifs étant toujours prononcés et les noms des dix-neuf premiers nombres étant analysables avec le repérant/appui dix.

Dans un grand nombre de langues indo-européennes les appuis sont prononcés, et nous y rencontrons les mêmes irrégularités que pour la numération parlée en France pour les nombres inférieurs à cent : les noms des dizaines sont des concaténations altérées. Donnons en exemple respectivement en latin, français, espagnol, allemand et anglais : quadraginta, quarante, cuarenta, vierzig, forty. Pour celles-ci, l'interprétation ordinale (qu'aucun auteur consulté ne fait) est donc aussi envisageable. Signalons en outre qu'il existe différents choix pour l'ordre d'énonciation des appuis/repérants : drei und vierzig en allemand, forty three en anglais. Qui plus est, certaines langues utilisent un équivalent du « et » de notre numération parlée en France. Par exemple « ar » est aussi attesté pour l'irlandais ou le gallois (p. 100) mais aussi le danois, et il semble ne pas signifier une opération d'ajout[90]. Par ailleurs, la langue mongole (p. 78) utilise pour désigner les dizaines un dérivé des unités et n'utilise pas de concaténation (ainsi le mot signifiant dix (arban) n'est pas utilisé) : deux se dit qoyar et vingt qorin[91]. En outre, page 308, Walter (1977) indique que le danois utilise donc une base vigésimale, mais au-delà, la façon de dire cinquante est intéressante. Cinquante est en fait « *une demie vingtaine avant la troisième vingtaine* ». Elle fait une analogie avec la façon qu'ont les Allemands de dire l'heure (une demi-heure avant la sixième heure pour 5h30). Il s'agit donc là d'une conception purement basée sur la position de cinquante, et non plus une quantité. Ceci renvoie à l'antériorité réflexive que nous avons indiquée pour le latin (duodeviginti, mais aussi pour les adjectifs numéraux relatifs aux deux nombres précédant les dizaines, comme duodenonaginta pour quatre-vingt-huit selon Goelzer (1966)).

Toutes ces remarques renforcent la possibilité d'une interprétation ordinale avec repérants de notre numération parlée pour les nombres inférieurs à cent. Un dernier argument pouvant provenir de l'attestation du fait que les premières numérations étaient d'essence ordinale strictement, faites en particulier de mots reliés à des parties du corps humain, dont certaines sont encore utilisées (une suite de trente-trois items pour des insulaires du détroit de Torrès, p. 47). Les systèmes basés sur les doigts (p. 67 et 119) pouvant expliquer alors l'usage de cinq

---

[89] C'est aussi le cas d'un certain nombre de numérations asiatiques.

[90] Walter (1977) donne « Un et Quinze » comme traduction du gallois « un ar bymtheg » (seize). Or, le mot « ar » en gallois (comme les autres langues Celtiques) semble plutôt signifier « près de » ou « au dessus de » (par exemple « Armoric », près de la mer). Seize se dirait donc en langue celtique « un près (après?) quinze », et ainsi de suite jusqu'a dix-neuf. A noter que les langues celtiques sont antérieures au latin, et que ce sont aussi des langues indo-européennes.

[91] C'est aussi le cas du turc archaïque. De la deuxième à la cinquième dizaine, l'analyse morphologique citée par Ifrah (p. 79) ne permet pas de retrouver de lien évident avec les nombres de deux à cinq. Les sixième et septième dizaines utilisent le suffixe « mis » accolé au nom des nombres six et sept, alors que dans les huitième et neuvième on retrouve le mot dix, par exemple säkiz (huit) on (dix). Plus encore, dans cette langue, les nombres sont désignés par rapport à la dizaine qui les suit. Ainsi par exemple onze (bir yegirmi) est littéralement la un (bir) (avant) vingt (yegirmi), ce que nous pouvons interpréter comme la première unité de la deuxième dizaine.

(une main), dix (deux mains) et vingt (deux mains, deux pieds) comme repérants rencontrés presque qu'exclusivement.

b. Quelles sont les interprétations possibles pour les autres numérations écrites ?

Quelle première partie de l'interprétant rencontre-t-on ?

Mises à part les numérations purement ordinales, Ifrah utilise une analyse des numérations écrites en fonction des décompositions arithmétiques qui peuvent les modéliser. Ainsi, nous y voyons, en utilisant les termes que nous avons utilisés, une première partie de l'interprétant analysable avec une échelle de numération issue de la théorie des langages du type $\sum a_i d_i$, où les a_i sont des coefficients et la suite $(d_i)_{i\geq 0}$, une suite d'ordres. Les échelles choisies ne mènent pas toujours à des bases, et les suites utilisent de manière préférentielle les nombres cinq, dix, vingt, soixante. Le système de numération écrit chiffré que nous utilisons de nos jours, décrit p. 74-75, s'appuie, lui, bien évidemment sur des principes de base dix.

Quelle deuxième partie de l'interprétant rencontre-t-on ?

Une fois cette première partie de l'interprétant fixée (et analysable avec une échelle de numération issue de la théorie des langages $\sum a_i d_i$), on retrouve alors les trois types de mise en signes dégagés auparavant : l'utilisation des coefficients seuls, des ordres seuls ainsi que des ordres et des coefficients. Le résumé p. 781 à 792 en donne la diversité, attendu que celui déjà donné par Guitel (1975) indiquait une typologie semblable.

La typologie d'Ifrah

Numérations écrites de type 1 : numération additive (hiéroglyphique égyptienne, sumérienne, grecque, romaine)

Ifrah, p. 759, définit ce type de numération comme « *La règle selon laquelle la valeur d'une représentation numérique s'obtient en faisant la somme des valeurs de tous les chiffres qui y sont contenus* ». C'est la juxtaposition des symboles qui indique qu'il faut les additionner. A chaque signe différent est associée une valeur. Il faut donc connaître la valeur de chaque signe puis additionner ces valeurs pour déterminer le cardinal désigné par l'écriture. Dans beaucoup de systèmes additifs, les signes employés sont liés à des groupements ou sous groupements (cinq, dix, soixante). Il fait écho au système de mise en signes consistant à n'utiliser que la suite des ordres, dont il s'agit de répéter l'écriture pour en indiquer les nombres. Ce système d'écriture permet d'écrire les nombres sans ambiguïté, mais il nécessite un nombre infini de signes si on veut écrire tous les nombres. Il permet facilement de faire des additions, des soustractions et des multiplications (bien que cela puisse être assez long) et plus difficilement les divisions. Il transcrit les « nombres concrets » dans la mesure où il traduit les groupements faits directement sur les quantités (par exemple à un groupement de cent unités correspond un signe C, à deux groupements de cent unités correspond CC).

Numérations écrites de type 2 : numérations hybrides (araméens, singhalais, mariote, éthiopien, chinois).
Elles combinent des principes additifs et multiplicatifs. En général uniquement additif pour les petits nombres. La position des signes peut indiquer s'il s'agit de multiplier ou d'additionner : par exemple si II désigne deux et C cent, IIC désigne deux cents et CII désigne cent deux (voir Numa Bocage, 1997, p. 23). Il s'agit donc d'utiliser les coefficients et les ordres dans la décomposition selon une échelle de numération. Remarquons que l'écriture IIC force à voir II comme une entité entière signifiante en elle-même (qui désigne deux) et non

comme un signe composé d'autres signes : dans CII on peut voir cent plus un plus un, dans IIC on est obligé de considérer II comme désignant deux. C'est dans cette mesure que certains groupements de signes acquièrent eux-mêmes une valeur de chiffre : souvent au moins ceux désignant les neufs premiers nombres entiers strictement positifs.
Ces systèmes de type 2 peuvent se percevoir comme une évolution du système d'écriture de type 1 : l'exemple de l'évolution de la numération écrite à Babylonne (dès le $2^{ème}$ millénaire avant JC) est significatif (voir aussi Bideaud, Lehalle, Vilette, 2003, p. 25). Dans cet exemple on y voit en outre l'utilisation d'un même signe (à la taille près) pour indiquer les unités et les soixantaines (l'ordre au dessus de l'unité puisque la base principale est sexagésimale). Ceci a facilité l'évolution de ce système vers un système de type 3 (numération écrite de position) en suggérant qu'un « même » signe pouvait indiquer des nombres différents. Le passage à la position nécessite cependant d'autres conceptions (voir la description du type 3 ci-après). Les systèmes d'écriture de type 2 permettent facilement de faire des additions, des soustractions et des multiplications (bien que cela puisse être assez long) et plus difficilement les divisions.

<u>Numérations écrites de type 3</u> : numérations de position (babylonien, chinois, maya, la numération écrite chiffrée utilisée actuellement dans la plus grande partie du monde).
Notre numération écrite chiffrée est de ce type 3. Ces numérations se fondent sur des principes liés à des bases et bases annexes[92], mais pas nécessairement à une seule base ni nécessairement la base dix uniquement (cependant la base dix est la plus fréquente, soit en base principale, soit en base annexe). Elles nécessitent d'établir une fois pour toutes un ordre dans les groupements : par exemple un, soixante, trois mille six cents, etc. Cette fois-ci, les signes utilisés sont en nombre limité (ce sont les chiffres du système) : c'est leur position dans l'écriture qui va indiquer à quel type de groupement ils se réfèrent. Ces numérations n'utilisent donc que les coefficients de l'échelle de numération à laquelle ils se réfèrent. Différents types de disposition et de sens de lecture ont été employés : en colonne de haut en bas, en ligne de gauche à droite ou de droite à gauche[93]. Le symbole zéro n'a pas été la seule façon d'indiquer l'absence d'un ordre : écartement significatif entre les chiffres, compréhension du nombre désigné grâce au contexte (Bideaud, Lehalle, Vilette, 2003, p. 25 et Guitel, 1975). Le type 3 est le seul système qui permette d'écrire tous les nombres entiers à l'aide d'un nombre limité de chiffres. Pour certains systèmes de numération de position (savant chinois, savant maya), certains chiffres gardent dans leur graphie une mémoire du nombre qu'ils désignent (III pour trois), ce qui n'est pas le cas pour d'autres systèmes (indien, arabe, les chiffres usuels), Charbonnier (2004, p.19).

Nous constatons que beaucoup de possibilités ont été utilisées, et en particulier, pour différentes échelles des mêmes choix de mise en signes ont été utilisés.

c. Quelles sont les filiations et évolutions repérées ?

<u>Peut-on parler de filiation ?</u>

Ifrah définit les systèmes de numération parlée en prenant pour archétype un système de base dix, calqué sur celui du système d'écriture chiffrée que nous utilisons actuellement, mais il indique qu'« *il s'agit d'un principe purement théorique, que les peuples n'ont pas tous scrupuleusement suivi à la lettre au cours de l'histoire, chacun l'ayant adapté à ses propres traditions orales et aux règles de sa propre langue* », p. 76.

---

[92] Ceci n'est pas surprenant, si on se réfère à l'analyse que nous avons faite de notre système d'écriture chiffrée de position.
[93] Voir aussi Charbonnier p. 12, 13 et 20 mais aussi Guitel (1975).

Nous questionnons ce parti pris méthodologique qui pourrait laisser penser que les systèmes de numération (ou plus exactement les hommes qui les ont façonnés) sont des tentatives de se rapprocher de la base (dix).
Il est vrai que certaines analogies sont à signaler entre les systèmes écrits et oraux[94], et les quelques exemples ébauchés ci-avant les attestent : importance des nombres cinq, dix, vingt, (voire soixante), utilisation des mêmes ordres/appuis multiplicatifs et des mêmes coefficients/appuyants multiplicatifs ou des deux pour la mise en signes. Mais certaines différences sont à noter : irrégularités et plus grande variété dans les representamens oraux, utilisation de « mêmes » systèmes écrits pour des langues différentes. En outre les systèmes écrits et oraux employés simultanément n'ont pas nécessairement la même première partie de l'interprétant : en atteste par exemple la numération parlée et écrite latine (viginti septem / XXVII ; undeviginti / XVIIII (ou XIX)). De plus, quand entre les systèmes oraux et écrits d'une civilisation la première partie de l'interprétant est la même, la deuxième n'est pas nécessairement de même type. Ainsi, en Chine les écritures sont des « signes-mots » qui traduisent exactement ce qui est dit, la mise en signes est alors de type positionnel. Mais dans certaines langues actuelles qui sont analysables en tant que numération arithmétique multiplicative, le nom des ordres est prononcé alors que l'écriture chiffrée utilisée concomitamment adopte un système positionnel donc dans lequel n'apparaît pas le nom de ces derniers. En conséquence, différents types de numération orale et numération écrite ont coexisté et coexistent encore dans une même civilisation, sans qu'on puisse affirmer que l'un dérive de l'autre. Le cas de l'Inde est cependant particulier. Il atteste d'une certaine proximité entre les systèmes écrits et oraux, sans que l'on puisse toutefois trouver une généalogie claire, au vu des nombreuses numérations parlées et écrites qui s'y sont succédé et côtoyé[95].
Ceci questionne alors les deux systèmes que nous étudions : la seule possibilité théorique pour des principes mathématiques communs restant l'interprétation arithmétique multiplicative de la numération parlée.

Des numérations comme outils pour résoudre des problèmes

Nous retenons que les liens peuvent s'éclairer par des arguments linguistiques, ce que nous avons en partie fait dans les chapitres précédents. Mais ici nos lectures nous ont amené à considérer l'influence des problèmes que rencontrent les hommes et que permettent de résoudre les numérations.
Ainsi, les désignations écrites se sont développées sous trois « besoins mathématiques » principaux :
- pour traduire l'oral,
- indépendamment de l'oral pour noter la cardinalité à partir de signes écrits symbolisant les nombres[96],
- pour faire évoluer une écriture antérieure.

---

[94] A noter que pour les systèmes les plus anciens, bien souvent il ne reste que les écritures, ce qui ne permet pas toujours facilement de savoir quelles ont été les numérations parlées utilisées.
[95] Ifrah décrit de manière détaillée les différentes langues et chiffres utilisés en Inde ainsi que leur diffusion. Le tableau « généalogique » p. 861 sur les chiffres et le dictionnaire sanskrit relatif aux symboles numériques indiens, p. 12 à 198 (!) du tome 2, donne un aperçu de la complexité.
Ifrah indique p. 922 que les nombres ont été d'abord écrits en toutes lettres (la poésie y ayant une influence importante), puis des symboles (des chiffres) ont été utilisés. Ainsi en ce qui concerne les liens (voire un passage) entre une numération orale non positionnelle (les appuis/ordre sont prononcés) et une numération orale positionnelle (seuls des coefficients sont prononcés, dans un certain ordre), nous remarquons que parfois sont prononcés les appuis et d'autres fois ils ne le sont pas. Dans ce dernier cas nous avons noté que l'usage en est fait tout d'abord par des spécialistes. En outre, p. 924, Ifrah indique l'existence d'une forme intermédiaire dans laquelle les noms des différents chiffres sont bien énumérés sans les appuis/ordres auxquels ils se réfèrent, mais un même chiffre porte des noms différents selon sa place dans l'ordre d'énumération.
[96] Voir aussi à ce sujet Bideaud, Lehalle, Vilette, (2003), p. 27 en particulier.

Ces trois nécessités « mathématiques » sont étroitement mêlées, nous allons essayer de décrire ces liens.
Les désignations parlées des nombres reflètent (en abstrayant) et développent (en manipulant des abstractions) certains aspects du nombre, il en est de même des désignations liées à un système de numération écrite. Revenons à ce qui les distingue fondamentalement.

Des outils pour communiquer et se souvenir
L'écriture des nombres, dans sa fonction de trace mémorielle ou/et de communication de la quantité, peut être uniquement le reflet de l'oral et il n'y a pas nécessité d'écrire des chiffres à l'aide d'un système de numération ne reflétant pas l'oral, Charbonnier (2004) p. 12, 13 et 20, Guitel (1975). Autrement dit, en considérant cet emploi, il n'y a pas d'intérêt d'inventer un système d'écriture des nombres autre que celui reflétant les mots de la langue parlée. Pourquoi alors certains systèmes d'écriture symbolique ont-ils précédé les systèmes d'écriture langagiers ? La raison essentielle nous semble que les concepts sous-jacents peuvent être plus facilement symbolisés que d'autres, via les possibilités graphiques des signes utilisés dans les numérations écrites[97]. En effet les premiers écrits sont des signes (traits, encoches ou autres) en nombre égal à la collection dont ils veulent signifier le cardinal. Les premières numérations écrites sont ainsi possibles grâce à la propriété de conservation spatiale et temporelle de la quantité (une collection reste équipotente à une autre quelles que soient les dispositions spatiales des éléments et indépendamment de l'instant considéré). Les premières numérations écrites utilisent donc en acte l'aspect cardinal du nombre C'est pourquoi, cette possibilité de représenter les quantités avec des signes écrits a été exploitée historiquement très tôt, avant l'utilisation des premiers systèmes d'écriture des mots de la langue parlée[98]. Ainsi ce sont ces systèmes d'écriture qui ont pu assurer un rôle spécifique dans la communication (dans l'espace) et dans la trace mémorielle (dans le temps).

Les outils mathématiques que les numérations permettent de développer pour résoudre des problèmes.
En outre chacun des deux types de systèmes, écrit et oral, est utilisé dans des emplois différents (problèmes différents, fonctions différentes par rapport à la communication et à la mémorisation) qui peuvent avoir une efficacité comparable (par exemple estimer le cardinal de certaines collections ni trop grandes ni trop petites) ou différente (diviser des « grands » nombres). Ils développent ainsi une exploration du concept de nombre différente, non seulement du fait de leur processus de fonctionnement interne (leur interprétant), mais aussi via les outils qu'ils permettent d'exploiter, par exemple le calcul mental pour l'un et le calcul posé pour l'autre. Les problèmes qui engagent les nombres ont été historiquement un moteur de l'évolution des systèmes de numération. Ils ont motivé la création, l'adoption puis

[97] La graphie (par exemple I I I I) est initialement plus proche d'une représentation de la quantité par une collection équipotente, ce qui est lié à la nature cardinale du nombre (toute collection équipotente désigne le même nombre) et ce qui permet aussi d'accéder à une certaine abstraction par la décontextualisation. Ainsi par exemple, quatre encoches I I I I, permettent non seulement de coder une quantité, mais en plus de la décoder (par association terme à terme). Ainsi peut-on vérifier (collection présente), communiquer à distance et garder en mémoire. Ces signes désignant les nombres acquièrent peu à peu le statut de chiffre quand ils s'éloignent de la représentation de la quantité plus ou moins figurée (type 1) pour indiquer une organisation de celle-ci (type 3) : il ne s'agit plus uniquement de « schématiser » les quantités par des symboles figuratifs. De ce point de vue, un representamen de la numération devient un chiffre quand il accède simultanément au double statut de signe désignant une quantité et de signe désignant un groupement (de par son emplacement dans l'écriture).
[98] On peut aussi considérer d'un autre point de vue que ces signes ont été les premiers mots traduits de la langue parlée. Ici nous voulons insister sur le fait que cette « traduction » primitive n'est pas hasardeuse. Elle ne provient pas uniquement des besoins des hommes à communiquer sur les quantités, mais aussi de la nature des concepts sous-jacents qui se prêtent à une écriture symbolique.

l’évolution de tel ou tel système du fait de leur efficacité dans les résolutions. Chacune des désignations écrite et orale permet de résoudre des problèmes différents qui permettent d’explorer différemment le domaine des nombres.

Nous avons classé ces problèmes selon ce que les désignations permettent d’apporter comme connaissances mathématiques sur le nombre. Ce classement a pour but de donner un aperçu de la diversité des problèmes et du rôle que peuvent jouer les systèmes de numération dans les mathématiques :
- problèmes de 1er espèce : écrire et dire les nombres entiers pour transmettre une information sur une quantité (discrète), une mesure exacte ou un ordre de mesure de la quantité,
- problèmes de 2ème espèce : écrire et dire les nombres entiers pour permettre d’élaborer des techniques opératoires sur les entiers,
- problèmes de 3ème espèce : écrire et dire les nombres non entiers pour permettre l’extension des systèmes de numération à d’autres nombres que les entiers (fractions, racines, décimaux).
- problèmes de 4ème espèce : écrire et dire les nombres pour permettre une exploration des structures des ensembles de nombres.
Dans cette dernière espèce, il s’agit de faire des investigations sur les nombres en explorant les propriétés des systèmes de numération, utilisant entre autres les facilités opératoires qu’ils génèrent et l’organisation qu’ils sous-tendent (les structures de corps, de groupe, d’anneau, mais aussi les liens entre les nombres, les catégories de nombres - parité, multiple de, nombres premiers)[99].
Nous distinguons deux grands types d’investigation du champ numérique : d’une part un champ « externe » aux nombres dans la mesure où ceux-ci (et les calculs afférents) constituent un outil pour résoudre des problèmes qui ne relèvent pas de questions qu’on se pose primitivement sur les nombres, et d’autre part un champ « interne » aux nombres, cette fois-ci on se pose directement des questions sur les nombres. Dans les investigations « externes » se situent tous les problèmes mettant en jeu des quantités ou grandeurs manipulables ou figurées. Dans les investigations « internes » se posent par exemple pour les entiers les questions de la théorie des nombres. Ces deux types ne forment pas des catégories disjointes, souvent les problèmes de l’un nourrissent ceux de l’autre.

La place de la numération en unités
Les lectures que nous avons faites nous donnent à penser que la numération « en unités » peut être un moyen de résoudre certains problèmes spécifiques dus à la mesure des grandeurs, mais d’après notre analyse, elle ne peut pas être considérée *a priori* comme la source des numérations. Nous allons reprendre cette question en ce qui concerne particulièrement les numérations en jeu dans ce travail.

1.2 Etude de la genèse du système de numération chiffrée de position et parlée en français

Nous ne reprenons pas les remarques précédentes qui sont valables pour l’ensemble des numérations, et donc pour les deux que nous étudions en particulier. Nous allons indiquer brièvement quelques particularités.

[99] En outre, il est possible de faire la différence entre d’un côté les catégories et structures qui sont indépendantes d’une désignation, mais dont cette dernière facilite l’accès (nombres premiers, corps, groupe, anneau, rationnels), et d’un autre côté celles issues du système de représentation (par exemple les nombres décimaux, les multiples de 10).

a. Quelles sont les filiations et évolutions repérées ?

Notre numération parlée est issue directement de la numération parlée latine et a donc des origines indo-européennes[100], ce qui explique que bon nombre de numérations parlées en occident puissent être interprétées comme nous l'avons fait dans le chapitre 3. Le système de numération écrite chiffrée vient pour sa part d'Inde. Ifrah donne une description précise des différentes langues (en particulier le sanskrit) et écritures qui peuvent être reliées à sa genèse. Nous avons déjà indiqué des éléments d'ordre général qui ont participé à son apparition. Rappelons simplement ici qu'il est, à l'origine, adapté à la transcription des mots de certaines numérations parlées mais que son caractère écrit permet aussi de s'en distinguer pour résoudre des problèmes spécifiques. Lorsque les premiers occidentaux commencent à l'utiliser, vers l'an mil[101], à la suite des arabes, il ne peut pas être considéré comme étant une traduction écrite des mots de la numération alors parlée. Le système de numération écrite chiffrée aurait pu cependant être adopté rapidement, tout au moins par les lettrés, mais de fait il n'en a pas été ainsi. Nous allons donner brièvement deux éclaircissements à ce phénomène. Ils sont issus des lectures déjà citées et nous les traduisons dans les termes propres à notre travail.

Notre système de numération écrite chiffrée, en tant que système d'écriture de type 3 permet de disposer de techniques particulières pour résoudre des problèmes mettant en particulier en jeu les quatre opérations. Cependant, son fonctionnement est loin de celui d'une numération « agie », en référence à des objets manipulables ou/et des gestes, comme c'est le cas des systèmes de type 1 et dans une moindre mesure de type 2. Ainsi, son efficacité pour faire les opérations comporte une certaine contrepartie : le « coût » de la plus grande complexité du code. Qui plus est, il ne révèle son efficacité que pour des opérations assez complexes et pour des nombres relativement grands[102] : la numération parlée en France, la numération en unités, les abaques ou des systèmes écrits de type 1 (et même 2) sont plus adaptés pour résoudre des problèmes additifs (mettant en jeu des additions ou des soustractions) voire multiplicatifs (mettant en jeu la multiplication). Par ailleurs une grande partie de problèmes « quotidiens » est concernée par ce champ numérique et ces opérations. Ceci peut fournir une première argumentation au fait que, même après son introduction en occident, l'usage du système chiffré décimal de position fut lent à s'imposer comme outil de calcul à la plupart de la population, même chez les scientifiques[103]. Il eut aussi du mal à s'imposer comme « simple » système de notation écrit des nombres désignés dans la langue maternelle, la numération latine la concurrençant longtemps. Si l'interprétation de la numération parlée en France était de l'ordre d'une numération arithmétique multiplicative, est-ce que les « difficultés » auraient été les mêmes ?

b. Le rôle de la mesure, celui des problèmes à résoudre

Ici, nous ne revenons pas sur ce qui a été dit précédemment sur le rôle des problèmes, du champ numérique, et les possibilités de développement mathématique que permettent les différentes numérations. Signalons cependant que pour des additions, des soustractions et des

[100] Certains auteurs, dont Guitel (1975, p. 100), pour expliquer certaines particularités de la numération parlée en France, comme quatre-vingts, émettent l'hypothèse d'un croisement avec une ou des numérations celtes utilisant des groupements de vingt, la numération étant à l'origine fondée sur des groupements de dix. Ceci va dans le sens de notre analyse linguistique du chapitre 3.

[101] Gerbert d'Aurillac (938-1003) est souvent cité comme précurseur en la matière.

[102] C'est-à-dire grands relativement au nombre de groupements à utiliser, ce qui dépend du système adopté.

[103] D'autres facteurs, politiques et religieux en particulier, entrent aussi en jeu, comme par exemple la lutte de l'abacisme contre l'algorisme relatée par Ifrah p. 344-367.

multiplications (voire certaines divisions) et pour un certain champ numérique, la numération parlée en France est performante[104].
Revenons sur la numération en unités en abordant les problèmes consistant à mesurer des grandeurs. En fait nous avons une multitude de numérations utilisant un système d'unités. Nous avons donc des numérations en unités[105].
Nous constatons que beaucoup de systèmes pour mesurer les grandeurs sont utilisés avant que le système métrique ne se soit imposé (en France, ce ne fut qu'en 1789 et ceci nécessita une loi ; il fallut encore un siècle pour qu'il soit d'usage courant). Ils se côtoient et peuvent, tout en étant différents, concerner des mêmes grandeurs[106] à une même époque et parfois même dans des mêmes lieux géographiques (ou tout au moins voisins). Le nom de leurs unités peut être le même (par exemple le pied) sans qu'elles soient égales. Elles font donc référence non seulement à des unités « étalons » différentes mais aussi à des échelles de numération différentes. Il y a donc une grande diversité de numérations en unités, et elles ont (co)existé en utilisant des échelles différentes alors même qu'une unique numération parlée était disponible. En outre, elles permettent de partager une unité, quand celle-ci est sécable comme c'est le cas pour des grandeurs continues, autrement qu'en utilisant des fractions. Il suffit d'introduire une unité plus petite comme sous multiple. Ainsi, nous voyons que les problèmes relatifs à la mesure des grandeurs ne sont pas tout à fait les mêmes que ceux relatifs aux nombres. Le lien entre numération(s) en unité(s) et numération (que ce soit parlée ou chiffrée) est complexe, et ne peut être réduit à un problème de généalogie et encore moins de filiation au niveau historique. Nous notons cependant que le système métrique se fonde sur une numération de base dix et que les écritures chiffrées facilitent alors les calculs. Mais ce système a dû être imposé en France récemment en comparaison des systèmes de numérations en usage, ensuite il a diffusé dans le monde entier comme outil de communication[107].

1.3 Bilan

La mise en perspective dans l'ensemble des numérations met en évidence certains « passages[108] » épistémologiques propres à chaque numération et certains éléments de non-congruence.
Des exemples permettent notamment de mettre en exergue et d'affiner l'analyse de ces « passages » épistémologiques déjà apparus dans l'étude des chapitres précédents : le passage des principes mathématiques à la mise en signes dans une langue ou une écriture, le choix des nombres qui structurent plus finement les mathématiques sous-jacentes. L'étude de la genèse des deux numérations permet d'éclairer la complexité de leurs liens.

D'un côté, la numération écrite chiffrée semble apparaître en Inde à la fois du fait de sa proximité avec certaines numérations parlées comme le sanskrit (mais qui influence qui ?), d'un système d'écriture ancien (une évolution d'un type 2 vers un type 3 ?) et de sa performance pour résoudre certains problèmes (en particulier certains calculs). D'un autre, la

---

[104] Nous pensons en particulier au calcul mental. En ce qui concerne le calcul réfléchi, c'est-à-dire un calcul mental assisté par des notes écrites concernant certaines étapes, des écritures chiffrées peuvent être employées pour traduire à l'écrit les désignations parlées,

[105] Sauf contexte spécifique, <u>la</u> numération en unité fera pour nous référence à celle utilisant les mots unité, dizaine, centaine, millier, million, etc.

[106] Pour une analyse des grandeurs et mesures utilisée pour construire les nombres (en particulier les irrationnels), voir Rouche (1992). Pour une étude de l'utilisation dans le domaine scolaire voir Chambris (2008).

[107] Signalons que les pays anglo-saxons n'utilisent pas nécessairement le système métrique dans la vie courante, et parfois même c'est le cas aussi dans des articles scientifiques.

[108] Comme nous ne nous mettons pas encore dans une perspective d'apprentissage, nous n'utilisons pas le terme « obstacle », mais certains de ces passages sont susceptibles d'être analysés en termes d'obstacles épistémologiques.

numération parlée en France a des origines indo-européennes via le latin. Les nombres dix, vingt, trente, …, cent, y sont présents dès le début. Les nombreuses variations des langues indo-européennes attestent de la marque des influences culturelles en particulier dans l'évolution des representamens. La perte de trace du dix initialement en jeu dans le nom des nombres « onze » et « douze » dans beaucoup de langues indo-européennes (en français cela va même, dans une moindre mesure, jusqu'à seize) renforce la pertinence d'une interprétation strictement ordinale pour les « petits » nombres.
D'autres influences sont à noter, influences qui interviennent dans les numérations écrites et chiffrées avec des poids différents. Ainsi, ceux qui utilisent les numérations le font dans des domaines différents, ce qui engage à résoudre des problèmes d'espèces différentes et donc à utiliser (et faire évoluer) les numérations dans des interprétations différentes : en particulier l'aspect écrit favorise l'exploration de certaines propriétés des nombres. Par ailleurs, les rencontres avec d'autres systèmes sont aussi à mêmes de modifier les systèmes de numération initialement utilisés. Par exemple, les différents systèmes écrits corrélés initialement à la langue sanskrite ont pu permettre l'émergence du système décimal de position. La numération parlée vigésimale celte a pu influencer la numération décimale latine dans la formation de la numération parlée en France.
Ainsi, les systèmes écrits ne sont pas nécessairement congruents aux systèmes parlés au même moment dans le même pays, et nous avons signalé en quoi le système positionnel des écritures chiffrées n'était pas à l'origine celui utilisé pour traduire par écrit les mots de la numération parlée dans le territoire qui est devenu la France.

En ce qui concerne le rôle joué par les numérations en unités, nous notons qu'elles se réfèrent à des principes liés à des changements d'unités. Or ceux-ci n'ont pas de nécessité à être régulièrement obtenus par multiplication par un même nombre (cela dépend en général d'un contexte particulier, comme la monnaie ou un type de grandeur), alors que dans les numérations parlées cette régularité est presque toujours observée et que la numération écrite chiffrée est de base dix. En outre, selon les éléments que nous avons recueillis, l'interprétation de la numération en unités est arithmétique multiplicative, alors que, tout au moins pour les nombres inférieurs à cent, la numération parlée est plus facilement interprétable comme numération ordinale (avec repérants) ou arithmétique additive. Néanmoins, via le système métrique, certains liens sont possibles, à la fois avec la numération parlée en France (par son caractère oral et le choix des nombres d'appui, ceci concerne la deuxième partie de l'interprétant) et le système positionnel des écritures chiffrées (du fait des principes de base dix, ce qui concerne la première partie de l'interprétant).

2. Conclusion de la première partie de la thèse

2.1 Synthèse

a. Les interprétations

Rappelons que le mot interprétation pour une numération fait référence à une analyse telle qu'elle a été entreprise dans le cadre de cette thèse, c'est donc une interprétation faite par le chercheur. Le terme « interprétant » est un emprunt à la sémiotique de Peirce, emprunt dont nous avons signalé les limites. Nous relevons ici quelques aspects dans la perspective d'une étude de l'apprentissage du nombre en classe de CP.

Quels choix ?

Pour présenter les résultats, nous allons donner les différents choix en ce qui concerne les interprétations, en indiquant en quelques mots des arguments sur leur pertinence qui renvoient au travail fait dans cette première partie de la thèse.

L'interprétation de référence est celle dégagée dans le chapitre 2 pour le système d'écriture chiffrée que nous étudions. Son qualificatif « de référence » renvoie au fait que selon la méthode d'analyse que nous avons employée, convoquant la théorie des langages, il n'y a qu'une seule possibilité au niveau de la première partie de son interprétant : une décomposition dite polynomiale renvoyant à des principes de base dix. Ce qualificatif évoque aussi tous les éléments que nous avons dégagés.
Nous avons mis l'accent, en particulier grâce aux procédés concrets de mise en signes du cardinal d'une collection, sur le fait que la numération écrite de position est intrinsèquement liée au fait de coder une organisation. L'organisation est dans ce sens « première », c'est-à-dire qu'elle constitue une première étape nécessaire, elle n'est pas une conséquence des procédés comme c'est le cas pour les numérations parlées. Dans cette étape un premier choix a été fait, c'est le choix de dix pour base. La deuxième étape consiste alors à effectuer un premier choix pour le code : n'utiliser que les coefficients du développement « polynomial » (ce qui le différencie des numérations de type 1 et 2 dans la terminologie d'Ifrah). La troisième étape permet d'achever le processus de codage par le choix d'une « présentation » de ces coefficients : choix de la graphie pour les chiffres (0, 1, ..., 9), indication de la correspondance chiffre/ordre (chiffres écrits sur une même ligne horizontale dont la lecture de droite à gauche est à coupler à une énumération croissante des ordres).
Finalement, nous avons indiqué dans la partie historique un éventail des problèmes et des explorations mathématiques que permettaient d'aborder notre système d'écriture chiffrée. Ceci est dû non seulement à son aspect écrit (communiquer dans le temps et l'espace, considérer les écritures chiffrées comme des « objets » visibles) mais aussi aux caractéristiques de son interprétations (de référence).

L'interprétation arithmétique multiplicative a été utilisée pour analyser la numération parlée en France et pour des numérations en unités.
La première partie de son interprétant peut être liée à une échelle de numération. Pour les numérations en « unités », il n'y a pas lieu d'utiliser une échelle régulière, et ce n'est en effet pas forcément le cas (l'exception notable étant le système métrique). Pour la numération parlée en France, on constate que les appuis multiplicatifs utilisés comportent des régularités qui engagent à une première partie de l'interprétant selon des principes de base. Ces principes sont, au niveau des petits nombres, ceux de la base dix, et de base mille pour les nombres supérieurs à mille. Le fait de retrouver des principes de base a été éclairé par des arguments linguistiques, ce qui d'une certaine manière peut contribuer à expliquer pourquoi les numérations en unités ne sont pas nécessairement interprétables à l'aide du principe de base (alors que c'est en général possible pour les numérations parlées, comme l'indique Ifrah). En outre, nous avons indiqué en quoi l'interprétation multiplicative est plus pertinente pour les nombres supérieurs à mille. Ainsi, dans le cas où la base mille est retenue, pour les nombres inférieurs à mille c'est l'interprétation ordinale qui est cohérente (le premier appui multiplicatif étant mille). Dans le cas où on retient une base dix pour les nombres inférieurs à mille, du fait de la constitution de representamens, les procédés concrets de mise en signes requéraient des étapes et des règles plus nombreuses que pour les autres interprétations. C'est un des arguments qui rend moins pertinente l'interprétation arithmétique multiplicative pour les nombres inférieurs à cent. A noter finalement que les systèmes écrits qui sont les plus

proches d'une interprétation arithmétique multiplicative sont ceux de type 2, ceux qui utilisent les ordres et les coefficients, ce qui fait écho au fait de prononcer les appuis multiplicatifs.

L'interprétation arithmétique additive a été utilisée pour analyser la numération parlée en France. Elle se fonde sur le fait de décomposer un nombre entier quelconque en une somme d'un nombre constitutif de la numération (leur suite est la suite des appuis additifs) et de la différence avec ce dernier. Les appuis additifs, dix, vingt, trente, etc. sont structurés selon une suite arithmétique de dix, puis cent. Pour éclairer cette structure, nous avons développé des arguments linguistiques dans lesquels interviennent des principes d'économie de mots (principe de maximalité). Ce principe est envisageable au-delà de mille, mais l'analyse des representamens montre que cette interprétation est plus pertinente pour les nombres inférieurs à mille (et encore plus pour ceux inférieurs à cent), ce que renforcent l'étude des procédés concrets de mise en signes. A noter que ces procédés nécessitent une étape de moins que ceux de l'interprétation multiplicative. Par ailleurs, les systèmes écrits qui sont les plus proches d'une interprétation arithmétique multiplicative sont certains systèmes de type 1, non pas ceux qui utilisent (uniquement) les ordres, mais des groupements dix, vingt, trente, etc.
Le modèle utilisant les couples (G_i, n_i) nous permet de retrouver une certaine proximité avec l'interprétation multiplicative, mais il existe aussi un certain écart, « trente » tant vu comme « vingt plus dix » et non comme « trois fois dix ». En outre ce modèle convient bien aussi aux numérations en unités en considérant la maximalité forte pour le choix des G_i. Quand les n_i ne sont pas tous identiques, il permet en particulier de rendre compte des numérations en unités « non régulières »[109]. Ceci met en perspective la numération en unité plus régulière qui sert à dénombrer des quantités discrètes utilisant les termes dizaine, centaine, etc.[110].

L'interprétation ordinale a été utilisée pour analyser la numération parlée en France.
Elle comporte une version sans repérant intrinsèquement liée à l'utilisation d'une comptine, c'est-à-dire une suite immuable d'items sans lien entre eux (aspect ordinal), le dernier item prononcé dans une énumération annonce le cardinal. Les premières numérations utilisées par les Hommes sont des numérations ordinales sans repérant, par exemple constituées d'un repérage sur le corps.
Pour les premiers nombres, cet aspect ordinal sans repérant est une nécessité. Ce n'est qu'ensuite qu'une numération peut éventuellement se constituer en système (sémiotique). Cependant, pour la numération parlée en France, l'interprétation ordinale sans repérant est pertinente non seulement pour les nombres jusqu'à dix mais aussi jusqu'à seize (du fait de la non reconnaissance du repérant dix sans une analyse morphologique fine)[111].
Dans l'interprétation ordinale avec repérant que nous avons faite de la numération parlée en France, la suite des repérants peut être analysée comme provenant de la suite des neuf premiers nombres énoncés entre deux repérants. L'analyse syntaxique, la signification du mot « et », l'existence de numérations utilisant sans conteste pour certains nombres un principe d'antériorité réflexive (le latin par exemple), l'interprétation ordinale « stricte » pour au moins les premiers nombres, montre que cette interprétation est (la plus) pertinente pour les nombres inférieurs à cent. En outre, le procédé de mise en signes ne comporte qu'une seule étape.

[109] Nous pensons par exemple à la monnaie utilisée à l'époque de Pascal, douze deniers dans un sol, vingt sols dans une livre, ou encore au système de mesure des longueurs, six pieds dans une toise.
[110] Nous retrouvons comme dans la numération parlée en France la particularité du passage à dix mille puisqu'un terme spécifique n'existe pas pour désigner l'unité « dix mille »
[111] C'est le cas pour les nombres au moins jusqu'à onze ou douze dans beaucoup de numérations d'origine indo-européenne

Tous les procédés concrets de mise en signes mettent en avant l'utilisation de compteurs pour dénombrer des unités ou/et des ordres supérieurs (l'interprétation additive n'utilise pas de compteurs à proprement parler pour obtenir le nom des appuis additifs, mais leur nom est prononcé au fur et à mesure en additionnant dix). En outre, les étapes nécessaires obligent à une structuration au fur et à mesure de la collection. Une organisation en est éventuellement le résultat, mais elle n'en est pas le but.

b. Bilan : de la non-congruence

Dans la numération parlée, tout se passe comme si deux principes coexistaient : l'ordinal pour les nombres inférieurs à cent (i.e. avant de passer à un deuxième type de groupement/appui/repérant), le cardinal pour les nombres supérieurs à seize. Une zone mixte, de seize à cent, permet alors à une interprétation arithmétique additive d'être plus pertinente qu'une interprétation arithmétique multiplicative (l'ordinal avec repérant le restant aussi), de fait puisqu'il n'y a qu'un seul type de groupement en jeu. Ainsi nous pouvons faire l'hypothèse que la structure pour les nombres inférieurs à mille (et plus encore cent) a permis d'une certaine manière d'initier des groupements réguliers, qui, entre autres pour des contraintes linguistiques que nous avons indiquées, a permis de structurer la numération en base mille. D'autres choix sont possibles, preuve en est l'existence des numérations « régulières » de certains pays asiatiques. Pour des grands nombres (supérieurs à mille), il nous semble cependant que la constitution des numérations se fonde plus sur une application de principes que sur des manipulations concrètes d'éléments de collections (par exemple calcul sur des grandes quantités par manipulation de signes ou d'objets représentant des groupements de dix, cent, mille).
D'un point de vue historique, nous avons mis en évidence des points communs entre la numération parlée en France et la numération écrite chiffrée. Le français et le sanskrit sont des langues indo-européennes. Or cette dernière a donné une numération parlée « traduite » à l'écrit par un système d'écriture qui a évolué vers un système chiffré positionnel, système dont est issu celui que nous avons adopté. Nos deux numérations permettent en outre de résoudre des problèmes relatifs aux nombres[112].
Cependant les contraintes dues à la forme orale et à la forme écrite les différencient, et ceci très tôt dans l'histoire, ce qui forge des outils nécessairement différents. Ainsi, pour résoudre les problèmes, les « solutions » écrites n'ont pas été les mêmes que les solutions orales. Les deux systèmes ont donc pu évoluer indépendamment car ne résolvant pas les mêmes problèmes et n'étant pas employés par les mêmes personnes[113]. La question relative au fait de dire les écritures ou d'écrire les mots se pose pourtant, mais pas de la même façon suivant les époques et les utilisateurs. Ainsi, les numérations ne sont pas nécessairement congruentes. Autrement dit, les numérations parlées (en particulier celle parlée en France) n'ont pas évolué sous la seule influence de dire les écritures. Réciproquement les systèmes d'écriture des nombres (en particulier celui de position utilisé actuellement en France) n'ont pas évolué sous la seule influence d'écrire les désignations orales. Ceci permet de comprendre sous un autre angle les différences relevées.
Ainsi, l'écriture chiffrée n'est pas la version écrite de la désignation parlée en France, mais elle peut être utilisée ainsi, comme c'est le cas dans quasiment tous les pays actuellement, et ceci quel que soit le système de numération parlée. La base dix sous-jacente possède des caractéristiques qui permettent des passages vers la numération parlée en France qui, elle, utilise des appuis dix, cent, mille. Cependant notre numération parlée diffère du système positionnel d'écritures chiffrées en particulier pour les nombres inférieurs à cent : par son

[112] Le premier chapitre « *L'ethnologie et la psychologie des nombres : pour une explication des origines* » de l'ouvrage d'Ifrah nous semble en faire la démonstration.
[113] En théorie anthropologique nous pourrions dire qu'ils n'ont pas la même niche écologique.

aspect ordinal, par sa syntaxe qui permet difficilement de retrouver la base dix, et aussi par les procédés de mise en signes. Ainsi dans notre numération parlée les appuis sont prononcés (avec une certaine congruence avec une numération écrite de type 1 ou 2 d'Ifrah mais pas de type 3) et l'organisation n'y tient pas le même rôle. Cette organisation y reste un besoin pratique pour la mise en signes concrète (l'organisation peut « disparaître » au fur et à mesure du procédé, l'utilisation d'un compteur est omniprésente), tandis qu'elle est une étape constitutive du procédé pour la numération écrite chiffrée.

2. 2 Les questions

Nombre de questions se posent encore. Cependant nous avons d'une part éclairé les liens possibles entre les mathématiques et les numérations et d'autre part précisé la non-congruence.
Cette partie a permis d'élargir le champ des interprétations possibles des nombres. Ceci est susceptible ainsi d'élargir le champ des interprétations possibles de ce que font les élèves et aussi le champ des situations à leur proposer. Ce sont ces aspects que nous allons traiter dans la suite de la thèse. Sachant la non-congruence au niveau de l'épistémologie des contenus, quelle en est la conséquence pour l'apprentissage ? Pour l'enseignement ?

Cependant les questions relatives à l'enseignement et à l'apprentissage de la numération ne sont pas neuves. Beaucoup de propositions ont été faites, aussi bien du côté des chercheurs que du côté des auteurs de manuels, les deux étant susceptibles d'être liés. Ces propositions sont un premier niveau prenant en compte les différentes interprétations pour la classe et nous allons l'étudier dans la deuxième partie de la thèse.
Mais, si nous avons choisi d'étudier les signes de la numération comme un langage, c'est aussi parce que ce langage est utilisé en classe pour communiquer. Ainsi les signes, oraux et écrits, peuvent faire référence à différentes interprétations. Certaines de ces interprétations véhiculent un savoir nouveau au CP. Pour la numération écrite chiffrée, les éléments mathématiques ont été dégagés dans l'interprétation de référence. Or, les « mêmes » signes peuvent convoquer des interprétations différentes. En particulier c'est le cas de l'écriture chiffrée qui, tant qu'elle est conçue comme une version écrite des désignations parlées, ce qui est le cas pour les élèves arrivant au CP, est susceptible de faire référence à des principes mathématiques non-congruents à ceux de l'interprétation de référence. C'est aussi le cas des désignations parlées susceptibles d'être reliées à des interprétations différentes. Au-delà des propositions étudiées dans la deuxième partie de la thèse, nous entreprenons une étude de l'emploi de ces différents signes en classe, c'est l'objet de la troisième partie de la thèse.

Les procédés concrets de mise en signes que nous avons indiqués, soulignent qu'un « même » procédé peut se justifier mathématiquement relativement à plusieurs interprétations : cela montre que le côté des élèves est à la fois dans la deuxième partie et dans la troisième partie.
Prendre en compte l'étude de la première partie suppose tout d'abord de faire le lien avec le sujet : passer de l'interprétation sémiotique à l'interprétation de celui qui utilise les numérations. C'est l'objet du chapitre 4, le premier de la deuxième partie de la thèse.

DEUXIEME PARTIE

Apprentissage et enseignement de la numération au CP

Une analyse de l'existant

CHAPITRE IV
Cadre théorique, problématique, méthodologie

Introduction

Le but de la thèse est de mieux comprendre le rôle que peut jouer la non-congruence dans les apprentissages et l'enseignement afin de nous donner les moyens de réaliser le projet annoncé, revisiter les manuels et les recherches puis comprendre les déroulements en classe.
Pour ce faire, dans une première partie nous avons analysé les mathématiques en jeu dans les numérations. Nous avons dégagé puis comparé des interprétations : une seule pour la numération écrite chiffrée de position, trois différentes pour la numération parlée en France (voire quatre en distinguant l'interprétation ordinale avec ou sans repérant). Nous avons étudié le rôle spécifique des collections d'objets et tiré des conséquences sur les liens avec le nombre dans son aspect cardinal et ordinal. Un des résultats est que les interprétations ne sont pas distinguables pour un observateur, que ce soit un chercheur ou un enseignant, qui regarde agir un sujet (un élève) qui met en signes concrètement le cardinal d'une collection d'objets manipulables ou figurés. Mais nous n'avons pas tenu compte des paramètres liés spécifiquement à l'apprentissage.
Il s'agit dans ce quatrième chapitre, le premier de la 2ème partie, de comprendre quels sont les raisonnements, les propriétés utilisées, les cheminements de la pensée qui font écho aux interprétations dégagées. Nous nous situons dans des perspectives d'apprentissage et nous allons considérer un sujet cognitif générique. Plus précisément ici nous voulons nous donner les moyens de comprendre le rôle de la non-congruence, notion précisée dans la partie précédente au niveau des signes, cette fois-ci dans l'apprentissage et dans l'enseignement. Le but est de permettre de poser des questions, de choisir lesquelles nous allons étudier et comment les étudier.

Ce chapitre débute par une présentation des éléments théoriques de la théorie des champs conceptuels que nous retenons, théorie qui va servir de cadre général de référence. Dans un deuxième paragraphe nous contextualisons ces éléments dans le cadre de notre étude et y apportons quelques précisions. La notion de cheminement cognitif est alors développée en ce qui concerne les problèmes que sont susceptibles de rencontrer les élèves dans leur apprentissage de la numération écrite chiffrée de position. Ceci nous permet de définir la notion d'itinéraire cognitif d'enseignement[114] qui précise nos questions dans une problématique d'enseignement au CP. Nous terminons ce chapitre par l'indication du plan de l'étude que nous suivons par la suite.

1. Des éléments de la théorie des champs conceptuels à adapter au contexte de la thèse

Pour constituer notre cadre théorique, nous allons nous baser sur des éléments de la théorie des champs conceptuels (TCC), car ils permettent de répondre aux besoins exprimés. En effet,

[114] Robert & Rogalski (2002) utilisent le mot « itinéraire cognitif » dans un sens différent, puisque c'est ce sont les activités proposées aux élèves qui ont été recomposées par une analyse didactique, analyse dans laquelle l'activité initiée par une tâche est vecteur et témoin des apprentissages. Au niveau conceptuel, pour les élèves, nous avons préféré le terme de « cheminement » pour ne pas introduire de confusion. Il traduit au niveau cognitif la complexité des « façons » de résoudre un problème. C'est au niveau de l'enseignement que nous avons utilisé le terme d'itinéraire, c'est-à-dire ni au niveau des élèves ni au niveau des enseignants. Il nous semble ainsi qu'il ne peut être confondu avec l'emploi qu'en font Robert & Rogalski. Ce terme d'itinéraire, accolé à celui de cognitif, nous semble approprié car il suggère de suivre un enchaînement *a priori* pour articuler les différentes interprétations. Parmi tous les possibles, c'est un choix qui prend en compte à la fois la non-congruence telle qu'elle a été analysée dans la première partie et les cheminements cognitifs des élèves pour résoudre un problème. Le chapitre va permettre de définir avec plus de précision ces notions.

d'après Vergnaud (1991), la TCC est une théorie pragmatique de la cognition dans le sens où elle a été élaborée dans des perspectives d'apprentissage en considérant d'une manière essentielle le contenu. Elle est adaptée à l'étude des apprentissages mathématiques, du fait que son auteur l'a mise en œuvre en particulier pour des concepts mathématiques, exemples emblématiques.
La TCC permet de considérer les problèmes en fonction des mathématiques sous-jacentes : une lecture « verticale » de cette classification permet de considérer l'ensemble des problèmes liés aux nombres entiers (classes de problèmes), une lecture « horizontale » permet de voir les liens avec les concepts connexes (extension du champ conceptuel). Dans cette organisation, nous pouvons alors voir le rôle spécifique des deux « pôles » qui ont été mis en relief dans les deux premiers chapitres, la numération parlée et la numération écrite de position, et ainsi mieux comprendre comment peut intervenir dans les apprentissages le problème de non-congruence précisé au niveau des mathématiques dans la première partie. A travers les notions de signifiant, signifié et (résolution de) problèmes, entrant simultanément en compte dans la conceptualisation, nous pouvons étudier dans un même cadre l'ensemble des propositions et réflexions sur l'apprentissage et l'enseignement.
Ceci nous donne en outre la possibilité, selon les choix que nous ferons sur les questions à traiter et la façon de les aborder, d'analyser les travaux anciens et les déroulements en classe. Précisons qu'en ce qui concerne ces déroulements en classe, la théorie des champs conceptuels se fonde sur le concept de schème (qui peut être inféré d'observations) des sujets/élèves et permet donc de tenir compte de l'historicité « réelle » des concepts des enfants de CP, en particulier de l'aspect développemental. Cependant à elle seule, elle ne peut suffire à prendre en compte tous les facteurs qui influent sur les déroulements en classe, et en particulier les moyens didactiques de mise en œuvre des situations à proposer aux élèves. C'est pourquoi nous serons amené à compléter ultérieurement le cadre théorique.

Par ailleurs, nous devons préciser dans cette introduction que le sujet cognitif générique que nous considérons *in fine* est celui qui arrive en classe de cours préparatoire avec un certain nombre de connaissances que nous aurons à identifier. Nous visons des apprentissages au sein d'une institution, celle de l'éducation nationale de nos jours. En outre, le cadre théorique doit mettre spécifiquement en relief la non-congruence des numérations dans le processus de conceptualisation. C'est sous ces angles que nous utilisons la TCC, ce qui nécessitera des apports complémentaires et l'élaboration d'outils théoriques propres à cette recherche.

Dans ce premier paragraphe, nous indiquons tout d'abord les points essentiels que nous retenons de la TCC afin de préciser en quoi elle permet de prendre en compte le problème décrit précédemment tout en respectant notre approche.

1.1 Les points essentiels retenus

Vergnaud (1991), indique qu'un concept se construit à travers l'exploration de propriétés, elles-mêmes mises en œuvre dans la résolution de problèmes en situation[115] : « *<u>Une approche psychologique et didactique</u> de la formation des concepts mathématiques, conduit à considérer un concept comme un ensemble d'invariants utilisables dans l'action. La <u>définition pragmatique</u> d'un concept fait donc appel à l'ensemble des situations qui constituent la référence de ses différentes propriétés, et à l'ensemble des schèmes mis en œuvre par <u>les sujets</u> dans ces situations* »[116]. Certains problèmes et certains signifiants sont

[115] Le mot situation est à prendre ici dans un sens général, celui des psychologues, et non pas dans le sens que donne Brousseau. Ce point sera précisé dans la suite du paragraphe et dans les paragraphes suivants.
[116] C'est nous qui soulignons ces passages extraits de Vergnaud (1991).

propres au concept visé. Un concept est donc constitué d'un triplet : la référence (les situations donnant du sens au concept), le signifié (l'ensemble des invariants sur lesquels repose l'opérationnalité des schèmes mis en œuvre dans les situations de la référence) et les signifiants (ensemble des formes d'expression, langagières ou non, utilisées dans les situations[117]). Revenons sur les termes de schème, situation et signifiant.
Vergnaud (1991), indique qu'un schème est l'organisation invariante de la conduite d'un sujet générique pour une classe de situations donnée. Cette organisation peut être algorithmique ou non, implicite ou non. Un schème est composé de règles d'actions et d'anticipations (il entraîne une suite d'actions ayant un but), mais aussi d'invariants opératoires (connaissances-en-acte) et d'inférences (« raisonnements »). Un schème est une totalité dynamique, structurée et fonctionnelle dont la finalité première est la seule efficacité, Vergnaud & Récopé (2000), Pastré (1997). L'opérationnalité d'un schème repose sur des conceptualisations implicites. Les connaissances-en-acte sont le cœur des schèmes dans le sens où elles se réfèrent directement aux contenus notionnels. C'est pourquoi nous allons les décrire plus précisément et nous nous appuyons en particulier sur l'article de Pichat (2001): « […] *en tant qu'invariant opératoire, les connaissances-en-acte désignent des catégories de pensée tenues pour pertinentes et fonctionnelles (concepts en acte) et des propositions pragmatiques tenues pour vraies dont dérivent des possibilités d'action (théorèmes-en-acte)* ». Nous retenons de cet article que les concepts-en-acte et les théorèmes-en-acte sont tous les deux guidés par la finalité de l'action, mais qu'ils opèrent à deux niveaux différents. Le niveau le plus « global » est celui des concepts-en-acte. Ils permettent au sujet de trier et traiter les informations venant du réel en fonction de ses représentations[118] (aspect épistémologique), et en fonction de l'efficacité de son action pour atteindre des buts (aspect opératoire). Le niveau le plus « local » est celui des théorèmes-en-acte. Ils sous-tendent l'activité représentative en termes de propriétés, de relations et de conditions (nous y voyons le lien avec les contenus notionnels) mais cette fois-ci appliquée à des objets (instanciation) afin d'assurer l'efficacité de l'action (Vergnaud, 1996). Instanciation et efficacité permettent alors aux théorèmes-en-acte d'offrir au sujet des règles d'action possibles. Les théorèmes-en-acte ont donc pour le sujet une visée pragmatique (savoir ce qui « marche ») et non épistémique (savoir pourquoi cela « marche »). Théorèmes-en-acte et concepts-en-acte fonctionnent de manière dialectique : les concepts-en-acte sont de type fonctions propositionnelles avec un ou plusieurs arguments alors que les théorèmes-en-acte sont des propositions instanciées de ces fonctions propositionnelles (Vergnaud, 1991).
Expliquons la façon dont nous comprenons dans notre travail les connaissances-en-acte. Face au texte « Soient f(x)=2x+3 et g(x)=5x-2, déterminer x tel que f(x)=g(x) », les concepts-en-acte du sujet l'amènent à considérer qu'il devra résoudre une équation du premier degré (« résoudre » est relatif à l'aspect opératoire et « équation du premier degré » à l'aspect épistémologique). Quand il va s'agir de passer à la résolution de l'équation proprement dite, il va falloir tenir compte de la forme de l'équation (instanciation) afin d'assurer l'efficacité de son action. Il peut utiliser par exemple le théorème-en-acte « je passe 5x dans le membre de gauche en changeant son signe ». La question pour le sujet n'est pas alors de se demander pourquoi « c'est effectivement efficace » (il n'y a pas de visée épistémique) mais de savoir que « ça marche » (visée pragmatique).

Dans la théorie des champs conceptuels, un concept se construit à travers la résolution de problèmes proposés dans des situations, ces problèmes lui sont spécifiques et sont identifiables grâce aux schèmes qui sont à l'œuvre. Revenons sur ce terme de situation en citant Vergnaud (1991) :

[117] Ce qui comprend entre autres les désignations orales et écrites des nombres.
[118] L'insertion de ces informations dans les représentations est l'aspect structural des connaissances-en-acte.

« *Le concept de situation a été beaucoup renouvelé par Guy Brousseau, qui lui a donné non seulement une portée didactique qu'il n'avait pas en psychologie, mais aussi une signification dans laquelle la dimension affective et dramatique intervient autant que la dimension cognitive. La mise en scène des concepts et des procédures mathématiques est un art qui s'alimente aussi bien à la psychologie sociale qu'à l'épistémologie et à la psychologie des mathématiques. Nous ne prendrons pas le concept de « situation » avec toute cette signification ici ; nous nous limiterons au sens que lui donne habituellement le psychologue : les processus cognitifs et les réponses du sujet sont fonction des situations auxquelles ils sont confrontés.* »
Ceci indique précisément la notion de situation qui intervient dans la TCC. Mais elle ne peut être comprise indépendamment de la notion de champ conceptuel. Le champ conceptuel est l'ensemble des situations impliquant les schèmes propres à un concept mais aussi l'ensemble des autres concepts et théorèmes qui permettent d'analyser ces situations et donc des concepts et théorèmes connexes. Par exemple, pour comprendre la tâche à faire dans un problème d'écriture du cardinal d'une collection d'objets, il faut aussi mobiliser des concepts sur le nombre, comme la cardinalité. Les problèmes relatifs à un champ conceptuel s'obtiennent à l'aide de relations de base avec des données et des inconnues. En tenant compte de l'épistémologie des savoirs en jeu et de leur immersion dans un ensemble d'informations plus ou moins pertinentes, nous retirons de l'exemple de Vergnaud (1991, p. 154) que les problèmes se complexifient alors selon trois grands facteurs : la structure du problème (combinaison des relations de base), les variables didactiques (en particulier les valeurs numériques), les variables relatives au domaine d'expérience. Pour compléter la description de la notion de champ conceptuel, citons encore Vergnaud (1991), l'extrait qui suit est la suite directe de l'extrait précédent :
« *Et nous retiendrons deux idées principales :*

- *celle de variété : il existe une grande variété de situations dans un champ conceptuel donné, et les variables de situation sont un moyen de générer de manière systématique l'ensemble des classes possibles ;*
- *celle d'histoire : les connaissances des élèves sont façonnées par les situations qu'ils ont rencontrées et maîtrisées progressivement, notamment par les premières situations susceptibles de donner du sens aux concepts et aux procédures que l'on veut leur enseigner.* »

Ainsi, avec les notions de variété et d'historicité, deux axes se profilent pour explorer le champ conceptuel. Un premier axe prend en compte les problèmes selon leur complexité « notionnelle », c'est-à-dire privilégiant l'épistémologie des contenus et les relations avec les autres concepts. Un deuxième axe prend en compte les connaissances du sujet, leur histoire.

Enfin, la conceptualisation s'opère grâce à des résolutions de problèmes situés mettant en œuvre des schèmes constitutifs du concept, et cette résolution s'accompagne de l'emploi de signifiants eux aussi spécifiques. C'est ce troisième pôle du concept que nous allons préciser dans le cadre de notre travail. Quelle est la fonction de ces signifiants ? Voilà ce qu'en dit Vergnaud (1991) :
« *Dans la théorie des champs conceptuels, cette fonction est triple :*

- *aide à la désignation et donc à l'identification des invariants : objets, propriétés, relations, théorèmes*
- *aide au raisonnement et à l'inférence ;*
- *aide à l'anticipation des effets et des buts, à la planification, et au contrôle de l'action.* ».

Nous comprenons que si la conceptualisation comprend l'utilisation efficace des relations et propriétés en tant qu'outils pour résoudre ces problèmes, elle comprend aussi leur transformation en objet de pensée. Les signifiants sont des moyens de transformer des concepts outils en concepts objets. Dans cette transformation d'outil en objet, la théorie des champs conceptuels rejoint explicitement la dialectique outil/objet que Douady (1987) utilise dans le champ de la didactique. Ainsi pour nous, les formes d'expression, écrites, orales ou gestuelles, symboliques, figuratives ou autres sont considérées comme des signifiants dans la mesure où elles permettent cette objectivation, le fait de pouvoir communiquer avec les autres mais aussi avec soi-même sur le concept : elles participent à la représentation et aident à la pensée. Les signifiants permettent d'évoquer des schèmes et des situations relatifs à un concept sans préciser le contexte, l'instanciation. Ils permettent de considérer le concept comme un objet de pensée et donc d'explorer certaines de ses composantes. Cette abstraction permet un processus de contextualisation/décontextualisation/recontextualisation du concept.

Un certain nombre de points précédents donnent des indications sur le processus d'apprentissage tel qu'il est envisagé dans la théorie des champs conceptuels. Ajoutons que d'une manière pragmatique, Vergnaud (à la suite de Piaget) envisage à partir des connaissances anciennes des apprenants deux leviers principaux pour jouer concrètement sur ce processus d'apprentissage. Le premier est celui de transfert, généralisation, décontextualisation qui consiste à étendre le champ d'application des schèmes. A l'inverse, le deuxième, celui de restriction et accommodation, consiste à montrer les limites d'application opérationnelle des schèmes. Le sens qu'un sujet donne alors à un concept est « *l'ensemble des schèmes qu'il peut mettre en œuvre pour traiter des situations auxquelles il lui arrive d'être confronté* » et qui concernent le champ conceptuel, c'est aussi « *l'ensemble des schèmes qu'il peut mettre en œuvre pour opérer sur les symboles, numériques, algébriques, graphiques et langagiers* », Vergnaud (1991). Ainsi, c'est grâce à l'utilisation effective de ces deux leviers que nous dirons que le concept prend du sens pour l'apprenant et nous retenons ces éléments pour la suite de notre travail.

1.2 Précisions sur le lien interprétation/sujet

Rappelons que le mot interprétation fait référence à l'analyse des numérations que nous avons faite dans la première partie de la thèse.
Les concepts généraux de la TCC présentés comme nous l'avons fait peuvent laisser penser que la relation signifiant/signifié est établie et identifiable par le chercheur grâce à une analyse du système sémiotique. Elle serait traduite au niveau du sujet dans l'emploi d'invariants opératoires canoniques qui sont garants de la réussite des problèmes du champ conceptuel auquel se réfère le signifiant utilisé. Or, il n'en est rien. En effet des raisonnements corrects, faisant intervenir des théorèmes-en-acte pertinents, peuvent être utilisés chez un sujet de manière durable en lien avec des écritures ou symbolisations fausses, sans que ce sujet ne parvienne à une utilisation correcte de ces dernières. Ainsi, un sujet peut utiliser des signifiants avec des connaissances-en-acte correctes et ceci de manière durable et efficace sans nécessairement utiliser les propriétés que le chercheur a identifiées dans les signifiants utilisés. Pour nous, cela induit que les situations que rencontre le sujet n'assurent pas que telle ou telle interprétation que nous avons dégagée soit en jeu dans la relation signifié/signifiant que convoque alors le sujet (soit-il « générique »). Cependant, nous faisons l'hypothèse que la fréquentation d'une certaine variété de problèmes décrite précédemment afin de mettre en œuvre les deux leviers d'apprentissage permet à l'enseignement de proposer des situations qui vont favoriser une interprétation du sujet faisant écho aux interprétations dégagées dans la première partie de la thèse. Cette hypothèse n'est pas questionnée en elle-même dans la thèse, mais la construction de notre cadre théorique va nous mener à l'aborder, en particulier grâce aux relations problèmes/stratégies/théorèmes-en-acte. En outre, si cette hypothèse est importante pour notre recherche, elle l'est aussi pour élaborer des outils pour l'enseignement.

Par ailleurs, l'étude sémiotique des systèmes de numération que nous avons faite y prend une place particulière.
Pour garder en mémoire ces remarques importantes (ce décalage potentiel), nous écrirons « signifié(s) » à la place de « signifié ».[119]

2. Cadre théorique

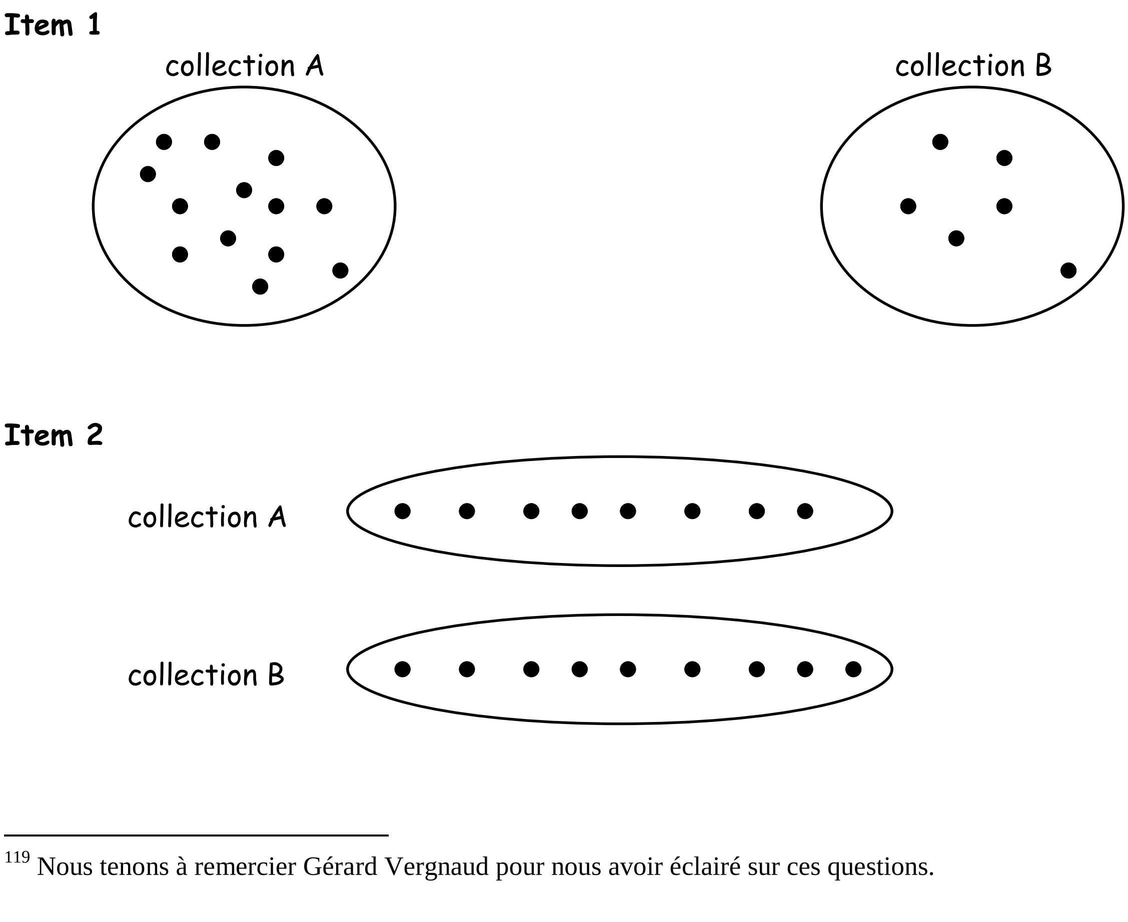
Nous reprenons en les contextualisant les éléments théoriques dégagés précédemment.
Les questions que nous nous posons concernent les problèmes qui vont permettre à un élève de construire ses connaissances, de conceptualiser. Quels sont les enjeux d'apprentissage en ce qui concerne la numération de position ? Quelles sont les mathématiques à l'œuvre dans la résolution de tel ou tel problème ? Quel rôle est joué par les connaissances anciennes sur le nombre et notamment la numération parlée ? Pour répondre à ces questions nous devons préciser certains éléments de la théorie des champs conceptuels relevés précédemment pour les contextualiser dans le cadre de la thèse.

2.1 La comparaison du cardinal de deux collections de points

Pour motiver nos choix, en particulier pour comprendre le travail qui doit être accompli dans l'analyse de l'apprentissage de la numération de position, nous allons partir d'un exemple, celui de la comparaison du cardinal de deux collections de points. Il est tiré de Fénichel & Pfaff (2004, 2005).

a. Description

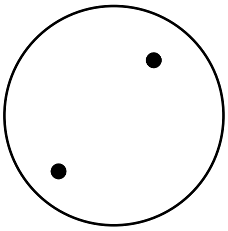
« *Comparer dans chaque cas les deux collections*»



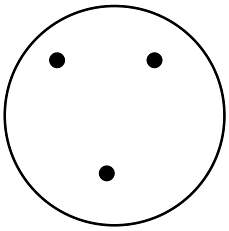
[119] Nous tenons à remercier Gérard Vergnaud pour nous avoir éclairé sur ces questions.

Item 3

collection A

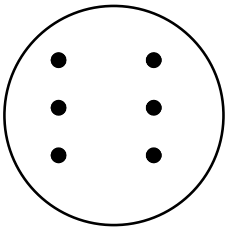


collection B

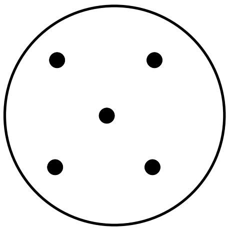


Item 4

collection A

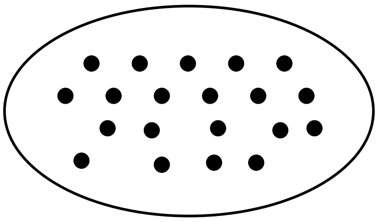


collection B

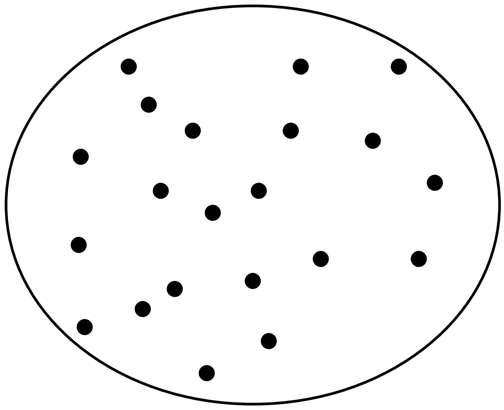


Item 5

collection A

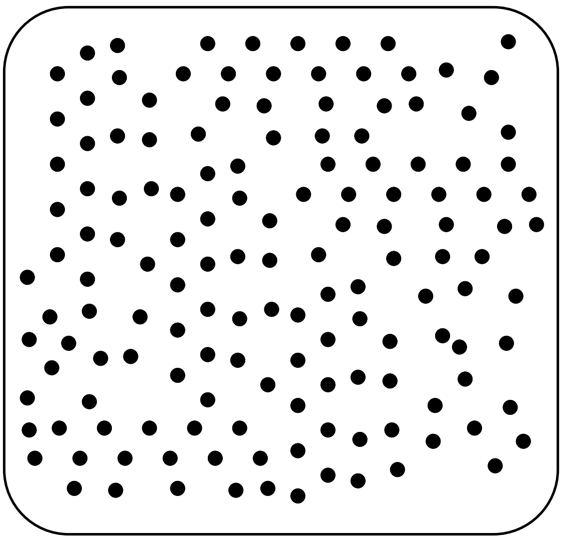


collection B

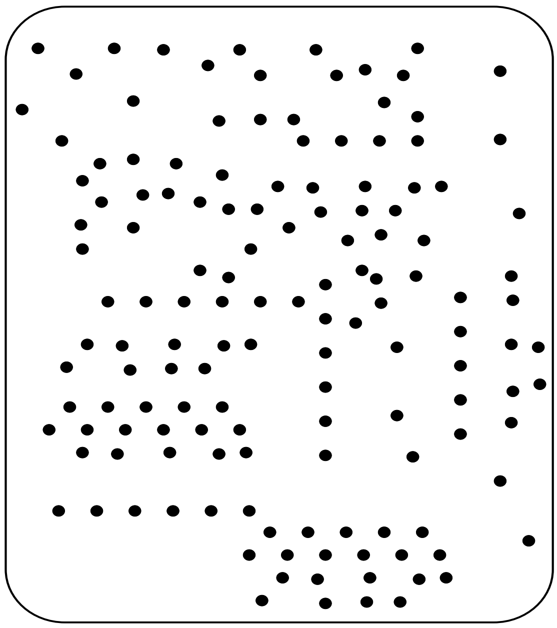


Item 6

collection A



collection B



Chaque item de ce problème peut être proposé aux élèves de CP. Dans notre analyse, nous retiendrons la consigne « comparer les deux collections selon leur quantité ». Nous allons indiquer uniquement quatre stratégies[120] de comparaison : ce ne sont pas les seules, mais elles vont nous permettre d'éclairer le modèle de conceptualisation du nombre exposé ensuite[121]. Elles ont été choisies pour illustrer notre propos. En particulier les deux dernières ont été choisies pour montrer certains liens entre les signifiants en jeux dans la numération parlée et ceux de la numération écrite chiffrée. Une analyse plus complète est entreprise dans le paragraphe 3.3 de ce chapitre.
<u>Stratégie 1</u> : comparaison globale visuelle.
<u>Stratégie 2</u> : comparaison élément par élément (ici point par point).
<u>Stratégie 3</u> : obtention d'une désignation orale du cardinal de chaque collection (1ère méthode) puis mise en mémoire puis comparaison de ces désignations. Cette première méthode consiste à obtenir les désignations orales par le comptage des objets de chacune des deux collections : énumération des éléments de la collection couplée à la récitation de la comptine numérique en français, le dernier nombre énoncé désigne le cardinal. Par suite, pour se souvenir de chacune des deux désignations orales, celles-ci sont notées par une écriture chiffrée. Finalement, la comparaison des deux désignations orales (notées ici à l'aide d'une écriture chiffrée) se fait à l'aide de la récitation de la comptine numérique : la désignation prononcée en premier indique un nombre inférieur au nombre dont la désignation est prononcé en deuxième (ou n'est pas encore prononcée).
<u>Stratégie 4</u> : obtention d'une désignation orale du cardinal de chaque collection (2ème méthode) puis comparaison de ces désignations. Cette deuxième méthode d'obtention des désignations orales des cardinaux consiste à passer par la désignation écrite chiffrée. Il s'agit de faire des groupements de dix, puis éventuellement des groupements de groupements de dix et de traduire l'organisation obtenue par une écriture chiffrée : l'organisation permet de passer à l'écriture chiffrée suivant un certain algorithme que nous ne décrirons pas ici. Par la suite chaque écriture chiffrée est traduite en sa désignation parlée en France[122]. Finalement la comparaison des désignations orales se fait par la même méthode que pour la stratégie précédente. Notons ici que la mise en mémoire a été effectuée aussi grâce à l'écriture chiffrée mais, cette fois-ci, obtenue en codant l'organisation de la collection.

La question que nous allons tout d'abord aborder est le lien entre problème, stratégie, connaissances-en-acte et théorèmes (ou propriétés mathématiques). Précisons-la à travers ces exemples. Il s'agit de faire une étude *a priori* des théorèmes-en-acte à la lecture des stratégies inférées de l'analyse du problème : quelles en sont les limites ?

b. Des situations aux problèmes, des schèmes aux connaissances-en-acte.

Un schème peut-il être inféré de l'utilisation d'une stratégie ? Un exemple peut nous persuader que non : la stratégie 1 peut être adoptée pour l'item 6 pour des raisons non mathématiques, par exemple du fait de ne pas disposer d'assez de temps ou de ne pas être sûr d'une autre stratégie. Bien qu'utilisant une stratégie non efficace, le sujet peut donc savoir que

---

[120] Le mot stratégie est utilisé comme en théorie des situations didactiques, TSD, voir par exemple Brousseau (1998), dans une analyse *a priori*, le mot procédure l'est pour des stratégies observées. Nous faisons cette distinction dès maintenant car nous aurons à utiliser la théorie des situations didactiques ultérieurement. La TSD est « compatible » avec la TCC, voir par exemple Flückiger (2004) mais aussi Vergnaud (1991). Il n'est pas nécessaire dans la thèse d'entrer dans une discussion théorique pointue sur leur articulation précise. Nous notons que les mêmes mots utilisés ne renvoient pas au même cadre. Vergnaud par exemple utilise le mot procédure pour décrire comment procède un élève pour résoudre un problème, sans aller jusqu'à l'analyser en termes d'invariants opératoires.
[121] Ce type de problème et de stratégie est analysé de manière plus détaillée ultérieurement.
[122] Cette suite proposée n'est évidemment pas obligatoire, mais elle sert notre propos.

sa stratégie est peu sûre et comprendre les enjeux du problème. Ainsi, se pose la question d'appréhender un schème en fonction d'éléments cognitifs propres aux enjeux mathématiques. En effet, nous nous intéressons moins à comprendre la démarche générale de tel ou tel sujet dans telle ou telle situation (au sens de Vergnaud), que de décrire les liens entre les actions et la notion en jeu : notre sujet est donc un sujet cognitif générique aux prises avec des problèmes d'essence mathématique. Dans notre recherche, il nous importe de savoir si le sujet utilise des signifiants (ou non), lesquels, pour quel usage et quels sont les liens avec les mathématiques. Notre intention est par exemple de comparer les deux utilisations différentes de l'écriture chiffrée : l'une mettant en jeu des propriétés mathématiques liées avec l'interprétation de référence de la numération chiffrée de position, au contraire de l'autre. Or, du point de vue psychologique, l'activité du sujet en situation de résolution de problème est fonction de sa définition de la situation. Nous n'allons donc pas considérer ici les situations au sens de Vergnaud. Plutôt que celui de situation, nous utiliserons la notion de problème au sens où Brousseau (1998, chapitre 2, p.113) l'entend, c'est-à-dire dans une dialectique avec les obstacles épistémologiques[123]. Le problème de comparaison que nous avons évoqué en est un exemple. Nous notons cependant que l'utilisation du terme de problème au lieu de situation est réducteur dans la théorie des champs conceptuels puisqu'il évoque plus un contexte purement mathématique que psychologique et donc fait référence à moins de variables qu'un psychologue ne le fait. Cependant ce point de vue se justifie du fait que nous voulons tout d'abord définir le concept à partir de considérations de contenu mathématique sans prendre en compte, tout au moins dans un premier temps, les conceptions spécifiques de tel ou tel apprenant[124] et plus généralement les variables concernant le sujet. Ce choix est clairement rendu possible par la théorie des champs conceptuels en considérant les éléments centraux du schème que sont les connaissances-en-acte dans la définition d'un concept, définition qui ne fait pas entrer en jeu des facteurs spécifiques à un sujet[125], autres que des considérations générales cognitives, à la différence du processus « général » de conceptualisation. En conséquence, en nous centrant sur les connaissances-en-acte contenues dans des schèmes relatifs à des problèmes spécifiques, nous pouvons substituer à la notion de situation de Vergnaud celle de problème au sens de Brousseau.

2.2 Vers une modélisation de l'apprentissage de la numération chiffrée de position

En tenant compte des éléments théoriques précédents, nous voulons nous donner les moyens d'analyser le processus de conceptualisation qui concerne les écritures chiffrées. Nous précisons d'une part la place que doit y prendre la variété des problèmes (classes de problèmes et champ conceptuel) ainsi que l'historicité de la conceptualisation chez un sujet et d'autre part, la mise en œuvre des deux leviers d'apprentissage concernant les schèmes : généralisation et restriction. Dans le cadre de notre recherche, nous retenons trois éléments non indépendants du processus d'apprentissage : la variété des problèmes, l'agencement temporel de ces problèmes et la dialectique concept-outil/concept-objet. Indiquons que ces éléments et les sous éléments qu'ils comportent ont pour fonction de fournir des critères pour

[123] Ceci rendra par ailleurs plus claire l'usage du concept de situation dans la troisième partie de la thèse, dans laquelle le mot situation ne signifie pas problème, mais est employé dans une approche proprement didactique au sens de la théorie des situations didactiques.

[124] Pour des explications complémentaires, voir par exemple le cours de Grenier (2007), de master 2 « Eléments d'épistémologie et de didactique » à l'université de Grenoble, qui cite notamment Artigue, Vergnaud et Balacheff.

[125] Rappelons ce qu'en dit Vergnaud (1991) : « *La définition pragmatique d'un concept fait donc appel à l'ensemble des situations qui constituent la référence de ses différentes propriétés, et à l'ensemble des schèmes mis en œuvre par les sujets dans ces situations* ».

l'analyse de ce processus. Cependant, comme dans toute tentative de découpage du réel, dans la pratique il est parfois difficile de les isoler. A chaque fois que nous nous y référerons, nous considérerons l'ensemble des relations qu'ils entretiennent entre eux, même si nous ne soulignons pas toujours l'influence de l'un sur l'autre. Nous nous plaçons du côté de celui qui veut saisir la complexité du processus d'apprentissage pour un sujet cognitif générique : nous cherchons des paramètres sur lesquels jouer dans la conceptualisation en vue de l'apprentissage et de l'enseignement.
Pour la présentation de ces éléments, nous allons nous appuyer sur la relation entre les quatre stratégies relevées dans l'exemple ci-avant (parmi une multitude non donnée ici) et les théorèmes-en-acte et concepts-en-acte. Nous reviendrons finalement sur cette relation.

a. Cadre théorique

Les exemples donnés ici font référence aux stratégies des problèmes de comparaison de cardinaux de collections du paragraphe précédent 2.1.

La variété des problèmes et la disponibilité des connaissances

Le premier élément est relatif aux problèmes mathématiques qui interviennent dans un concept. La teneur de la conceptualisation d'un sujet à propos de tel ou tel concept est analysable d'une part à l'aide de quatre critères sur la variété des problèmes et d'autre part en estimant la pertinence des connaissances-en-acte mises en œuvre. En ce qui concerne la variété des problèmes, les quatre critères retenus sont : l'implication d'autres concepts dans les connaissances-en-acte mobilisées, la complexité des problèmes, leur « habillage » et les autres variables didactiques comme les nombres en jeu.
Dans les exemples que nous avons donnés, les concepts-en-acte du sujet l'amènent à considérer qu'il devra résoudre un problème de comparaison de quantités d'objets visibles : ceci suppose donc des connaissances sur le nombre entier, un certain degré de conceptualisation. Nous y voyons à ce stade l'implication d'autres concepts dans les connaissances-en-acte mobilisées, implication qui peut se percevoir quand on considère les deux premières stratégies. En effet, l'analyse de ces stratégies est susceptible de mener à la mise en évidence de théorèmes(-en-acte) relatifs au nombre entier naturel qui n'ont pas été dégagés dans l'interprétation des numérations[126] : par exemple le fait que la relation d'équipotence entre deux ensembles (avoir le même cardinal) ne dépend pas de la bijection réalisée. Nous faisons ici référence au champ conceptuel, c'est-à-dire à l'ensemble des problèmes impliquant le concept ainsi que l'ensemble des concepts et connaissances-en-acte qui entrent en jeu. En effet, si les problèmes s'organisent en classes, de sorte qu'une classe de problèmes se détermine grâce à un ensemble de connaissances-en-acte qui lui sont propres, ces classes peuvent faire appel à des connaissances-en-acte présentes dans plusieurs concepts en même temps. Un concept est donc lié à d'autres concepts. Une autre illustration consiste en l'implication des problèmes arithmétiques dans la conceptualisation du nombre : de ce fait, **le concept central utile à notre étude n'est pas tant celui de numération que celui de nombre**. Les désignations orales et chiffrées étant alors des systèmes de signifiants et les problèmes arithmétiques un type de problème à considérer.
Le fait de « comprendre » la tâche à réaliser à l'aide de concepts-en-acte se traduit par l'ouverture d'un champ de possibles en ce qui concerne la résolution. Quand il va s'agir de passer à cette résolution (instanciation), il va falloir tenir compte de la présentation des collections, ce sont alors les théorèmes-en-acte qui vont intervenir. Avec l'analyse de cette instanciation nous allons préciser les autres critères retenus pour le premier élément concernant la variété des problèmes.

[126] Nous aurons à revenir sur les difficultés théoriques et pratiques que génèrent les liens entre stratégies/théorèmes-en-acte/propriétés mathématiques.

Nous pouvons distinguer dans les différentes stratégies présentées le nombre et l'organisation des théorèmes-en-acte potentiellement en jeu. Nous voyons que ce nombre ne peut être déterminé intrinsèquement. Il est lié en particulier au nombre d'étapes dans la procédure effectivement utilisée. Cependant le problème offre un nombre limité de stratégies envisageables (nous n'en avons donné ici que quatre) et nous pouvons étudier l'ensemble de ces stratégies selon les nombres d'étapes qui sont en jeu. C'est ce que nous nommerons la complexité du problème. Remarquons ici qu'une même étape apparaît dans les stratégies 3 et 4, elle concerne le codage du cardinal d'une collection par un signifiant. Elle ne peut être redécoupée sans choisir un signifiant et mettre en jeu certaines de ses propriétés. En ce sens nous pouvons décomposer toutes les stratégies en étapes élémentaires qui sont susceptibles d'être reliées à des théorèmes-en-acte. Ceci nous donne en outre un outil pour relier les signifiants (quand ils interviennent) et les théorèmes potentiellement en-acte. Ce que nous nommons complexité d'un problème concerne donc ici de manière restrictive la potentielle existence d'un nombre plus ou moins grand d'étapes nécessaires à sa résolution mettant en jeu en particulier des théorèmes(-en-acte).

Nous utilisons le terme d'habillage pour indiquer les paramètres qui ne concernent pas le problème mathématique en lui-même (tâches, étapes, théorèmes, définitions, propriétés) mais qui permettent de le contextualiser : données supplémentaires et inscription dans un domaine d'expérience réel ou évoqué. En ce qui concerne notre exemple, l'habillage y est assez réduit : il n'y a pas de données inutiles, pas de référence à des termes qui peuvent induire une compréhension erronée de la tâche. En fait les termes « comparer » et « quantité » employés ensemble donnent du sens pour un sujet dès que certains concepts-en-acte sur le nombre ont été construits auparavant. Il n'y a pas de référence explicite à un domaine d'expérience, ou plus exactement le domaine d'expérience consiste en la comparaison de collections composées d'éléments figurés. Signalons par ailleurs que la non référence à une situation vécue ou déjà rencontrée (par exemple par le biais d'une histoire ou l'évocation d'une situation quotidienne dans laquelle les élèves ont été acteurs) n'est pas synonyme de plus grande facilité pour l'élève. C'est un point dont nous devrons tenir compte dans la thèse quand il va s'agir d'analyser des déroulements en classe. Il ne concerne cependant pas directement les mathématiques que nous extrayons des connaissances-en-acte. Un élément est cependant à noter dans notre exemple, c'est le fait que les collections ne sont pas manipulables, ce qui nous mène aux variables didactiques.

La notion de variable didactique est empruntée à la théorie des situations, nous la reprenons dans le cadre de la TCC. Notons que l'habillage et la complexité peuvent être considérées comme des variables didactiques, mais il nous a semblé utile de les distinguer par rapport aux notions de la TCC que nous avons utilisées. Nous allons relier la notion de variable didactique à celle de théorème-en-acte. Nous pouvons considérer le problème de notre exemple comme un problème de comparaison, selon leur nombre de points, de deux ensembles de points disposés de façon X et de cardinaux respectifs y et z. Les variables didactiques sont alors de deux ordres : la présentation matérielle des collections et le nombre d'éléments en jeu. Elles ne peuvent être considérer de manière indépendante. En effet, par exemple dans l'item 2, le nombre de points est important, mais leur disposition permet tout de même de rendre la stratégie 2 efficace. Par ailleurs les stratégies 1 et 2, en se restreignant aux associations visuelles, sont inefficaces en ce qui concerne l'item 6. Cette notion d'efficacité est donc fortement liée à ces variables didactiques. Nous retenons que jouer sur les variables didactiques permet de réduire ou d'augmenter le champ des possibles, c'est à dire la disponibilité de stratégies efficaces et par là même l'opérationnalité de tel ou tel théorème-en-acte. En résumé, les variables didactiques sont les éléments du problème sur lesquels jouer.

Elles ne changent pas l'éventail des stratégies, donc des théorèmes-en-acte, susceptibles d'être utilisés indépendamment de la nature des variables, mais elles peuvent entraîner une non efficacité ou une performance moindre de certains de ces théorèmes-en-acte et donc de la stratégie (la notion d'efficacité est abordée un peu plus loin dans ce paragraphe).

La pertinence des théorèmes-en-acte mis en œuvre est évaluée quant à elle en considérant leur réussite (réponse mathématiquement exacte) ainsi que leur efficacité (en termes de temps et de fiabilité).
Ainsi, nous regardons, outre la variété des problèmes, le fait pour le sujet de disposer d'un panel de stratégies adéquates selon les critères du problème (y compris des critères liés à la rapidité de résolution), de choisir une d'entre elles puis de l'appliquer avec succès. Rappelons que le sens qu'un sujet donne à un concept est « *l'ensemble des schèmes qu'il peut mettre en œuvre pour traiter des situations auxquelles il lui arrive d'être confronté* » Vergnaud (1991).
Cette potentialité visée par l'apprentissage est à rapprocher des trois niveaux de mise en fonctionnement des connaissances de Robert (2007) : technique, mobilisable et disponible. Nous reprenons ces notions pour les intégrer dans notre cadre théorique car elles nous paraissent préciser un point de la théorie des champs conceptuels.
Le niveau technique de mise en fonctionnement des connaissances est celui concernant le fonctionnement non erroné d'une procédure ou d'une connaissance indiquée explicitement et dans un certain nombre de contextes précis : par exemple être capable de compter les présents d'une classe à l'aide de la comptine numérique quand l'enseignant le demande.
Le niveau mobilisable concerne l'emploi non erroné et pertinent des procédures et connaissances dans un contexte usuel, facilement reconnaissable par l'élève (du domaine d'expérience auquel il est habitué) dans lequel il s'est déjà exercé, mais qui laisse une certaine marge de décision sur la méthode à utiliser, par exemple être capable de commander les plateaux repas nécessaires à une sortie de la classe.
Le niveau disponible concerne l'utilisation de procédures et connaissances dans un contexte où celles-ci ne sont pas convoquées *a priori*, par exemple lors d'une version du « jeu du déménageur »[127].
L'emploi des connaissances aux deux derniers niveaux peut requérir des étapes alors que ce n'est pas le cas au premier. C'est pourquoi les problèmes concernant le premier niveau comportent des tâches dites simples et isolées. Rendre les stratégies et connaissances à un niveau de mise en fonctionnement disponible est alors un enjeu de l'apprentissage.

L'agencement temporel des problèmes

Le deuxième élément retenu sur le processus d'apprentissage concerne l'agencement temporel des classes de problèmes. « *Les connaissances des élèves sont façonnées par les situations qu'ils ont rencontrées et maîtrisées progressivement, notamment par les premières situations*

[127] Le jeu du déménageur est un jeu couramment employé en primaire. Il existe différentes variantes selon les emplacements des équipes, le nombre des objets et les trajets. La variante à laquelle nous faisons référence consiste à installer des équipes d'élèves de même effectif sur une ligne (ce sont les endroits où se trouve chaque équipe, les « repères », qui sont alignés) et à demander de rapporter la quantité d'objets qui se trouve à l'endroit qui leur a été spécifié (le « repère » de leur équipe) à un autre endroit. La distance à parcourir étant visiblement la même pour chaque équipe (des segments de droite parallèles et de même longueur). Chaque élève d'une équipe peut prendre un seul objet par voyage, il peut faire plusieurs voyages et les élèves peuvent se déplacer simultanément. La gagnante est l'équipe qui a fini en premier. On fait plusieurs parties en changeant les points de départ, toutes les équipes testent finalement toutes les positions de départ possibles. Pour une des positions, le nombre d'objets à transférer est nettement moins important, ce que les participants ne savent pas. C'est donc toujours l'équipe qui se trouve à cet endroit qui gagne, indépendamment de sa composition. Cette constatation est posée comme un problème : pourquoi se fait-il que c'est toujours l'équipe qui se trouve à cet endroit qui gagne ? Le contexte sportif, le nombre d'objets en jeu et le fait de ne pas envisager que l'enseignant ait oublié un paramètre pour rendre le jeu équitable, n'engage pas à compter *a priori* le nombre d'objets par équipe.

susceptibles de donner du sens aux concepts et aux procédures qu'on veut leur enseigner », Vergnaud (1991). Pour l'apprentissage d'un concept, nous retenons donc l'importance de l'historicité des problèmes auxquels sont confrontés les apprenants et en particulier des premiers qui engagent la conceptualisation.

Concept-outil/concept-objet

Le troisième et dernier élément retenu est celui de concept-outil, concept-objet. La conceptualisation s'opère en résolvant des problèmes. Ainsi l'apprentissage consiste tout d'abord (en référence à l'historicité) à utiliser des connaissances-en-acte pour résoudre des problèmes : c'est l'aspect outil qui est mis ainsi en avant dans le concept. Cependant, en tant qu'aide à la pensée, des signifiants vont être utilisés, qui ensuite peuvent être objet d'étude. C'est l'aspect objet du concept. Nous convenons, comme le fait Vergnaud (1991), de l'utilité de la dialectique outil/objet définie par Douady (1987) dans le processus d'apprentissage. Plus spécifiquement, nous y retenons le jeu des signifiants et du signifié. En effet, le sens qu'un sujet donne à un concept c'est aussi « *l'ensemble des schèmes qu'il peut mettre en œuvre pour opérer sur les symboles, numériques, algébriques, graphiques et langagiers* », Vergnaud (1991). La conceptualisation est « repérable » à travers les procédures utilisées, mais pour chaque procédure un ou plusieurs signifiants peuvent être convoqués, permettant de passer du concept-outil au concept-objet. De plus un problème peut être résolu par plusieurs stratégies (au sens de la TSD). Ceci laisse donc différents choix possibles à celui qui résout le problème. Un exemple est donné à travers les quatre stratégies indiquées auparavant. Nous voyons que les signifiants y sont employés de différentes manières dans un même problème, mais ils le sont aussi selon les problèmes rencontrés : ils tissent des liens entre eux et organisent des liens avec le signifié(s). Nous ajoutons que les signifiants et d'une manière générale le langage permettent à un élève d'employer un théorème-en-acte ou un théorème (ou propriété ou relation ou définition), mais il y a aussi souvent un implicite « quasi-total » dans cet emploi. C'est parce qu'il a signifié (ou plus exactement qu'il s'est signifié) l'utilisation recontextualisée de tel ou tel théorème (ou propriété ou relation ou définition) mathématique qu'il n'emploiera plus ce dernier uniquement « en-acte ». Plus précisément, cet emploi « en-acte » est accompagné d'une objectivisation du concept. C'est entre autres par le biais de cette objectivation que les connaissances deviennent mobilisables puis disponibles.

b. Discussion : les possibles de l'analyse

Les exemples de stratégies nous permettent de mettre en évidence le rôle de l'emploi de signifiants dans la conceptualisation du nombre entier, l'élément central de notre approche. En reprenant les deux niveaux des connaissances-en-acte, les concepts et les théorèmes, nous reconsidérons le lien stratégie /mathématiques dans le jeu signifiant/signifié(s).

Théorèmes-en-acte, signifiant et signifié(s).

Des stratégies avec ou sans l'utilisation d'une numération

Tout d'abord, nous remarquons que dans les stratégies 1 et 2 les désignations des numérations n'interviennent pas, bien que le concept de nombre soit en jeu[128]. De ce fait nous dirons que certaines stratégies permettent de résoudre un problème en ne considérant « que » le signifié(s) « nombre » et en particulier sans faire intervenir de numération.

[128] Nous ne considérons pas qu'une collection quand elle est l'objet du problème, par exemple quand il s'agit d'obtenir une désignation de son cardinal, est un signifiant du nombre. Par contre une collection « témoin », avec laquelle une autre peut être mis en bijection afin d'obtenir son cardinal, est un signifiant : c'est le cas des constellations du dé.

Par contre, les désignations orales et écrites interviennent dans les stratégies 3 et 4. Dans la stratégie 3, la désignation orale est reliée à un comptage[129], tandis que dans la 4, la dénomination orale est obtenue par la traduction « directe » d'une écriture chiffrée. Notre analyse permet d'y inférer l'emploi de théorèmes-en-acte : l'indication du cardinal de la collection par le dernier mot énoncé pour la stratégie 3, la bijection entre les écritures chiffrées et les désignations parlées pour la stratégie 4. Ceci permet de relier dans ces cas ces derniers et les stratégies. L'efficacité de ces stratégies n'est cependant pas fondée sur les mêmes théorèmes-en-acte. Réciproquement, la désignation écrite chiffrée est obtenue dans la stratégie 4 par le codage de l'organisation des éléments d'une collection en paquets (de dix), alors que dans la stratégie 3 elle est obtenue par la traduction « directe » de la désignation orale. Nous voyons donc des théorèmes-en acte qui concernent un lien « direct » de deux signifiants[130] et d'autres mettant en jeu le concept de nombre dans son lien avec des collections : ceci se traduit dans les stratégies employées.

Les écritures chiffrées reliées au signifié(s) « nombre » via la numération parlée ... ou non

Par ailleurs, nous voyons que nous pouvons utiliser l'une ou l'autre désignation dans des fonctions différentes. Ainsi dans la stratégie 3, la désignation écrite ne sert qu'à mémoriser la désignation orale. En effet, elle ne prend pas en compte les spécificités du système de numération que constituent les écritures chiffrées, la trace écrite « 145 » y est équivalente à la trace écrite « cent-quarante-cinq ». Dans la stratégie 4 par contre l'écriture chiffrée a été utilisée pour obtenir une désignation et les propriétés utilisées sont analysables en termes de théorèmes-en-acte liés à l'organisation des éléments d'une collection.

Concepts-en-acte, signifiants et signifié(s)

La question se pose de relier les concepts-en-acte et les signifiants enjeux d'apprentissage, ce que nous abordons en considérant la « circulation » des théorèmes-en-acte dans les stratégies. En effet certains théorèmes-en-acte peuvent être utilisés en lien avec plusieurs signifiants : l'organisation d'une collection en deux groupes, l'un constitué de quarante éléments et l'autre de trois, est à relier avec la désignation parlée « quarante-trois » ou bien avec l'écriture "$40+3$". Mais d'autres semblent liés plus particulièrement à un signifiant : le comptage des éléments d'une collection permet d'obtenir la désignation parlée usuelle grâce au dernier mot prononcé. Le problème est de savoir en quoi les théorèmes-en-acte sont constitutifs de telle ou telle désignation, ou plus exactement d'estimer la pertinence, l'efficacité des théorèmes-en-acte mettant en jeu les désignations suivant les problèmes. Ces dernières remarques peuvent illustrer le processus d'apprentissage qui consiste à rendre les connaissances disponibles, c'est-à-dire à rendre les concepts-outils efficaces. Il s'agit de disposer d'un panel de stratégies en relation avec un panel de problèmes, mais aussi de permettre de faire le choix le plus approprié mathématiquement. Ceci ne peut se faire que si un certain nombre de théorèmes-en-acte ont été mis en relation avec les signifiants. Ainsi par exemple s'il s'agit de relier une collection de points à une désignation écrite chiffrée, selon les paramètres du problème, le choix doit pouvoir se faire parmi l'organisation par paquets, le comptage de un en un, n en n, le calcul, etc. D'autre part il s'agit de disposer de théorèmes-en-acte qui permettent de poursuivre l'apprentissage au-delà des premières situations rencontrées : par exemple pour

[129] Ce comptage peut se faire par énumération un à un (couplé à la comptine un, deux, trois, etc.) ou encore par paquets de dix (couplé à la comptine dix, vingt, trente, etc.). Nous reviendrons plus précisément dans la thèse sur cette notion de comptage.

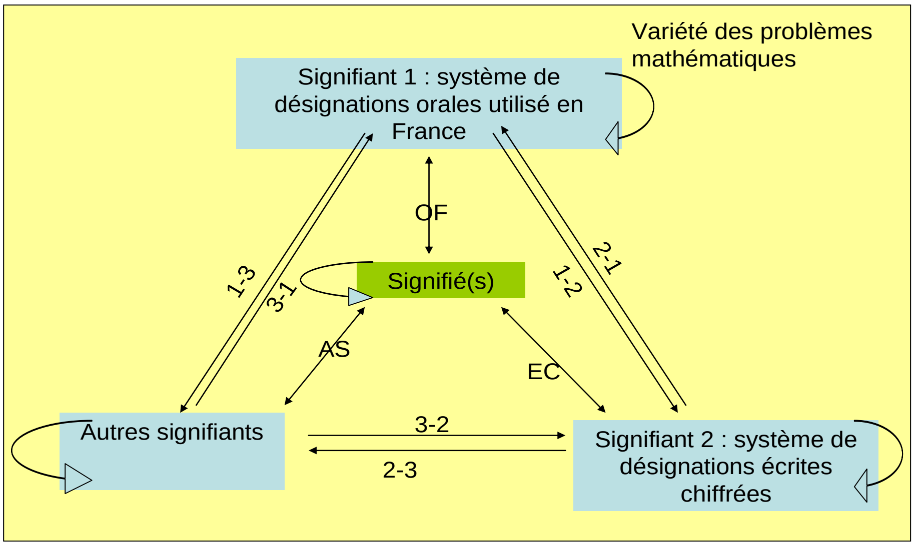
[130] Le lien écriture chiffrée « 145 » et désignation orale « cent-quarante-cinq » n'est pas forcément le fait d'une mémorisation par cœur. Par exemple, il peut s'obtenir par décryptage de l'écriture chiffrée, chiffre à chiffre : 1e troisième chiffre à gauche « 1 » réfère au mot « cent », le suivant « 4 » au mot « quarante », le dernier « 5 » à « cinq ». Un certain nombre de théorèmes-en-acte sont donc en jeu. Mais ils ne se réfèrent pas directement au signifié(s) « nombre » dans la mesure où ils peuvent être opérationnels sans mettre en jeu des quantités ou mesures, même évoquées. C'est pourquoi nous employons ici le mot « directement ».

effectuer le calcul posé 45+78, un certain nombre de théorèmes-en-acte reliés à l'apprentissage initial de l'écriture chiffrée sont plus efficaces que d'autres.

Nous avons mis en évidence le lien théorique entre stratégies et théorèmes en acte, mais aussi les difficultés à l'établir. Cependant, nous avons aussi mis en relief la possibilité d'une classification des stratégies qui tient compte d'une part des liens entretenus entre les deux systèmes de numération et le signifié(s) « nombre »[131] et d'autre part de la diversité des stratégies possibles. Nous allons faire de cette possibilité un outil pour élaborer une problématique sur l'enseignement et l'apprentissage de la numération écrite chiffrée de position

c. Modélisation du processus de conceptualisation

Nous avons justifié le fait de modéliser le processus de conceptualisation du nombre entier et non de la numération écrite chiffrée. En considérant tous les éléments indiqués auparavant, nous le modélisons par le schéma suivant, afin en particulier de mettre en avant le rôle joué par les couples signifiants/signifié(s).



Ce schéma est de par nature simplificateur. Il a été élaboré pour servir notre objectif : il met l'accent sur le jeu des signifiants avec le signifié(s) et permet de poser le problème de non-congruence à un certain niveau de généricité. Il ne peut pas être compris indépendamment des éléments théoriques qui ont été développés précédemment. Ainsi, le signifié(s) « nombre » est, pour un sujet, à envisager selon la relation avec un système de signifiant. En outre, ce schéma permet d'indiquer que cette relation signifiant/signifié(s), se complexifie lorsqu'entrent en jeux plusieurs signifiants. Finalement le cadre jaune « variété des problèmes mathématiques » rappelle que les relations sont à envisager selon cette variété, dans le but de rendre disponibles les connaissances.
Dans ce schéma, seuls trois signifiants sont indiqués. Une pluralité est à envisager, mais ce modèle simplifié va nous permettre de mettre en relief un certain nombre d'éléments relatifs à la spécificité des relations entre les numérations étudiées. Par exemple, dans l'application que nous en ferons, l'autre signifiant peut consister en une monstration de doigts, des écritures additives comme 10+10+5 ou 20+5, une représentation graphique, des constellations du dé,

[131] Un tel critère est employé par Fénichel & Pfaff (2004, 2005).

des écritures telles que nous les avons rencontrées dans la première partie de la thèse, un matériel de numération consistant en des objets matériels manipulables désignant un, dix, cent, etc., une numération en unités, voire une numération dans une autre langue, ou encore un matériel relevant de numérations agies – abaques, bouliers etc. Chaque autre signifiant peu se constituer ou non en système sémiotique, et a ses propres caractéristiques et nous aurons à en tenir compte par la suite. Une étude détaillée de chacun, telle que nous l'avons faite pour les numérations dans la première partie de la thèse, n'est pas nécessaire dans ce chapitre
La conceptualisation s'opère grâce à la résolution de problèmes spécifiques au nombre entier, et comme nous l'avons indiqué à la fin du paragraphe précédent, nous mettons en évidence trois critères pour leur analyse. Nous envisageons des stratégies qui ne font pas intervenir de signifiants dans le sens où elles mettent en jeu des théorèmes-en-acte « internes » au signifié(s), comme cela a été relaté dans les stratégies 1 et 2 : ceci est indiqué par la flèche courbe qui va du signifié(s) au signifié(s). En ce qui concerne les stratégies qui font intervenir des liens entre signifiant(s) et signifié(s), elles sont indiquées par les flèches doubles OF (pour Oral France), EC (pour Ecriture Chiffrée) et AS (pour Autre Signifiant). Enfin celles qui relient deux signifiants sont indiquées par les flèches[132] marquées ici i-j, i différent de j, et par les flèches courbes sur chaque signifiant.

d. Vers les cheminements cognitifs

Cette analyse se fait à partir des théorèmes-en-acte que les stratégies peuvent potentiellement engager dans la résolution de problèmes. Nous avons déjà indiqué en quoi cette potentialité dépendait de multiples facteurs liés à la variété des problèmes (en particulier les variables didactiques) et au niveau de connaissances de celui qui les résout. Aucun problème n'est donc classifiable d'emblée par les stratégies qui sont *a priori* en jeu. Cependant nous avons indiqué que le sujet considéré est un sujet cognitif générique aux prises avec des problèmes d'essence mathématique. D'autre part, puisqu'il s'agit d'élèves de CP, sortant de maternelle et donc ayant suivi un même programme scolaire, nous pouvons envisager de pouvoir « délimiter » un niveau de connaissances et de développement. Ainsi, en relevant un certain nombre de facteurs liés à la variété des problèmes et à la notion elle-même nous pouvons déterminer quelles sont les stratégies (et donc les théorèmes-en-acte) les plus efficaces. En conséquence une analyse *a priori* des problèmes peut être envisagée selon notre modélisation[133].
Cependant, un problème peut être résolu par exemple par une stratégie reliant (directement) le signifiant i au signifié(s) et nous dirons que le signifié(s) est le nombre entier vu par le signifiant i. Il est néanmoins possible que ce « chemin » ne soit pas direct. Les exemples donnés précédemment l'attestent. Ainsi, un problème peut mettre en jeu les écritures chiffrées, mais ces dernières peuvent être reliées aux désignations de la numération parlée en France, avant que n'intervienne le signifié(s) et ainsi ce problème devient un problème mettant aussi en jeu le lien entre la numération parlée et le signifié(s). Nous dénommons tous ces « chemins », des <u>cheminements cognitifs.</u>

[132] Deux flèches sont indiquées pour mettre en relief le fait que le lien peut se faire dans les deux sens, comme nous l'avons vu dans les stratégies précédentes.
[133] Ceci renvoie aux questions du paragraphe 1.2. Cependant, au moment où un sujet résout un problème, par exemple en la classe, pour identifier *a priori* les stratégies et théorèmes-en-acte probables, cette analyse doit être complétée car un nombre d'éléments plus important est à prendre en compte. C'est ce qui est fait dans le chapitre 8, grâce en particulier à l'utilisation de théories didactiques comme la TSD et la notion de situation.

3. Les stratégies dans les problèmes : analyse en fonction des cheminements cognitifs

Nous proposons ici d'analyser les problèmes susceptibles d'être rencontrés au début de l'apprentissage de la numération écrite chiffrée.
Nous commençons par indiquer des stratégies de « base », c'est-à-dire mettant en jeu des relations de type un signifiant/signifié(s), un signifiant/un signifiant, signifié(s)/signifié(s). Ensuite nous indiquons comment d'autres stratégies peuvent être obtenues à partir de ces dernières : ce sont les cheminements cognitifs « complexes ».
Auparavant nous avons besoin de préciser les définitions de quelques mots et expressions dans le cadre de ce travail.

3.1 Définitions

Ces définitions ont été en particulier élaborées en considérant la première partie de la thèse dans laquelle l'organisation de la collection joue un rôle différent selon les interprétations[134].

Dénombrer

Dans sa thèse El Bouazzaoui (1987), citée par Conne (1989), distingue deux raisons d'utiliser un signifiant du cardinal d'une collection : la mesure d'une quantité et la production d'une collection. Nous traduisons cette affirmation dans le cadre de notre thèse en distinguant le codage et le décodage et en indiquant ce que nous entendons par dénombrement.
Le dénombrement est un processus dont le but est de relier une désignation du cardinal d'une collection avec la collection elle même : il s'agit soit de désigner le cardinal d'une collection (coder), soit de constituer une collection (d'objets) dont le cardinal est donné par un signifiant (décoder). Le dénombrement s'effectue par quelque moyen que ce soit et met en jeu un signifiant, quel qu'il soit (en particulier il peut être contextualisé).

Compter

Compter est pour nous une stratégie de dénombrement. Elle consiste à utiliser un compteur, en particulier la comptine numérique des désignations parlées en France (que nous nommons plus simplement la comptine numérique quand il n'y a pas d'ambiguïté possible). Il s'agit d'associer dans l'énumération des objets de la collection les items du compteur. Le dernier item utilisé est un signifiant du cardinal de la collection. En ce qui concerne l'emploi de la comptine numérique, il est possible de compter par paquets, en énumérant par exemple deux, quatre, six ou encore dix, vingt, trente, etc. Lorsque les paquets sont importants, il n'est pas possible de les constituer par subitizing (au-delà de quatre). Un nouveau dénombrement est alors nécessaire pour constituer ces paquets.
Un certain type de comptage consiste à considérer des paquets de même cardinal et de ne pas transcrire le cardinal de la collection dénombrée au fur et à mesure dans la désignation parlée en France : dire par exemple un paquet de deux, deux paquets de deux, etc., au lieu de deux, quatre, six, ou bien encore, une dizaine, deux dizaines, trois dizaines, etc., au lieu de dix, vingt, trente. C'est donc un « comptage en unités » car il utilise une unité de mesure.
Notons aussi qu'il existe des stratégies de surcomptage[135], c'est-à-dire de comptage à partir d'un nombre donné. En outre, tous les dénombrements ne sont pas obtenus par des stratégies de comptage, c'est-ce que nous indiquons par la suite.

[134] Conne (1989) a proposé des définitions différentes de celles que nous allons adopter de dénombrer, compter, calculer. La définition qu'il indique pour le verbe dénombrer est proche de celle que nous avons prise pour compter. Dénombrer est pour nous plus général. Nous avons pris ces autres options du fait de l'importance dans notre travail du lien entre une collection et un signifiant de son cardinal. Par ailleurs, nous considérons principalement des calculs dans lesquels la quantité que peuvent désigner les nombres soit au moins évoquée.

Organiser/configurer pour désigner

Distinguer cette stratégie est propre à la thèse.
Il s’agit d’organiser la collection (en groupes) pour ensuite coder la configuration obtenue, code qui sert alors à désigner le cardinal de la collection globale. Nous utilisons aussi ici le terme configuration pour désigner une structure obtenue en suivant des règles et dont est considéré le résultat final. Ce type de stratégie est celui en jeu pour réaliser un procédé de mise en signes décrit dans la première partie de la thèse pour l’interprétation de référence de la numération écrite chiffrée. Il ne s’agit pas de désigner au fur et à mesure les cardinaux de sous-collections comme dans un comptage. En effet dans un comptage la collection est scindée en deux, les objets déjà considérés (comptés), les autres qui ne le sont pas. Organiser/configurer pour désigner, nécessite de distinguer les éléments qui sont organisés (en groupes) des autres, mais leur cardinal n’est pas signifié au fur et à mesure du processus. En outre, dans un comptage en unités en particulier, les paquets constitués au fur et à mesure vont rejoindre les éléments de la collection déjà considérés, l’organisation n’étant alors pas nécessairement conservée[136] : ce n’est pas le cas pour une stratégie de dénombrement « organiser/configurer pour désigner ».
Cette stratégie peut donc mener à différents signifiants, écrits comme ceux indiqués dans la première partie de la thèse (par exemple 3X 4I, ou XXX IIII, ou 34, ou plus généralement des écritures de type 1, 2, ou 3 selon la terminologie d’Ifrah) ou oraux (par exemple « trois groupes (de dix) et deux objets seuls » ou « trente-quatre »). Mais la stratégie se déroule en deux étapes distinctes : la première consiste à organiser/configurer, la deuxième à désigner cette organisation.

Calculer

Bien que des calculs décontextualisés ou ne mettant pas en jeu de collections soient envisageables, nous allons considérer principalement les calculs qui sont des stratégies de dénombrement. Pour les calculs, les propriétés des numérations ne sont pas exploitées de la même façon que pour les autres stratégies ci-avant, et les problèmes associés sont de l'ordre de la structure additive ou multiplicative (en tout cas arithmétique), le plus souvent mettant en jeu l'obtention du cardinal de la réunion de deux collections.
Le calcul peut être effectué mentalement ou posé (par écrit). Le plus souvent nous allons envisager des calculs mentaux qui s’effectuent sans traces écrites et à l’aide de la numération parlée en France[137]. Le terme de calcul posé (par écrit) désigne dans notre travail, essentiellement le calcul à l’aide des écritures chiffrées. Un calcul posé peut être effectué mentalement, c’est-à-dire sans traces écrites quand les mêmes algorithmes que ceux en jeu dans le calcul posé par écrit sont utilisés : dans ce cas nous ne le considérons pas comme du calcul mental. C’est le cas par exemple quand pour effectuer dix-sept plus vingt-quatre est sollicitée une image mentale des écritures chiffrées 17 + 24 (posé en colonne) et est utilisé un algorithme portant sur les chiffres
Il est difficile de distinguer certains comptages en unités, de type, dix, vingt, trente, ou même deux, quatre, six, d’un calcul. Si le dénombrement s’appuie sur une mémorisation de la suite

---

[135] Ou encore de « sous-comptage ».
[136] Voir la première partie de la thèse, chapitre 3 paragraphe 4, pour des exemples dans les différents procédés de mise en signes d’une collection.
[137] Cependant, le calcul mental ne s’y restreint pas. On peut se représenter des groupements mentalement : c’est seulement pour communiquer le résultat ou la méthode qu’il est nécessaire de parler. Il est alors difficile de savoir ce qui est sollicité. Par exemple pour dix-sept plus vingt-quatre, on peut directement dire que sept et quatre font un de plus que sept et trois et conclure quatre dizaines et une unité soit quarante-et-un : ce n’est pas uniquement de la numération parlée et ce n’est pas non plus du calcul posé (on ne visualise pas les colonnes de chiffres) mais c’est un calcul effectué mentalement.

des désignations sans nécessairement faire référence à un problème « concret » (de type arithmétique), comme cela peut être le cas pour mémoriser la suite des désignations parlées en France, il s'agit d'un comptage en unité et non d'un calcul mental. Cette distinction est cependant difficile à observer chez un sujet, particulièrement chez un élève de primaire.
A noter que la stratégie de dénombrement « organiser pour désigner », met en jeu une partition de la collection, mais il s'agit de dénommer cette partition et non de l'utiliser pour faire un calcul.

Désignation des groupements

La désignation du cardinal d'une collection qui résulte d'un comptage préalable et qui rend compte de ce comptage en indiquant les unités et le nombre d'unités, peut mener à une désignation de type « trois dizaines et deux (unités) » dans une forme décontextualisée ou encore « trois plaques (de dix) et deux boutons seuls », dans une forme contextualisée. Nous la nommons « désignation des groupements », elle est ici issue d'un comptage en unités, mais un tel type de désignation n'est pas nécessairement issu d'un comptage. En effet, elle peut intervenir en particulier à l'issue d'une stratégie organisation/configuration de la collection, qui utilise elle aussi des groupements, par exemple « trois groupes (de dix) et deux objets seuls ». Nous considérons ici principalement cette désignation sous une forme orale ou une transcription mot à mot de l'oral « trois groupes de dix » ou « 3 groupes de dix », puisque « 3 » et « trois » sont deux transcriptions écrites du son « trois » compris dans une interprétation ordinale. Cependant, une autre version écrite a déjà a été signalée, c'est celle du type « 3X 4I ».

3.2 Les stratégies de « base »

Elles font écho aux flèches dans la modélisation qui a été proposée auparavant.

a. Obtention d'un signifiant du cardinal d'une collection (signifiant/signifié(s))

Il va s'agir de désigner le cardinal d'une collection d'objets manipulables ou figurés.

Stratégie OF (pour désignation Orale parlée en France)

Il s'agit de stratégies de comptage, d'organisation ou de calcul dont le but est d'obtenir la désignation parlée en France et sans utiliser d'autres « ressources » que celles en jeu dans une interprétation de la numération parlée en France (en particulier pas d'autres signifiants). Des problèmes d'énumération peuvent intervenir[138], surtout dans le cas d'une collection figurée. Suivant les cas (collection manipulable ou figurée sur une feuille), les objets peuvent être énumérés visuellement ou avec le doigt ou encore cochés à l'aide d'une marque ou en les séparant des autres par exemple en les extrayant d'une boîte.
Exemples :
1. Les objets sont pointés un par un et y sont associés les mots de la comptine numérique. Le dernier mot énoncé constitue le message.
2. Les objets sont pointés p par p[139] (cochés p par p par exemple en les entourant[140]) et des désignations de la numération parlée en France[141] y sont associées successivement. Afin d'obtenir le dernier mot énoncé comme réponse correcte, une méthode non erronée oblige à changer de stratégie ou non suivant le reste de la division euclidienne du nombre n de carrés

[138] Voir Briand (1999).
[139] Par exemple deux par deux ou dix par dix.
[140] Ceci peut alors demander une « sous-stratégie » pour dénombrer chaque paquet. Par exemple pour p=10, on peut faire un comptage de p en p (par exemple de 2 en 2 jusqu'à 10) ou s'aider de la comptine numérique ou encore utiliser un calcul mental. A noter que le subitizing peut permettre d'estimer des quantités jusqu'à 4.
[141] Pour p=2, un début de stratégie non erronée est de dire « deux, quatre, six, etc. » et pour p= 10, « dix, vingt, trente, etc. ».

par p. Par exemple pour p=2 et n=37, on peut compter de deux en deux jusqu'à trente six et ensuite utiliser la comptine numérique à partir de trente six et dire trente sept. Autre exemple pour p=10 et n=23, on peut compter de dix en dix jusqu'à vingt et soit utiliser un comptage un à un à l'aide de la comptine numérique, soit une stratégie type calcul mental (vingt plus trois est égal à vingt-trois).
3. Les objets sont pointés par groupes non nécessairement toujours de même taille (cochés par exemple en les entourant) et des désignations successives du cardinal des objets comptabilisés sont associées (via un calcul mental ou bien à l'aide des doigts ou encore par surcomptage). Le dernier mot prononcé désigne le cardinal de la collection.
4. La collection est organisée en groupes de dix (par comptage un à un par exemple ou grâce à une des stratégies précédentes) et en objets non groupés afin d'obtenir une désignation parlée en France en s'appuyant sur les repérants/appuis additifs dix, vingt, trente, etc.

Stratégie EC (pour Ecriture Chiffrée)

Ces stratégies mènent à l'obtention de l'écriture chiffrée sans passer par la désignation parlée en France correspondante. Une des stratégies non erronée a déjà été indiquée dans le chapitre 2 dans les procédés de mise en signes du cardinal d'une collection. Elle consiste à faire le maximum de groupes de dix objets et ensuite à accoler dans le bon ordre le chiffre désignant ce nombre de groupes avec le chiffre désignant le nombre d'objets restants[142]. Le cas des nombres à un chiffre est à distinguer de ceux à deux chiffres, les deux numérations parlée en France et chiffrée étant pour ces nombres dans un rapport oral/écrit avec une interprétation commune de numération ordinale.

Stratégie OG (O pour oral et G pour Groupement)

Il s'agit de stratégies menant à l'obtention d'un signifiant oral, ou transcription mot à mot de l'oral, de type « désignation des groupements ». Dans l'exemple que nous allons donner, les groupements en jeu sont de cardinal dix, mais ils sont théoriquement quelconques. Ainsi, pour une collection figurée ou manipulable, il s'agit de faire des groupements (par dix) et de dénombrer des paquets et des carrés : le fait d'effectuer ce dénombrement après avoir organisé la collection est un indicateur (non suffisant) pour distinguer une stratégie « organiser/configurer pour désigner » et « compter en unités »[143]. Les stratégies pour ce dénombrement de groupements peuvent mettre en jeu un comptage un à un, voire une évaluation par subitizing lorsque les cardinaux en question ne dépassent pas quatre. Cependant dans le cas où le maximum de groupements n'a pas été effectué, le nombre d'objets isolés peut être important et nécessiter ainsi pour son dénombrement par exemple une stratégie de type OF précédente.
Ainsi, trois paramètres sont à envisager pour les cardinaux en jeu : la maximalité des groupements, le type de groupement (et le fait qu'ils soient de même cardinal), la nature de la collection (manipulable, figurée). Deux stratégies sont possibles, « organiser pour désigner » et « compter en unités », avec en plus une stratégie pour dénombrer les groupements et les objets non groupés.

[142] A noter la particularité pour des collections dans lesquelles il ne reste pas d'objets isolés. Remarquons aussi que le fait de considérer des collections de cardinal inférieur à 99 ne permet pas de distinguer la stratégie qui consiste à d'abord chercher tous les groupements de l'ordre le plus petit (dizaine) pour en faire ensuite des plus grands, d'une stratégie cherchant d'abord à obtenir les groupements du plus grand ordre possible. Ceci a été signalé dans le chapitre 2 en comparant l'algorithme Glouton et la division euclidienne.
[143] Voir les définitions données auparavant.

Stratégie GraC (Gra pour Graphique, C pour collection)

Nous donnons ici en exemple des stratégies menant à deux types de productions graphiques[144] qui rendent compte de l'organisation de la collection ou du résultat d'un comptage en unités. Elles peuvent être plus ou moins contextualisées et plus ou moins figuratives. Le premier (production graphique de type 1) consiste en une production graphique grâce à laquelle l'ensemble des groupements et des objets seuls (des carrés) est représenté exhaustivement, avec plus ou moins de précision dans le détail (par exemple le nombre de carrés représentés sur une plaque de dix). Dans une forme symbolique, il peut s'agir de signes de type XXX IIIIIII pour trente-sept, et dans une forme figurative des dessins de groupements et d'objets non groupés. Le deuxième (production graphique de type 2) est une production graphique comportant deux types de signe : l'un désignant un groupement de dix, l'autre un objet seul. Ils sont ici aussi plus ou moins figuratifs. Chaque signe est associé à un nombre : soit le nombre est indiqué par une écriture chiffrée, soit il est indiqué par l'écriture littérale de la désignation parlée en France. Dans une forme symbolique, il peut s'agir de désignations de type 3X 7I pour trente-sept. A la différence de la production graphique de type 1, il y a obligation de dénombrer le nombre de groupements.

Voici en exemple deux stratégies, toutes les deux concernant des groupements de dix. Les deux utilisent la matérialisation des groupements (par dix pour une stratégie non erronée) préalablement sur la collection (par exemple en entourant dix objets ou en les rassemblant). Ensuite, la première stratégie, valable pour les deux productions graphiques, consiste à représenter ces groupements sur une feuille (de manière plus ou moins schématisée comme nous l'avons indiqué) en utilisant un dénombrement des groupements et des objets isolés pour obtenir une des deux productions graphiques. La deuxième, valable uniquement pour une production graphique de type 1, consiste à dessiner les groupements en utilisant une correspondance terme à terme : un dénombrement n'est pas nécessaire.

A noter qu'une désignation orale des groupements peut d'une certaine manière être considérée comme la traduction « mot à mot » d'une production graphique de type 2 : dire ce qui est « écrit ». En ce qui concerne une production graphique de type 1, une désignation orale des groupements peut être considérée comme étant une description : décrire oralement ce qui est vu.

Autres stratégies menant à d'autres signifiants AS

Ces stratégies conduisent à un autre type de signifiant que ceux évoqués précédemment. Le signifiant peut par exemple être constitué de gestes ou de dessins, schémas, figures non encore citées ou bien encore de productions mixtes dessin/désignation orale. Nous n'indiquons pas ces stratégies du fait de cette grande diversité. A noter cependant que les désignations écrites chiffrées et parlées en France peuvent intervenir. Le cas de signifiants de type 10+10+10+7 en est un exemple. Une telle décomposition peut être reliée à une écriture chiffrée (le 3, signifie qu'on écrit trois 10 ; on y ajoute 7) ou à la désignation parlée (dans « trente-sept », on peut compter « dix, vingt, trente », donc il y a trois « dix » qui s'écrivent « 10 »), soit encore d'une désignation OG (trois paquets de dix et sept boutons seuls). Suivant le contexte, elle peut être considérée de manière différente, par exemple comme une forme de production graphique hybride, de type 1 pour les dizaines, le signe « + » n'étant pas nécessairement interprété comme un signe opératoire.

[144] Nous nous référons aux trois systèmes que nous avons décrits pour la transcription de la décomposition polynomiale : le premier (système de numération de position) n'utilise que les coefficients, le deuxième (indication de l'ensemble des types de groupement) n'utilise que les ordres, le troisième (système « mixte ») utilise les deux simultanément.

b. Obtention du cardinal d'une collection à partir d'un signifiant (signifiant/signifié(s))

Ces stratégies sont des processus réciproques des stratégies précédentes. Nous nous y référons pour des précisions.

Stratégie OF° (pour désignation Orale parlée en France)

Il s'agit de stratégies de comptage, d'organisation ou de calcul dont le but est de constituer une collection à partir de la désignation parlée en France de son cardinal et sans utiliser d'autres signifiants. Des problèmes d'énumération peuvent intervenir, surtout dans le cas de constitution de collections à partir d'une collection figurée. Suivant les cas (collection manipulable ou figurée sur une feuille), les objets peuvent être énumérés visuellement ou avec le doigt ou encore cochés à l'aide d'une marque ou en les séparant des autres par exemple en les extrayant d'une boîte.

Exemples :

1. Les objets sont énumérés un par un et y sont associés les mots de la comptine numérique. Le processus s'arrête au moment du dernier mot prononcé.
2. Les objets sont pointés p par p[145] et y sont associés successivement des désignations de la numération parlée en France.
3. Les objets sont énumérés par groupes non nécessairement toujours de même taille et y sont associées des désignations successives du cardinal des objets comptabilisés (via un calcul ou un comptage). Le processus s'arrête quand le mot prononcé désigne le cardinal voulu.
4. La collection est organisée au fur à mesure en groupes de dix (obtenus par comptage un à un par exemple) et en objets non groupés : la stratégie s'appuie sur la régularité des repérants/appuis de la numération parlée en France.

Stratégie EC° (pour Ecriture Chiffrée)

Ces stratégies concernent l'élaboration d'une collection dont le cardinal est désigné par son écriture chiffrée sans utiliser d'autres désignations, en particulier la désignation parlée en France correspondante. Une des stratégies non erronées indiquée dans les procédés de mise en signes du cardinal d'une collection du chapitre 2, consiste à constituer le nombre de groupes de dix indiqués par le chiffre adéquat de l'écriture chiffrée (voir les stratégies déjà signalées pour constituer une collection de dix objets) et à faire la même chose pour le chiffre des unités. Le cas des nombres à un chiffre est à distinguer de ceux à deux chiffres, les deux numérations, écrite et chiffrée, étant pour ces nombres dans un « simple » rapport oral/écrit avec une interprétation commune de numération ordinale.

Stratégie OG° (pour O pour oral et G pour Groupement)

Il s'agit de stratégies menant à l'obtention d'une collection à partir d'un signifiant oral de son cardinal de type « désignation des groupements ». Les groupements que nous allons considérer sont principalement de cardinal dix, mais ils sont théoriquement quelconques. Ces stratégies sont alors proches des précédentes, mais cependant elles ne nécessitent pas de décodage de l'écriture chiffrée (identification d'un chiffre à un ordre, et donc importance l'ordre). Pour passer directement d'un tel signifiant à la collection, il s'agit de faire le nombre de groupements (de dix) indiqués, par exemple en les entourant ou en les séparant du reste des objets. Les stratégies pour réaliser le bon nombre de groupements ont déjà été évoquées. Les mêmes trois paramètres signalés précédemment sont ici aussi en jeu : la maximalité des groupements, le type de groupement (et le fait qu'ils soient de même cardinaux), la nature de la collection (manipulable, figurée). Deux stratégies sont possibles, « organiser pour

[145] Par exemples deux par deux ou dix par dix.

désigner » et « compter en unités », avec en plus une stratégie pour dénombrer les groupements et les objets non groupés.

Stratégie GraC° (Gra pour Graphique, C pour collection)

Il s'agit de stratégies menant à l'obtention d'une collection à partir d'un signifiant de type production graphique de type 1 ou 2.
Dans le cas de l'utilisation d'une désignation OG, nécessitant un dénombrement des groupements à partir d'une production graphique de type 1 ou une traduction orale de l'écrit à partir d'une production graphique de type 2, nous retrouvons les stratégies précédentes OG°. Sinon, pour une production graphique de type 1, il est possible de constituer au fur et à mesure les groupements de dix, leur nombre pouvant être obtenu par une association terme à terme entre les groupements constitués et ceux figurés (idem pour les unités) : il n'y a pas alors nécessité d'un dénombrement des groupements et des objets seuls.

Autres stratégies menant à d'autres signifiants AS°

Comme précédemment, nous n'allons pas indiquer de stratégies spécifiques, le signifiant en jeu pouvant prendre une multitude de formes, par exemple des gestes ou des dessins, schémas, etc.

c. Passage entre deux signifiants (signifiant/signifiant)

L'étude de la première partie de la thèse a mis en exergue des différences et des ressemblances entre l'interprétation de référence de la numération écrite chiffrée et celles possibles pour la numération parlée en France. Nous nous y appuyons pour donner des exemples qui reposent sur les possibilités ouvertes et les limites à leur généralisation, pour tous les nombres.

Stratégie de type EC vers OF

Ces stratégies visent à traduire l'écriture chiffrée en sa désignation parlée en France[146].
Exemples (37 vers trente-sept) :
1. L'écriture chiffrée est traduite par le mot désignant le nombre de manière automatisée (appel à la mémoire à long terme).
2. L'écriture chiffrée est traduite par le mot désignant le nombre grâce à un appui sur les sonorités des désignations orales des chiffres : 3 se dit « trois » et fait penser à « trente », et 7 se dit « sept ». Cette stratégie est moins adaptée pour un nombre comme « vingt-trois » puisque le son « vingt » n'est pas proche du son « deux ».
3. L'écriture chiffrée est traduite par le mot désignant le nombre grâce à un appui sur la récitation de la comptine des dizaines : 3 (traduit par « trois ») mots de la comptine des dizaines sont récités « dix, vingt, trente » (possible appui sur les doigts), et 7 se dit « sept ».
4. L'écriture chiffrée est traduite par le mot désignant le nombre grâce à un appui sur la suite des écritures chiffrées des nombres (file numérique) : à partir de l'écriture chiffrée d'un nombre dont est connue la désignation parlée en France (cela peut être 1 mais aussi un autre comme 10) est récitée la comptine numérique orale en suivant la file numérique (une désignation par écriture chiffrée), le mot prononcé pour chaque écriture chiffrée est sa désignation parlée usuelle.

Stratégie de type OF vers EC

Ces stratégies visent à traduire la désignation parlée en France en sa désignation écrite chiffrée, sans autre signifiant en jeu.[147]

[146] Ces dernières s'appuient sur une connaissance du lien entre l'écriture chiffrée et la désignation orale usuelle des nombres de 1 à 9.

Exemples (trente-sept vers 37):
1. Le mot désignant le nombre est traduit en écriture chiffrée de manière automatisée.
2. Le mot désignant le nombre est traduit en écriture chiffrée grâce à un appui sur les sonorités : « trente » fait penser à trois qui s'écrit « 3 » et dans « trente-sept » est entendu « sept » qui s'écrit « 7 »[148].
3. Le mot désignant le nombre est traduit en écriture chiffrée grâce à un appui sur la récitation de la comptine des dizaines : dans « dix, vingt, trente » on utilise trois mots pour dénombrer (il est possible d'utiliser les doigts), « trois » s'écrit « 3 », et dans « trente-sept » est entendu sept qui s'écrit « 7 ».
4. Le mot désignant le nombre est traduit en écriture chiffrée grâce à un appui sur la suite des écritures chiffrées (file numérique mémorisée, reconstituée ou à disposition) : par exemple la comptine numérique est récitée en écrivant (ou repérant quand la file numérique chiffrée est déjà présente) au fur et à mesure les nombres énoncés, le dernier nombre énoncé est relié ainsi à son écriture chiffrée.

Stratégie de type OF vers OG ou GraC

Ces stratégies visent à traduire la désignation parlée usuelle d'un nombre en Français en sa désignation de type OG ou GraC.
Nous allons donner ici des stratégies non erronées. Un certain nombre d'erreurs peut survenir notamment dans l'inversion des chiffres ou des mots. Plus de détails sur les stratégies possibles ont été donnés dans la première partie de la thèse avec les procédés de mise en signes du cardinal d'une collection.
A partir de la désignation parlée en France (par exemple « trente-sept »), les groupements de dix peuvent être retrouvés en énumérant oralement les dizaines (dix, vingt, trente) qui peuvent être dessinées au fur ou à mesure (menant à une production graphique de type 1) ou bien encore dénombrées en comptant les mots avec ou non l'aide des doigts (menant à une production graphique de type 2 ou à une désignation orale OG). En ce qui concerne l'obtention du nombre d'objets non groupés, il est donné par le dernier mot prononcé à l'oral (sept pour trente-sept). Les objets peuvent être alors tous dessinés, ce qui demande une stratégie spécifique[149] : il s'agit de dessiner une collection d'objets dont le cardinal est donné par une désignation parlée en France. Nous avons déjà abordé ce problème auparavant.

Stratégie de type EC vers OG ou GraC

Ces stratégies visent à traduire l'écrite chiffrée en sa désignation de type OG ou GraC.
Dans le cas des nombres inférieurs à dix (10), l'étude faite dans la première partie de la thèse montre la proximité de la numération écrite chiffrée et la numération parlée en France : seul un rapport écrit/oral les distingue véritablement. C'est pourquoi nous considérons pour ces nombres les stratégies relatives aux désignations parlées dont il a été fait mention précédemment. Une autre possibilité, valable pour toutes les écritures chiffrées, est d'utiliser une file numérique qui est constituée des écritures chiffrées des nombres (dans l'ordre croissant). Il suffit de faire correspondre un objet (groupe de dix ou unité) à chaque écriture, jusqu'à l'écriture chiffrée désirée.

---

[147] Elles s'appuient sur une connaissance du lien entre l'écriture chiffrée et la désignation orale usuelle des nombre de 1 à 9.

[148] Une stratégie erronée consiste à traduire en écriture chiffrée « trente-sept » par 307 en accolant la traduction chiffrée de trente et celle de sept. Ce type de stratégie dépend du nombre en jeu : les possibilités ne sont pas les mêmes pour le lien entre trente-sept et 37 que pour celui entre trente et 30 (le zéro ne s'entend pas) ou vingt-trois et 23 (le deux ne s'entend pas).

[149] Dans le cas où le cardinal de la collection est uniquement un nombre de dizaines entières (c'est le cas pour trente), cette dernière stratégie peut échouer, mais pas nécessairement si on garde en mémoire le codage spécifique des dizaines.

Deux possibilités sont alors envisageables pour passer de l'écriture chiffrée à une désignation OG ou GraC. Soit la collection est d'abord constituée (mentalement ou physiquement) d'unités et ensuite des groupements sont à opérer, ce qui met en jeu ici un lien signifiant/signifié(s). Soit, dans le cas d'un nombre écrit avec deux chiffres, les groupements sont lus grâce aux chiffres : par exemple dans 37, 3 (trois) groupes de dix et 7 (sept).

Stratégie de type OG ou GraC vers OF

Ces stratégies visent à traduire la désignation d'un nombre de type OG ou GraC en sa désignation parlée en Français.
Il s'agit d'inverser le processus déjà indiqué pour la stratégie OF vers OG ou GraC. Par exemple, à partir des groupements de dix d'une production graphique de type 1, (tel que trois groupements de dix et sept boutons isolés), la désignation parlée en France peut être retrouvée en comptant oralement les groupements (dix, vingt, trente) puis les boutons isolés. Pour une production graphique de type 2 ou une désignation orale OG, il s'agit de considérer chaque type d'objets (groupements et unités) de manière différente. Pour les groupements, leur nombre signalé par une écriture chiffrée « 3 » ou une désignation « trois », peut être traduit par trente en utilisant la sonorité. Le nombre d'unités n'ayant pas besoin de traduction (sept par exemple), il suffit d'accoler les deux mots obtenus dans le bon ordre pour avoir la désignation parlée en France « trente-sept ». Outre la spécificité de certains nombres (onze à seize, quatre-vingts à cent), un premier problème survient lorsque la désignation de type OG ou GraC n'utilise pas des groupements de dix, auquel cas un calcul est envisageable pour effectuer le passage. Un deuxième problème vient du fait que les groupements ne sont pas nécessairement maximaux (par exemple « deux paquets de dix et dix-sept »), auquel cas un ou des échanges de dix contre un sont nécessaires (c'est-à-dire qu'il est à envisager un ou des groupements supplémentaires de dix boutons).

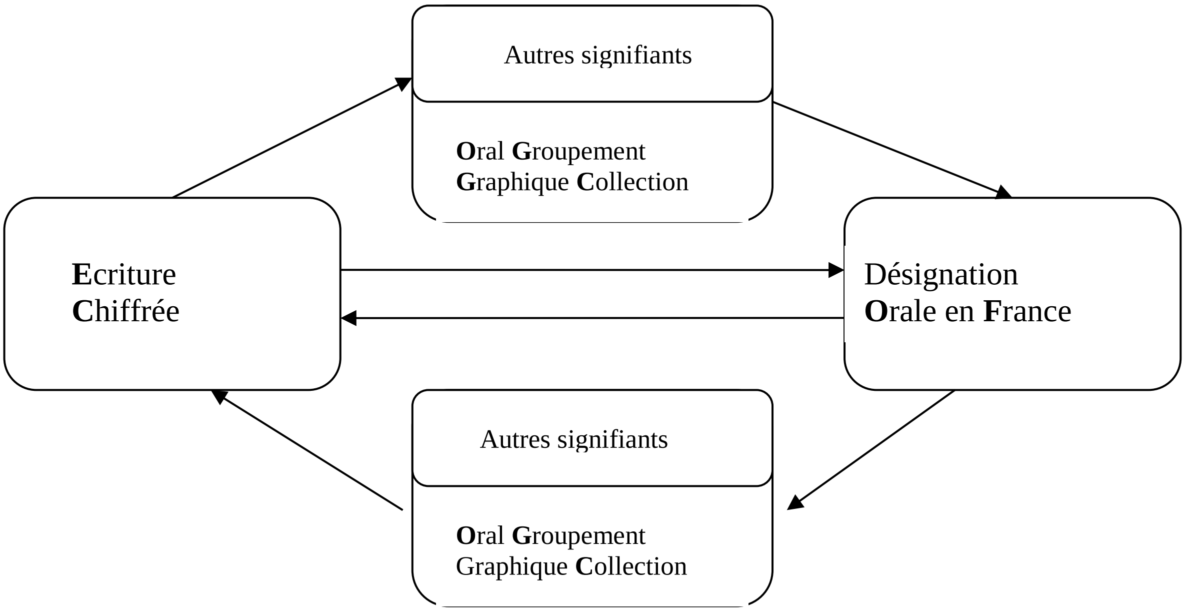
Stratégie de type OG ou GC vers EC

Ces stratégies visent à traduire la désignation d'un nombre de type OG ou GraC en sa désignation écrite chiffrée.
Il s'agit cette fois-ci d'inverser le processus déjà indiqué pour le passage inverse de EC vers OG ou GraC. Par exemple, à partir des groupements de dix d'une production graphique de type 1, (tel que la représentation exhaustive de trois groupements de dix et sept boutons isolés), la désignation écrite chiffrée peut être retrouvées en comptant oralement les groupements – 1 (un), 2 (deux), 3 (trois) – ou en utilisant une file numérique des écritures chiffrées, puis de même pour les boutons isolés. Le problème principal se pose ici aussi lorsque la désignation de type OG ou GraC n'utilise pas des groupements de dix, ou encore quand les groupements ne sont pas maximaux.

3.3 Les cheminements cognitifs

a. Coder/décoder

Nous allons utiliser un schéma indiquant les différentes stratégies d'élaboration d'une collection à partir d'un signifiant de son cardinal ou les différentes stratégies de désignation du cardinal d'une collection : nous obtenons une description des cheminements cognitifs. Ce schéma est à donc considérer à l'aune de notre cadre théorique.



Voici le principe de fonctionnement de ce schéma pour « coder » et « décoder » :

Obtention d'un signifiant du cardinal d'une collection (coder) utilisant le passage entre deux signifiants

Ces stratégies commencent toutes par une stratégie de base précédente OF, EC, OG, GraC et se poursuivent par une des stratégies déjà mentionnée : EC vers OF, OF vers EC, OF vers OG ou GraC, EC vers OG ou GraC, OG ou GraC vers OF, OG ou GraC vers EC. Ainsi, une stratégie pour obtenir la désignation écrite chiffrée du cardinal d'une collection d'objets peut débuter par une stratégie de type OF, suivie d’un lien signifiant/signifiant de type OF vers EC.

Obtention d'une collection à partir d'un signifiant de son cardinal (décoder) utilisant le passage entre deux signifiants

Elles commencent par une des stratégies déjà mentionnée, EC vers OF, OF vers EC, OF vers OG ou GraC, EC vers OG ou GraC, OG ou GC vers OF, OG ou GraC vers EC et se poursuivent par une stratégie de base précédente OF°, EC°, OG°, GraC°. Par exemple, une stratégie pour élaborer une collection d'objets à partir d'une désignation parlée en France peut débuter par une stratégie de lien signifiant/signifiant de type OF vers EC, puis se poursuivre par une stratégie de type EC°.

Il existe par ailleurs des stratégies faisant intervenir d’autres signifiants que ceux évoqués ici. Par exemple une stratégie de type OF vers EC peut utiliser la médiation/relais d’un matériel manipulable, qui de par sa contextualisation (par exemple les plaques de dix) ne constitue pas nécessairement un système sémiotique de signifiants (utilisé pour résoudre une certaine variété de problèmes mettant en jeu le nombre). Elle peut aussi utiliser une médiation/relais d'un matériel de numération manipulable qui se constitue en un système sémiotique.

Rappelons que toutes les possibilités ne sont pas nécessairement disponibles chez un sujet et leur efficacité dépend de plusieurs paramètres. Par exemple, une stratégie EC vers OG ou

GraC peut nécessiter un relais via les désignations parlées en France (OF), dans le cas où la relation de « base » évoquée ci-avant n’est pas une connaissance disponible.

b. Comparer le cardinal de collections

Sans l'utilisation de signifiant qui désignent les nombres

Nous envisageons des collections manipulables ou figurées (des objets étant indiqués exhaustivement par des dessins).
La première stratégie que nous considérons est l’association terme à terme. Il est possible de rendre visible les liens (en déplaçant les objets, en les reliant par un trait ou un autre connecteur) ou ce lien peut rester virtuel : il est alors fait mentalement. Les termes de l’association peuvent être des objets seuls ou des groupements d’objets (ce qui nécessite d’associer des groupements de mêmes cardinaux).
L’autre stratégie principale est l’estimation globale visuelle. Sa réussite dépend de plusieurs facteurs, sur lesquels le sujet peut jouer selon en particulier que les collections soient figurées ou manipulables : nombre d’objets en jeu (pour chaque collection ainsi que comparativement entre les deux collections), disposition de chacun des éléments des collections à l’intérieur d’une même collection et entre les collections (en ligne, en constellations du dé culturellement reconnues, visibles simultanément pour les deux collections, etc.), densité, etc. Cette estimation peut permettre en particulier de former des groupements et ainsi être utilisée pour l’association terme à terme.

A l’aide de deux signifiants qui désignent les nombres

Nous allons présenter ici les stratégies « internes » à chaque type de signifiant, c'est-à-dire sans médiation par un autre signifiant qui désigne les nombres ni utilisation d’une collection figurée ou manipulable. Elles font intervenir certains principes et propriétés dégagés dans la première partie de la thèse qui permettent par exemple de pouvoir comparer deux nombres à deux chiffres uniquement en comparant leurs chiffres. Pour l'écriture chiffrée et les désignations parlées en France, ces stratégies dépendent donc de l’interprétation des systèmes de numération. Pour les nombres inférieurs à 10/dix, c'est l'interprétation strictement ordinale que nous privilégions.
Nous allons donner ces stratégies via l’exemple des nombres trente-et-un/31 et quarante-deux/42 que nous considérons comme génériques. Nous ne revenons pas sur les spécificités de certaines désignations propres à la numération parlée en France (onze à seize, soixante-dix à quatre-vingt-dix-neuf), largement abordées dans la première partie de la thèse.

Désignation parlée en France/Désignation parlée en France
Aspect ordinal sans repérant : trente et un se dit avant quarante-deux
Utilisation des repérants : trente se dit avant quarante, donc trente-et-un est avant quarante-deux
Utilisation des appuis additifs : trente c'est dix de moins que quarante (ou quarante c’est dix de plus que trente), donc trente-et-un c'est moins que quarante-deux
Utilisation des appuis multiplicatifs : trente c'est trois (dizaines) et quarante c'est quatre (dizaines), donc trente c'est une dizaine de moins que quarante, on en déduit que trente-et-un c'est moins que quarante-deux.

Ecriture chiffrée/Ecriture chiffrée
31 est inférieur à 42, car le premier chiffre de 31 désigne un nombre inférieur à celui désigné par le premier chiffre de 42.

« Désignation des groupements »/« désignation des groupements »

Nous envisageons des stratégies qui consistent à comparer les désignations des cardinaux du nombre de groupements, pour chaque type de groupement en jeu. Une stratégie comparable à la précédente est envisageable, en considérant les différents groupements (de même cardinal) selon un certain ordre : par exemple comparer le nombre de groupements de dix puis dans le cas où ils sont identiques, le nombre d'objets non groupés. Cependant, si les groupements utilisés ne sont pas constitués de manière maximale (par exemple deux groupes de dix et quinze unités) ou n'utilisent pas les mêmes groupements (par exemple, trois groupes de cinq pour l'un et deux groupes de dix et cinq pour l'autre), plusieurs désignations de même type sont possibles, et la stratégie précédente échoue.

Deux signifiants de type différent
Nous envisageons des stratégies se ramenant à comparer deux signifiants de même type. Il suffit ainsi d'utiliser préalablement une stratégie signalée auparavant permettant de traduire un signifiant d'un certain type en un autre. Par exemple dans le cas de la comparaison de deux nombres, l'un étant désigné par une écriture chiffrée (31) et l'autre par sa désignation parlée en France (quarante-deux). Il est possible d'utiliser une stratégie OF vers EC pour traduire l'écriture chiffrée en la désignation parlée en France, « 31 » en « trente-et-un », puis d'utiliser par exemple le fait que trente-et-un se dit avant quarante-deux.

A l'aide du signifiant du cardinal d'une seule collection

Il est possible soit de se ramener à la comparaison de deux signifiants, soit de se ramener à la comparaison de deux collections figurées ou manipulables : ces deux cas ont été traités auparavant.

4. Conclusion

4.1 Des outils théoriques pour aborder de nouvelles questions

a. Le cadre théorique

La variété des problèmes résolus dans les multiples dimensions signalées ci-avant et les connaissances-en-acte employées dans cette variété de problèmes rendent compte du degré de conceptualisation. Le processus d'apprentissage consiste alors à étendre la pertinence et l'efficacité des connaissances-en-acte[150] sur une plus grande variété de problèmes (constitutifs du concept). Agir sur ce processus (côté enseignement) nécessite de prendre en compte à la fois les connaissances anciennes d'un sujet et les classes de problèmes propres à un concept. Mais d'autres facteurs interviennent dans l'apprentissage. En effet, c'est le type de stratégie employée qui porte la trace, à travers les connaissances-en acte, des connaissances mathématiques travaillées et utilisées. Or, dans ces stratégies employées les signifiants apparaissent en lien avec certaines connaissances-en-acte. Ils permettent ainsi de passer du concept-outil au concept-objet. Plus exactement, c'est leur emploi systématique en relation avec les mêmes connaissances-en-acte dans certains problèmes qui permet de faire ce lien : un signifiant évoque un panel de possibilités (connaissances-en-acte) pour résoudre un éventail de problèmes et réciproquement un éventail de problèmes évoquera un certain nombre de signifiants utiles à leur résolution. Qui plus est, certains théorèmes-en-acte sont utilisés en lien avec plusieurs signifiants différents (simultanément ou indépendamment). Ce sont les propriétés mathématiques en jeu dans ces relations signifiants/signifié(s) constituant le concept-outil qui peuvent alors être ensuite objet d'étude. Cependant dans les premiers apprentissages l'étude de l'objet est plus problématique puisque ces relations sont encore peu

[150] C'est-à-dire augmenter le niveau de mise en fonctionnement des connaissances dans la terminologie de Robert (2007). Nous disposons pour ce faire des deux leviers : restriction et généralisation des schèmes.

stabilisées : le concept est encore en cours d'objectivation. C'est donc surtout un concept-outil non encore étudié en tant que concept-objet qui va intervenir dans les premiers temps de la conceptualisation et donc de l'apprentissage. Dans ce processus les signifiants jouent un rôle important. Ainsi, si un enjeu d'apprentissage est souvent exprimé en termes de signifiant en évoquant un concept-objet (par exemple la numération décimale de position), il nous faut dans notre cadre théorique le traduire en termes d'exploration d'une variété de problèmes, de connaissances-en-acte et d'étendue de leur opérationnalité pour un élève, ainsi que de connexions avec d'autres signifiants du même signifié(s) et finalement de connexions avec d'autres concepts. Ceci tout en tenant compte du niveau de conceptualisation déjà atteint par les élèves.

b. Des outils et des réponses partielles

Des outils

Les critères pour classer des stratégies que nous avons dégagés tiennent compte d'une part des liens entretenus entre les deux systèmes de numération et le signifié(s) « nombre » et d'autre part la diversité des stratégies possibles. Nous en avons dégagé un outil pour notre étude : la notion de cheminement cognitif au niveau du sujet qui résout un problème sur le nombre. En outre, nous avons utilisé les cheminements cognitifs pour analyser à l'aide de notre cadre théorique les problèmes susceptibles d'être rencontrés par les élèves en ce qui concerne leur premiers pas dans la conceptualisation du nombre faisant intervenir la numération écrite chiffrée.

Les interprétations au niveau du sujet

Notre cadre théorique permet d'apporter des éléments de réponse sur le type de questions posées à la fin de la première partie, en premier lieu de voir quelle est la différence au niveau du sujet entre les différentes interprétations. En effet, notamment à travers l'analyse des problèmes sur le nombre, nous avons mis en résonance stratégies et interprétations. Leur lien est complexe car il est difficile de relier directement théorèmes ou concepts-en acte et stratégies puis stratégies et problème. C'est plutôt un réseau que nous avons mis en évidence, et un réseau qui comporte sa propre structure. Ainsi, pour un problème donné, l'efficacité et la pertinence des stratégies reposent sur les potentialités des systèmes de numération quand des désignations du nombre sont en jeu. Au niveau du sujet de la TCC, notre analyse peut se comprendre comme une précision des liens entre d'une part les théorèmes, propriétés et relations des systèmes de numérations et d'autre part les possibilités d'extension et de restriction des schèmes utilisés. Ceci nous amène à considérer que les paramètres de la situation (au sens de Vergnaud) sont des éléments importants à prendre en compte pour appréhender les interprétations au niveau du sujet.

Un premier résultat

De manière globale, notre cadre théorique permet de distinguer chez un sujet l'usage d'interprétations arithmétiques (additives et multiplicatives) d'interprétations ordinales (strictement ou avec repérants). C'est lorsque les signifiants sont employés dans des problèmes des structures arithmétiques (additive ou multiplicative) que nous dirons que l'interprétation convoquée est de type arithmétique. Concrètement, cela peut permettre d'avoir un paramètre pour distinguer l'interprétation arithmétique additive de l'interprétation ordinale avec repérant chez un sujet. Si par exemple le cardinal est obtenu par réunion de deux collections, une de cardinal trente et une de cardinal dix, trente et quarante sont utilisés comme des appuis additifs. Si à partir de trente, la comptine numérique est utilisée pour considérer un par un les éléments restants jusqu'à en obtenir quarante, trente et quarante sont utilisés comme repérants. Nous avons indiqué cependant dans les définitions des termes « calculer » et « compter » en quoi la distinction était difficile parfois à saisir.

Des difficultés méthodologiques

Lorsque le concept outil devient un concept objet, les potentialités de chaque interprétation deviennent plus facilement analysables. Un exemple en est les procédés concrets de mise en signes que nous avons dégagés dans la première partie de la thèse. Cependant, dans les théorèmes-en-acte utilisés par le sujet, en particulier de par leur visée pragmatique (la finalité est que « ça marche » mais pas de savoir « pourquoi ça marche »), telle ou telle interprétation n'est pas identifiable en tant que telle : elle s'inscrit dans un réseau de connaissances (relatives à un champ conceptuel).
Particulièrement au début des apprentissages, les concepts sont pour le sujet/élève le plus souvent des outils, ce qui met en exergue des connaissances-en-acte et non des connaissances objectivées. Demander à un élève ce qu'il a fait et comment il a fait pour résoudre un problème, surtout pour un enfant de primaire, n'est donc pas un moyen efficace (à lui seul) ni fiable pour accéder à la propriété mathématique en jeu. Notre cadre théorique nous a fourni un outil qui relie le sujet et les connaissances qu'il utilise, ce sont les théorèmes-en-acte. Comment connaître les théorèmes-en-acte utilisé par tel élève ? L'étude que nous avons menée sur les stratégies dans les problèmes relatifs aux cardinaux de collection peut nous servir à délimiter un champ des possibles. Revenons sur celle-ci.
Nous avons relié certains (ensembles de) théorèmes-en-acte à des propriétés issues des interprétations dégagées dans la première partie de la thèse. Mais se pose la question de relier les stratégies envisageables et les théorèmes-en-acte. Utiliser la stratégie 1 dans les items 1, 3, 4 permet de réussir. Mais cette réussite n'assure pas une conception exacte de la cardinalité, ni une identification précise des connaissances utilisées. Les travaux de Piaget, mêmes rediscutés[151], mettent en évidence la complexité des mécanismes en jeu. Il est difficile d'y associer des théorèmes-en-acte *a priori*. Notons que toutefois, utiliser cette stratégie 1 (en la pensant efficace) dans le problème de l'item 5, et plus encore dans l'item 6 permet d'inférer une conception erronée de la cardinalité. Nous retenons cependant certains points qui permettent de faire une analyse des stratégies pour en inférer des théorèmes-en-acte :
- des recherches anciennes sur les connaissances (potentiellement) en jeu peuvent être utilisées,
- des stratégies erronées sont plus facilement interprétables que des stratégies menant au bon résultat, ainsi, il est plus facile d'associer des théorèmes-en-acte à certaines stratégies,
- une démarche globale doit être aussi entreprise pour chaque problème, c'est-à-dire qu'un découpage trop fin du problème général ne permet pas d'envisager un certain nombre de facteurs à prendre en compte : une stratégie peut être choisie par exemple de par son lien avec la suivante ou de par son lien avec la finalité du problème, ce qui permet d'inférer une plus grande variété de théorèmes-en-acte,
- les théorèmes-en-acte sont contextualisés,
- l'influence des connaissances anciennes est déterminante et une certaine évaluation de celles-ci est nécessaire *a minima*.

Ainsi n'est-il pas aisé pour l'observateur d'inférer un usage de telle ou telle interprétations de la numération dans les procédures observées, du fait en particulier que des mêmes procédures apparentes peuvent relever de différentes interprétations. Cependant la prise en compte des facteurs indiqués précédemment peut permettre une analyse.
Ceci a une conséquence d'ordre méthodologique. L'analyse des problèmes est nécessaire pour une étude du côté des élèves dans notre cadre théorique, mais nécessite des compléments

[151] Voir par exemple Bideaud, Lehalle & Vilette (2004) pour une synthèse.

d'information accessibles par d'autres moyens pour appréhender les facteurs propres à une classe.

4.2 Les questions soulevées, celle retenues

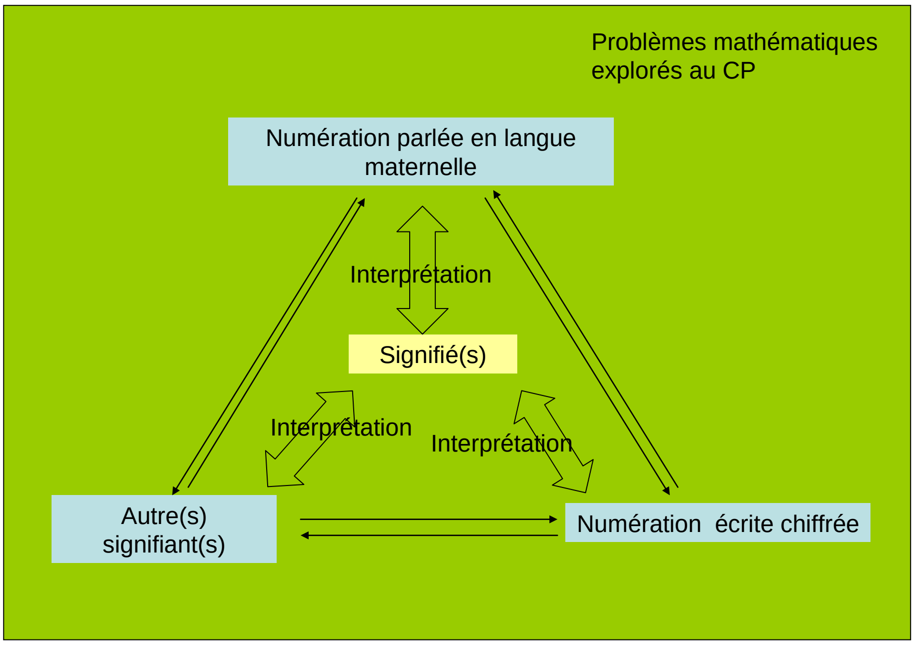
Nous relevons des questions sur l'apprentissage et sur l'enseignement.
Nous avons relevé des difficultés à classifier les problèmes à proposer aux élèves à des fins d'apprentissage, ce qui ressort d'une première question : <u>quels problèmes à proposer aux élèves ?</u> Ce premier niveau nécessite une étude plus approfondie que celle que nous avons faite afin de relier les théorèmes-en-acte, les stratégies, et les interprétations.
Nous avons mis en évidence des différences entre les différentes interprétations des numérations, la question se pose alors : <u>quelles sont les possibilités d'articulation des interprétations dans l'enseignement institutionnel ?</u> Ce deuxième niveau nécessite cette fois-ci une étude de la « circulation » des interprétations à une échelle plus globale que celle d'un problème.

Les deux questions sont liées. Ainsi, pour organiser l'apprentissage dans une classe, une progression à l'échelle des notions à articuler est nécessaire, mais la proposition de problèmes adéquats l'est aussi. Nous avons indiqué précédemment la complexité du travail concernant la classification des problèmes. Cependant, nous avons fait un premier pas qui permet de circonscrire les liens entre les interprétations et les problèmes via les stratégies envisageables pour résoudre ces derniers. Il est alors envisageable de répondre à la première question grâce à des tests en classe. Par contre nous n'avons donné pour l'instant aucune réponse sur l'articulation des interprétations dans l'enseignement que l'on peut proposer. Or ces réponses sont indispensables pour suivre l'objectif de la thèse, la compréhension des déroulements en classe, susceptible de mener à de nouvelles pistes pour l'enseignement (qui seraient encore à étudier). C'est pourquoi, nous allons développer des outils pour apporter des éléments de réponse à cette dernière question.

4.3 Vers une problématique en termes d'enseignement

a. La notion d'itinéraire cognitif d'enseignement

En considérant notre cadre théorique sur l'apprentissage, nous allons transposer au niveau de l'enseignement la notion de cheminement cognitif et les différentes interprétations. Ici nous faisons l'hypothèse qu'en jouant sur un certain nombre de paramètres et en tenant compte des connaissances anciennes des élèves, il est possible de leur proposer des problèmes qui favorisent l'utilisation de tel ou tel cheminement cognitif. Ces problèmes permettant en particulier de mettre en jeu tel ou tel aspect d'une interprétation.



Comme les interprétations interviennent dans les problèmes selon que ces derniers favorisent tel ou tel cheminement cognitif potentiellement emprunté par les élèves, ceci justifie une schématisation formellement proche de celle des cheminements cognitifs. Cependant, elle n'a pas la même finalité. Elle permet en effet de rendre compte des choix possibles d'enseignement par rapport à l'étude faite sur les interprétations que ce soit au niveau des mathématiques que du sujet. Nous avons dégagé des non-congruences, mais aussi des liens, la question est alors d'organiser les apprentissages des éléments mathématiques en jeu dans les interprétations (via les problèmes à poser aux élèves). Ainsi la notion d'itinéraire cognitif d'enseignement renvoie, au niveau de l'enseignement, à la façon d'organiser et de transformer les liens en jeu dans les cheminements cognitifs.

Les interprétations sont élaborées au fur et à mesure d'un itinéraire d'enseignement et donc tous les aspects n'y sont pas objet d'enseignement en même temps. L'itinéraire cognitif d'enseignement permet de pointer en particulier le moment du processus durant lequel l'interprétation de la numération écrite chiffrée se constitue, se démarquant de l'interprétation ordinale (avec et sans repérant) de la numération parlée en langue maternelle. Dans ce jeu se pose la question du rôle joué par les interprétations « arithmétiques». C'est ce que nous développons par la suite.

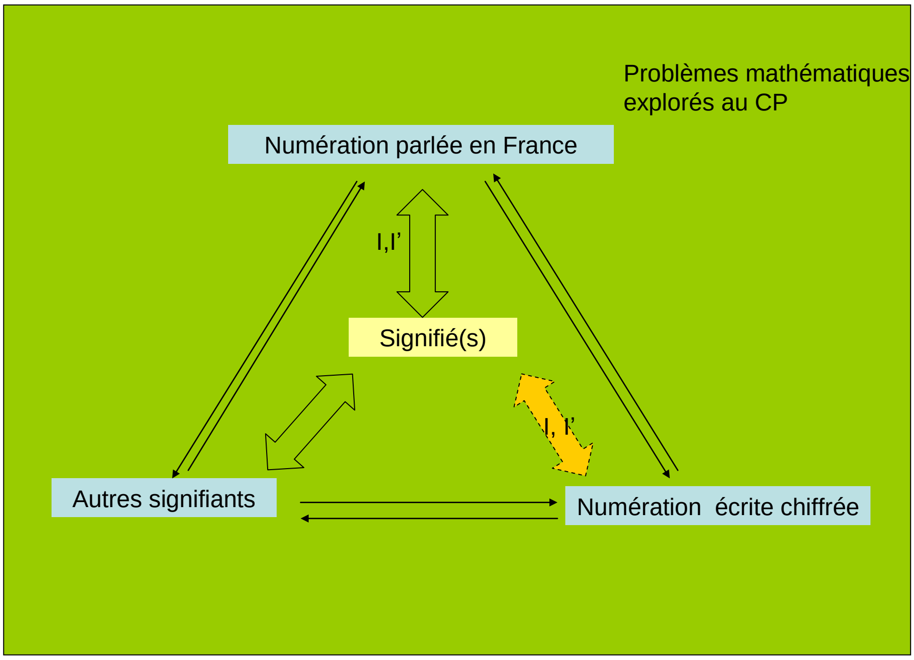
b. La problématique d'enseignement au CP

Nous reprenons les remarques données dans le chapitre initial de la thèse concernant sa présentation.
Les programmes de 2008 de l'école maternelle permettent d'inférer les interprétations en jeu avant le CP. Les extraits donnés ci-après sont exhaustifs en ce qui concerne le champ numérique.
« ***Approcher les quantités et les nombres*** :
L'école maternelle constitue une période décisive dans l'acquisition de la suite des nombres (chaîne numérique) et de son utilisation dans les procédures de quantification. Les enfants y découvrent et comprennent les fonctions du nombre, en particulier comme représentation de la quantité et moyen de repérer des positions dans une liste ordonnée d'objets. Les situations proposées aux plus jeunes enfants (distributions, comparaisons,

appariements...) les conduisent à dépasser une approche perceptive globale des collections. L'accompagnement qu'assure l'enseignant en questionnant (comment, pourquoi, etc.) et en commentant ce qui est réalisé avec des mots justes, dont les mots-nombres, aide à la prise de conscience. Progressivement, les enfants acquièrent la suite des nombres au moins jusqu'à 30 et apprennent à l'utiliser pour dénombrer.
Dès le début, les nombres sont utilisés dans des situations où ils ont un sens et constituent le moyen le plus efficace pour parvenir au but : jeux, activités de la classe, problèmes posés par l'enseignant de comparaison, d'augmentation, de réunion, de distribution, de partage. La taille des collections, le fait de pouvoir agir ou non sur les objets sont des variables importantes que l'enseignant utilise pour adapter les situations aux capacités de chacun. À la fin de l'école maternelle, les problèmes constituent une première entrée dans l'univers du calcul mais c'est le cours préparatoire qui installera le symbolisme (signes des opérations, signe « égal ») et les techniques.
La suite écrite des nombres est introduite dans des situations concrètes (avec le calendrier par exemple) ou des jeux (déplacements sur une piste portant des indications chiffrées). Les enfants établissent une première correspondance entre la désignation orale et l'écriture chiffrée ; leurs performances restent variables mais il importe que chacun ait commencé cet apprentissage. L'apprentissage du tracé des chiffres se fait avec la même rigueur que celui des lettres. […]
À la fin de l'école maternelle l'enfant est capable de :
- situer des événements les uns par rapport aux autres ;
- comparer des quantités, résoudre des problèmes portant sur les quantités ;
- mémoriser la suite des nombres au moins jusqu'à 30 ;
- dénombrer une quantité en utilisant la suite orale des nombres connus ;
- associer le nom de nombres connus avec leur écriture chiffrée ;
- comprendre et utiliser à bon escient le vocabulaire du repérage et des relations dans le temps et dans l'espace. ».

Nous relevons que le champ numérique abordé est celui des nombres inférieurs à trente et que les problèmes que les élèves doivent résoudre le sont par des stratégies concernant principalement l'utilisation de la comptine numérique, sa mémorisation étant un objet d'enseignement prescrit. Par ailleurs les problèmes de la structure additive sont abordés dans un champ numérique restreint, les symboles « + », « = » ne sont pas introduits *a priori* et la variété indiquée n'est pas détaillée. Ces éléments nous permettent d'inférer qu'à l'école maternelle la numération parlée est avant tout utilisée dans une interprétation ordinale (éventuellement avec repérants). En outre les écritures chiffrées nous semblent clairement employées comme la forme écrite de ces désignations orales, même si des remarques sur leur structuration formelle peuvent intervenir, par exemple à l'occasion de la présentation de calendriers.
Nous obtenons alors le schéma suivant :

Situation initiale au CP



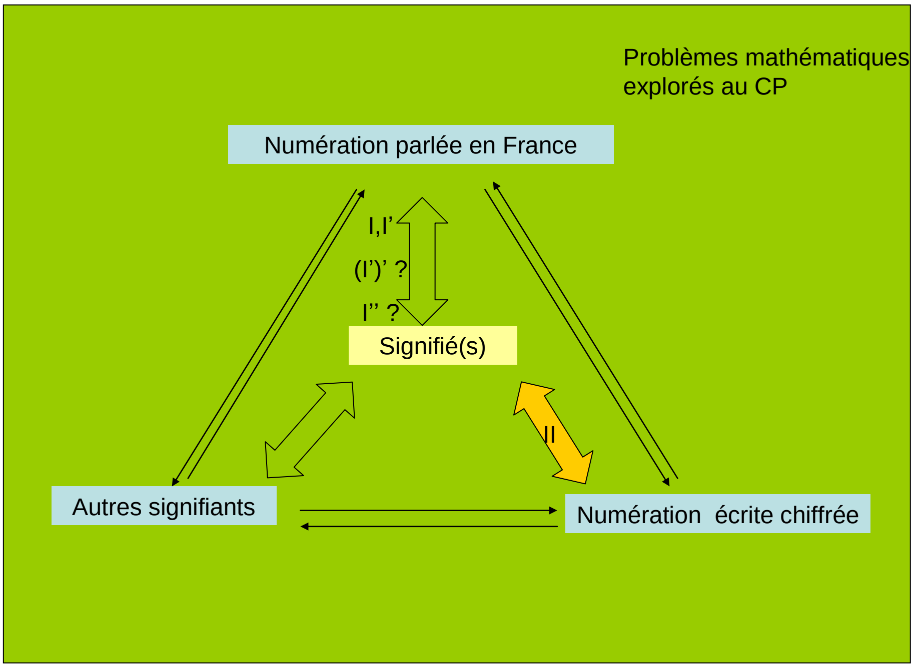
I indique une interprétation strictement ordinale
I' indique une interprétation ordinale avec repérant
La double flèche reliant la numération écrite chiffré au signifié(s) est en pointillés pour mettre en avant que l'interprétation vient essentiellement de celle de la numération parlée : typiquement « 23 » est la forme écrite de « vingt-trois » qui est employée dans une interprétation essentiellement ordinale.

Au CP, les programmes 2008 stipulent :
L'apprentissage des mathématiques développe l'imagination, la rigueur et la précision ainsi que le goût du raisonnement. La connaissance des nombres et le calcul constituent les objectifs prioritaires du CP et du CE1. La résolution de problèmes fait l'objet d'un apprentissage progressif et contribue à construire le sens des opérations. Conjointement une pratique régulière du calcul mental est indispensable. De premiers automatismes s'installent. L'acquisition des mécanismes en mathématiques est toujours associée à une intelligence de leur signification.
1 - Nombres et calcul
Les élèves apprennent la numération décimale inférieure à 1 000. Ils dénombrent des collections, connaissent la suite des nombres, comparent et rangent. Ils mémorisent et utilisent les tables d'addition et de multiplication (par 2, 3, 4 et 5), ils apprennent les techniques opératoires de l'addition et de la soustraction, celle de la multiplication et apprennent à résoudre des problèmes faisant intervenir ces opérations. Les problèmes de groupements et de partage permettent une première approche de la division pour des nombres inférieurs à 100. L'entraînement quotidien au calcul mental permet une connaissance plus approfondie des nombres et une familiarisation avec leurs propriétés.
Les tableaux suivants donnent des repères aux équipes pédagogiques pour organiser la progressivité des apprentissages. Seules des connaissances et compétences nouvelles sont mentionnées dans chaque colonne. Pour chaque niveau, les connaissances et compétences acquises dans la classe antérieure sont à consolider. La résolution de problèmes joue un rôle essentiel dans l'activité mathématique. Elle est présente dans tous les domaines et s'exerce à tous les stades des apprentissages.

	Cours préparatoire	Cours élémentaire première année
Nombres et calcul	*- Connaître (savoir écrire et nommer) les nombres entiers naturels inférieurs à 100.* *- Produire et reconnaître les décompositions additives des nombres inférieurs à 20 (“table d’addition”).* *- Comparer, ranger, encadrer ces nombres.* *- Écrire une suite de nombres dans l’ordre croissant ou décroissant.* *- Connaître les doubles des nombres inférieurs à 10 et les moitiés des nombres pairs inférieurs à 20* *.- Connaître la table de multiplication par 2.* *- Calculer mentalement des sommes et des différences.* *- Calculer en ligne des sommes, des différences, des opérations à trous.* *- Connaître et utiliser les techniques opératoires de l’addition et commencer à utiliser celles de la soustraction (sur les nombres inférieurs à 100).* *- Résoudre des problèmes simples à une opération.*	*- Connaître (savoir écrire et nommer) les nombres entiers naturels inférieurs à 1 000.* *- Repérer et placer ces nombres sur une droite graduée, les comparer, les ranger, les encadrer.* *- Écrire ou dire des suites de nombres de 10 en 10, de 100 en 100, etc.* *- Connaître les doubles et moitiés de nombres d’usage courant.* *- Mémoriser les tables de multiplication par 2, 3, 4 et 5.* *- Connaître et utiliser des procédures de calcul mental pour calculer des sommes, des différences et des produits.* *- Calculer en ligne des suites d’opérations.* *- Connaître et utiliser les techniques opératoires de l’addition et de la soustraction (sur les nombres inférieurs à 1 000).* *- Connaître une technique opératoire de la multiplication et l’utiliser pour effectuer des multiplications par un nombre à un chiffre.* *- Diviser par 2 ou 5 des nombres inférieurs à 100 (quotient exact entier).* *- Résoudre des problèmes relevant de l’addition, de la soustraction et de la multiplication.* *- Approcher la division de deux nombres entiers à partir d’un problème de partage ou de groupements.* *- Utiliser les fonctions de base de la calculatrice.*

La distinction entre les deux numérations ne nous semble pas toujours claire. Néanmoins, à travers son utilisation pour dénombrer et pour faire des calculs posés, nous inférons qu’il s’agit d’introduire des éléments de l’interprétation de référence que nous avons dégagée dans le premier chapitre afin de rendre mobilisable et efficace l’emploi de la numération chiffrée de référence dans les problèmes cités. Ainsi, nous allons considérer que l’interprétation de référence de la première partie de la thèse est aussi de référence pour l’enseignement au CP, bien que tous ses aspects ne soient pas nécessairement en jeu dès le CP. Nous avons ainsi les schémas suivant :

Situation finale recherchée



I indique une interprétation strictement ordinale
I' indique une interprétation ordinale avec repérant
II indique l'interprétation de référence de la numération écrite chiffrée.
(I')' indique une interprétation arithmétique additive. Nous avons mis un point d'interrogation car elle nous apparaît moins explicitement en jeu dans les programmes, bien que les problèmes arithmétiques nous semblent requérir une telle interprétation.
I'' indique une interprétation arithmétique multiplicative. Nous pouvons faire les mêmes remarques que précédemment, avec en outre le fait que les problèmes de la structure multiplicative interviennent moins en CP.
Par ailleurs le point d'interrogation sur ces deux interprétations signale que nous nous posons la question de leur rôle dans l'itinéraire d'enseignement. En effet, nous avons indiqué dans la première partie de la thèse une proximité toute particulière entre l'interprétation de référence et l'interprétation arithmétique multiplicative : peut-elle être exploitée ?

En résumé, la construction d'une nouvelle interprétation (de référence) pour la numération écrite chiffrée nécessite d'utiliser des connaissances anciennes sur le nombre. Celles-ci sont liées de manière prédominante à la numération parlée. Or d'une part les interprétations potentielles de la numération parlée sont non congruentes avec celle visée dans la numération écrite chiffrée et d'autre part l'interprétation initiale de cette dernière (c'est-à-dire l'interprétation à la fin de la maternelle) est liée à l'interprétation ordinale de la numération parlée (dans un rapport écrit/oral). Il faut donc passer de la situation initiale à la situation finale. Les itinéraires cognitifs d'enseignement au CP doivent proposer des solutions. Ces solutions ne sont pas élémentaires car les interprétations sont élaborées au fur et à mesure d'un itinéraire d'enseignement. Toutes les propriétés mathématiques, tous les liens entre les différentes interprétations des numérations n'y sont pas objet d'enseignement en même temps. Certains éléments peuvent ne pas apparaître de manière explicite, comme par exemple la maximalité des groupements. Des choix sont donc à faire parmi tous les possibles.
Les questions que nous nous posons sont alors les suivantes :
Quels sont les itinéraires qui peuvent être proposés ?
Quels en sont les avantages, les écueils ?

Quels en sont les marges de manœuvre ?
Y a-t-il des alternatives envisageables ?

c. Plan d'étude

La problématique peut se formuler en termes d'identification puis de moyens de parcours effectif en classe d'itinéraires cognitifs d'enseignements afin de fournir des éléments pour comprendre les déroulements en classe, voire estimer des avantages et des inconvénients, tant pour les élèves (cursus) que pour l'enseignant (conditions d'exercice).
Nous allons faire une étude de l'existant pour appréhender les possibles et les « écueils » de ces itinéraires. Il nous semble difficile d'analyser directement les déroulements en classe sans comprendre les itinéraires cognitifs d'enseignement proposés. Nous devons pouvoir comprendre à quel niveau ils interviennent en classe et ainsi poser les questions de manière précise. En outre, l'étude des itinéraires (déjà) envisagés pour la classe permet de décrire l'existant, mais éventuellement aussi ce qui pourrait être proposé et qui ne l'est pas.
Ainsi, nous menons une étude à différents niveaux qui s'emboîtent : les écrits des recherches et des manuels (suite de la deuxième partie de la thèse) puis les déroulements en classe (troisième partie). Chacun de ces niveaux va permettre d'affiner au fur et à mesure les questions qui se posent et nous conduire à faire des choix dans celles qui vont être traitées.

La thèse ouvre des perspectives de recherche concernant la classe, par exemple des propositions de scénarios (cf. le dernier chapitre). Par ce biais il est envisageable d'étudier les problèmes qui peuvent être posés aux élèves. C'est donc *in fine* aussi un moyen de pouvoir donner des éléments de réponse à certaines questions que nous nous étions posées dans ce chapitre à propos de ces problèmes.

CHAPITRE V
Des itinéraires proposés dans les recherches antérieures

Introduction

L'étude mathématique et linguistique de la première partie de la thèse a permis de préciser au niveau des signes la non-congruence entre les deux numérations. Pour comprendre son rôle dans l'enseignement, nous allons étudier dans ce chapitre la manière dont elle est prise en compte dans les recherches sur l'enseignement. Rappelons le problème dégagé dans le chapitre précédent. La construction d'une nouvelle interprétation (de référence) pour la numération écrite chiffrée nécessite d'utiliser des connaissances anciennes sur le nombre. Celles-ci sont liées de manière prédominante à la numération parlée. Nous avons mis en évidence que les interprétations potentielles de la numération parlée sont non congruentes avec celle de la numération écrite chiffrée de référence. En outre l'interprétation initiale de la numération écrite chiffrée (c'est-à-dire l'interprétation à la fin de la maternelle) est liée à l'interprétation ordinale de la numération parlée dans un « simple » rapport écrit/oral : les écritures chiffrées sont la forme écrite des désignations orales.
Notre objectif est de dégager des itinéraires cognitifs d'enseignement dans les travaux concernant l'enseignement/apprentissage du nombre entier chez les enfants, en référence à la définition d'itinéraire cognitif d'enseignement dégagée dans le chapitre précédent[152].
Nous allons aussi considérer les recherches concernant la numération parlée en anglais. Au niveau de l'analyse entreprise, les différences que nous avons repérées dans la première partie de la thèse entre les interprétations de la numération en langue anglaise et française n'entrent pas en ligne de compte. De ce fait, nous utilisons le terme de <u>numération parlée en langue maternelle</u> pour parler de manière générique de la numération parlée de type indo-européen (anglais, français, allemand, espagnol, italien, etc.). Ce terme souligne en outre le fait que l'élève accède initialement au nombre via cette numération.
Pour relater les résultats des recherches concernant les premiers pas dans la numération nous avons été confronté à l'utilisation d'un vocabulaire différent selon les auteurs, le même mot ne signifiant pas toujours la même chose : représentation, concept, conception, champ conceptuel, structures mentales, structures conceptuelles[153], etc. Chacun fait référence à une approche spécifique dont la description précise n'est pas nécessaire pour notre étude. En effet, ce chapitre aborde les recherches sous l'angle des itinéraires cognitifs d'enseignement. Ainsi, nous ne traitons pas des théories de l'apprentissage en elles-mêmes bien qu'elles puissent contribuer à leur établissement. En outre, les chercheurs y font référence de manière explicite ou non, et nous nous limitons ici à signaler le fait qu'il n'y a pas de consensus sur une théorie en particulier. L'opposition relatée par Verschaffel, Greer & De Corte (2006) entre Schrager & Siegler d'un côté et Baroody & Tiilikainen (2003) d'un autre indique bien l'étendue des points de vue adoptés. Les premiers ne prennent pas en compte dans la conceptualisation les facteurs socioculturels, ce que font les seconds. Par ailleurs deux grandes tendances se dégagent pour décrire le processus d'apprentissage : de manière schématique, il s'agit de privilégier un mouvement des savoir-faire vers les savoirs (« *skills-first* ») ou bien des savoirs vers les savoir-faire (« *concepts-first* »), Verschaffel & al. (2006). La plupart des chercheurs s'accordent sur le fait que les deux doivent intervenir de manière non indépendante, mais la question de savoir précisément quand tel ou tel savoir ou tel ou tel savoir-faire doit être abordé est encore largement une question ouverte. Verschaffel & al. (2006) indiquent quant à eux l'importance du contexte socioculturel et celui des « instructions » (« *sociocultural and intructional contexts* ») dans le développement d'un concept.

---

[152] Rappelons qu'ils sont la transcription en termes d'enseignement du problème précité, en référence à la modélisation de l'apprentissage de la numération écrite chiffrée traduite en particulier grâce au concept de cheminement cognitif potentiel au niveau d'un sujet (élève).
[153] Ainsi que leur correspondant en langue anglaise.

Par ailleurs, conformément à ce qui a été développé dans le chapitre précédent, nous utilisons ici le terme interprétation pour indiquer une des interprétations définies dans la première partie de la thèse. Rappelons que nous avons dégagé une unique interprétation (donc de référence) pour la numération écrite chiffrée et trois pour la numération parlée en langue maternelle[154] (indo-européenne). En outre, les éléments de l'interprétation de référence sont envisagés au fur et à mesure d'un itinéraire d'enseignement et donc tous ses aspects n'y sont pas objet d'enseignement en même temps. L'itinéraire cognitif d'enseignement se centre sur le moment du processus durant lequel l'interprétation de la numération écrite chiffrée se constitue, se démarquant de l'interprétation (ordinale avec repérant) de la numération parlée en langue maternelle.
D'un point de vue méthodologique, dans ce chapitre, nous allons partir des recherches de Fuson comme base de discussion. Ces recherches sont en effet celles citées principalement dans la synthèse qu'ont faite Verschaffel & al. (2006) sur la numération. Elles s'appuient sur des expérimentations nombreuses et variées avec des élèves en collaboration avec plusieurs équipes de recherche et sur un temps long. En outre, elles fournissent non seulement des modèles des conceptions des élèves sur les écritures chiffrées, mais elles proposent encore des indications pour l'enseignement, que nous pouvons interpréter en termes d'itinéraires cognitifs d'enseignement. Nous étudions ensuite les résultats obtenus par d'autres recherches, qu'ils soient complémentaires ou menant à d'autres conclusions. Nous terminons par une présentation synthétique des propositions des chercheurs reprises dans le cadre de notre propre recherche.

1. La recherche de Fuson

1.1 Description

Nous allons principalement nous référer à la recherche de Fuson, Wearne, Hiebert, Murray, Human, Olivier, Carpenter & Fennema (1997) qui synthétise le travail fait par quatre groupes de chercheurs, à celle de Fuson & Li (2009) qui précise une certaine approche de l'enseignement de la numération écrite chiffrée et enfin à celle de Fuson & Briars (1990) qui rend compte de deux expériences sur l'introduction de l'écriture chiffrée.
L'article de 1997 est issu d'une analyse des travaux des élèves[155] dans quatre projets d'enseignement différents menés par quatre équipes différentes auprès d'enfants de classe primaire parlant l'anglais : trois aux Etats-Unis et un en Afrique du Sud. Cet article dégage des modèles de conception des élèves sur la numération écrite chiffrée. Les recherches se basent sur l'hypothèse (admise) que la conceptualisation se voit (et s'opère) à travers les méthodes de résolution employées dans un panel de problèmes rencontrés dans la classe et hors de la classe. La théorie de l'apprentissage explicitement employée est que les « *objets*[156] » (d'apprentissage) ne vont pas imprégner les apprenants d'une manière univoque, mais qu'ils vont prendre place dans la structure mentale propre à chacun, ses propres « structures conceptuelles » (*conceptual structures*) : il faut donc tenir compte de ces dernières. L'enseignement consiste alors à favoriser l'emploi et l'émergence de différentes «

[154] Voire quatre si on distingue une numération strictement ordinale d'une numération ordinale avec repérant.
[155] Les problèmes posés aux élèves ne sont pas détaillés dans les articles que nous avons consultés. L'âge des élèves n'est pas non plus précisé dans l'article de 1997. Le projet mené par l'équipe de Fuson prend appui plus spécifiquement sur les difficultés des élèves pour effectuer des additions ou/et des soustractions à partir des écritures chiffrées de nombres à au moins deux chiffres, donc après l'introduction de l'écriture chiffrée proprement dite.
[156] Le terme « objet » est utilisé par Fuson. Nous l'avons interprété comme « objet » de l'apprentissage, en particulier les mathématiques sous-jacentes en relation avec des savoir-faire, mais aussi mettant en jeu des signifiants divers.

structures conceptuelles » appropriées à différents problèmes, grâce à des interactions sociales et le maniement de différents « objets », en tenant compte des structures cognitives déjà existantes de chaque enfant. Quatre types de paramètres influant sur le développement des conceptions des élèves sont mis en avant : le langage utilisé par les élèves et les enseignants, le matériel physique utilisé, les problèmes à résoudre, et l'organisation des activités en classe. En outre est relevé le fait que le processus de conceptualisation se déroule sur un temps long pour les élèves parlant un langage européen. Ceci est en écho avec la modélisation de l'apprentissage que nous avons développée dans le chapitre précédent, ce qui renforce en ce sens la pertinence de son adoption dans le cadre de la thèse. Mais comme nous l'avons signalé, notre but n'est pas de chercher à mettre à jour les théories des chercheurs. Fuson rappelle que des différences sont à noter avec des élèves parlant certaines langues asiatiques. Le système de numération parlée joue ainsi un rôle important dans ce processus et les régularités pour la désignation parlée des grands nombres (s'écrivant au moins avec trois chiffres) le facilitent. Nous allons commenter les résultats synthétisés dans le tableau p. 138 de l'article Fuson & al. (1997), tableau que nous avons reproduit.
Six modèles de « conceptions » sont relevés (sous forme de triades) : cinq « correctes » et une erronée. Chaque modèle de conception est décrit par une triade mettant en jeu trois « pôles » : la désignation parlée en langue maternelle, la désignation écrite chiffrée et une organisation d'une collection. Ces pôles sont reliés par six doubles flèches qui indiquent que les relations se font dans chacun des deux sens et entre chacun des pôles : par exemple, partir d'une écriture chiffrée pour donner la désignation parlée et réciproquement. Le type de relation est propre à chaque triade et ces triades sont illustrées par les schémas de la figure 1. C'est la donnée simultanée des trois doubles flèches qui permet de décrire un modèle de conception. Fuson relève trois grandes catégories de conceptions à travers les erreurs relevées chez les élèves (catégories que l'on trouvera en filigrane dans toutes les recherches) : une conception de l'écriture chiffrée comme une marque globale du nombre (*Unitary single digit* et *Unitary Multidigit*), une deuxième comme juxtaposition de plusieurs chiffres indépendants (*Concatened single digit*), et une dernière comme système de plusieurs chiffres dont la position est signifiante (*Decade and One, Sequence Tens and Ones, Separate Tens and Ones*). Dans cette dernière catégorie différentes conceptions sont modélisées suivant le sens qui est donné au chiffre selon sa position. Une relation est systématiquement mise en avant : celle entre l'écriture chiffrée et la désignation parlée. Deux paramètres sont alors la plupart du temps aussi utilisés pour décrire les conceptions : la place de désignations annexes de type « deux dizaines et trois unités » qui remplace la désignation parlée usuelle dans la dernière triade Separate Tens and Ones (voir aussi Fuson & Li, 2009), ainsi que celle de l'organisation d'une collection d'objets. En outre dès l'article de 1990, Fuson et Briars indiquent l'intérêt pour l'apprentissage de la numération chiffrée de l'emploi d'un matériel de numération « *base-ten blocks* » constitué de jetons (unités), de barres (dizaines), de plaques (centaines) et de cubes (milliers).

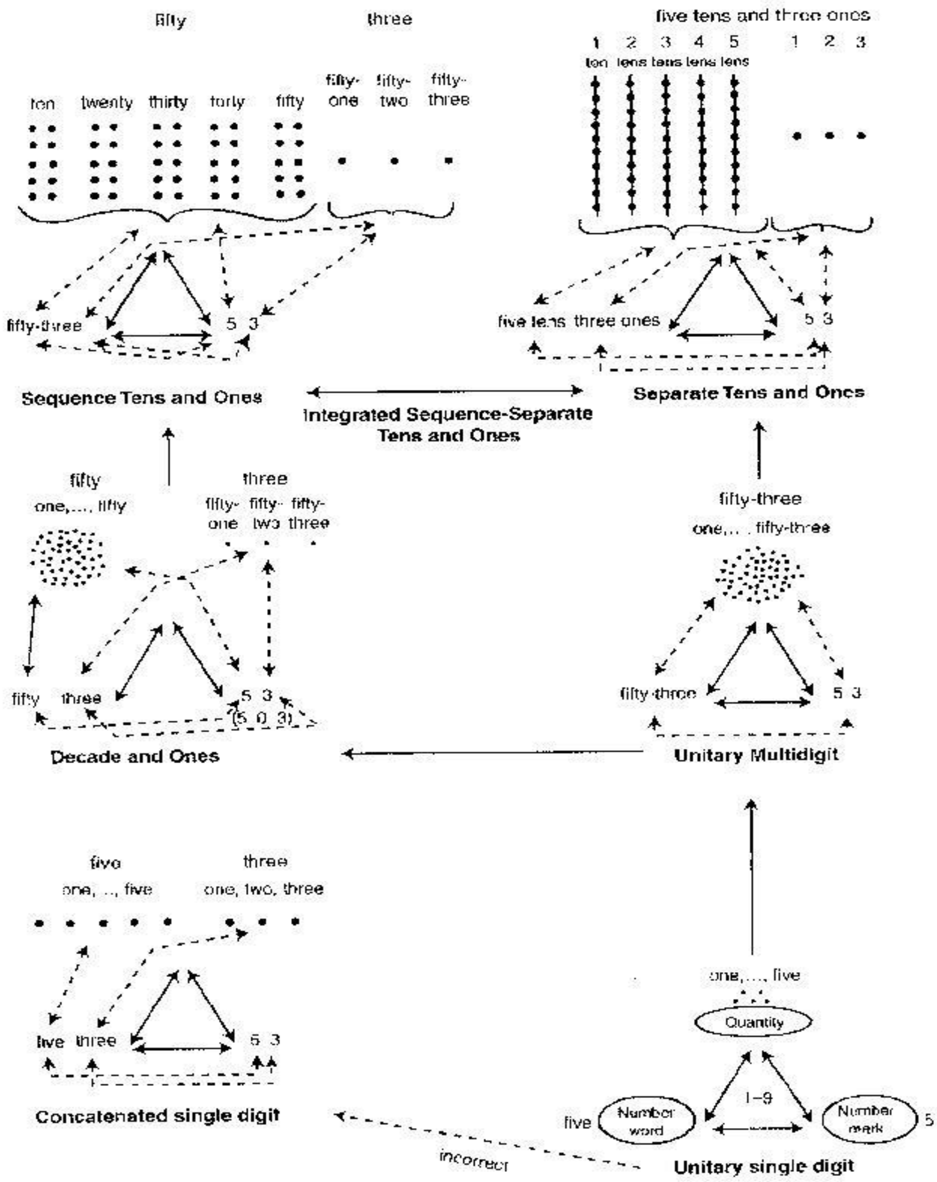


Figure 1. A developmental sequence of children's two-digit conceptual structures: The UDSSI Triad Model

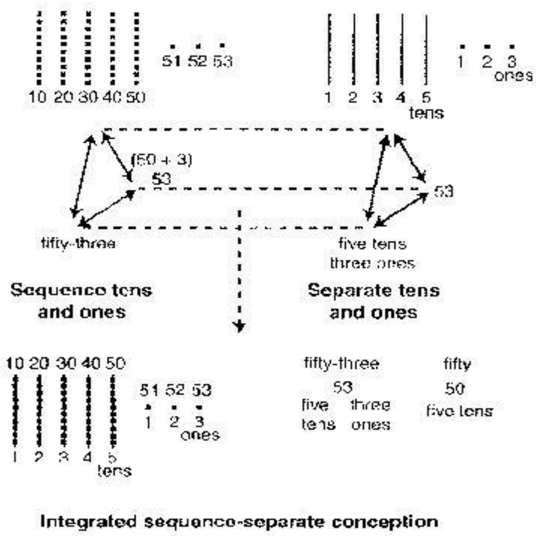


Figure 1—continued. A developmental sequence of children's two-digit conceptual structures

Bien qu'elle constate que des conceptions différentes (relatives à des triades différentes) soient mobilisées par un même élève dans un même problème, ou bien que réciproquement un même élève utilise une même conception dans différents problèmes[157], Fuson fait de ces triades un modèle successif pour l'enseignement, chaque triade étant une étape dans une modélisation de la conceptualisation. Les flèches qui relient les différentes conceptions indiquent ce modèle de développement (précisé dans la deuxième partie de la figure 1, « *figure 1-continued* ») à partir duquel Fuson donne des indications pour l'enseignement. Les deux dernières triades en haut de la figure 1, et même plus spécifiquement la dernière, *Separate Tens and Ones*, constituent alors l'enjeu de l'apprentissage de la numération chiffrée. L'enseignement prend ainsi appui sur les conceptions anciennes (les triades) qui doivent avoir été construites auparavant selon l'ordre indiqué par les flèches de la figure. En outre, chacune des six flèches relatives à chaque triade doit avoir été établie à des moments différents selon un ordre spécifique. Finalement, chaque conception est abordée à des moments différents selon les nombres en jeu.
Fuson note que la grandeur des nombres en jeu influe durablement sur l'utilisation de telle ou telle conception, mais aussi que, même tardivement, une conception erronée peut être convoquée alors même qu'une conception exacte est disponible. L'exemple emblématique donné est celui de l'algorithme des additions de nombres écrits avec des chiffres présenté verticalement, dans lequel les nombres restent traités longtemps chiffre à chiffre chez certains enfants, sans lien entre eux (non compréhension de ce qu'en France nous appelons la retenue) : la *concatenated single digit conception* est ainsi qualifiée de « *constantly seductive digits conception* ».

1.2 Analyse

Nous reconsidérons les recherches de Fuson à l'aune de notre cadre théorique : quel itinéraire cognitif d'enseignement est-il proposé ? Naturellement, les auteurs n'en proposent pas un explicitement, puisque la notion d'itinéraire cognitif d'enseignement est propre à notre recherche. Cependant, ils font des propositions pour l'enseignement, propositions que nous allons pouvoir analyser grâce à cette notion. C'est elle qui va nous donner la possibilité d'avoir une vue d'ensemble des recherches de Fuson, puis ensuite des autres recherches. Dans les analyses que nous entreprenons, nous extrayons donc les éléments qui nous permettent de caractériser leur proposition(s) en termes d'itinéraire cognitif d'enseignement.

Les écritures chiffrées sont associées dès le début à la numération parlée en langue maternelle via une collection (non organisée). Il va s'agir alors de faire évoluer l'interprétation initiale de la numération parlée, que nous identifions comme strictement ordinale et sans repérant (*unitary single* digit), vers une interprétation additive puis multiplicative[158] (*Separate Tens and Ones*). C'est ce que nous inférons de la succession de l'évolution des triades. Ainsi, les liens successivement entretenus entre l'organisation de la collection et la numération parlée en langue maternelle permettent de faire évoluer l'interprétation de la numération écrite chiffrée.
Par ailleurs, nous devons identifier les « pôles » dans notre cadre théorique. Les désignations orales et écrites chiffrées sont des signifiants qui s'organisent au fur et à mesure en système sémiotique, tandis que la collection consiste un terrain d'investigation particulier pour poser des problèmes liés à la conceptualisation du nombre. Le matériel de numération « *base-ten blocks* » est aussi un terrain d'investigation. Cependant, dans le cas où ce matériel est utilisé

[157] Nous y voyons une ressemblance avec la notion de connaissances mobilisables.
[158] Rappelons que nous avons indiqué dans le chapitre précédent en quoi il était difficile de distinguer l'interprétation ordinale avec repérants et celle additive avec appuis dans notre numération en français. Le problème est identique pour la numération parlée en anglais.

fréquemment dans des problèmes numériques, il acquiert un statut de signifiant. A la différence des deux signifiants précités, il est susceptible d'avoir une « durée de vie » limitée dans le sens où son enseignement n'est généralement pas prescrit dans l'institution scolaire ni culturellement utilisé. Le matériel de numération est donc un moyen d'enseignement et d'apprentissage (optionnel) et n'est pas objet d'apprentissage (mais outil pour l'enseignement). Ce signifiant « matériel », peut cependant suivant la place qui lui est accordé se constituer en système de representamens, et ainsi être relié au nombre par un interprétant spécifique qu'il est possible de décrire par comparaison avec les interprétants évoqués pour les systèmes de numération. Il peut être du ressort d'une numération « agie » décrite dans la première partie de la thèse et plus précisément ici d'une numération liée au codage/décodage de l'organisation spécifique d'une collection. Ainsi ces signifiants, peuvent se constituer en système sémiotique dont la première partie de l'interprétant est la même que celui de l'écriture chiffrée (lié à la décomposition dite polynomiale). Cependant la notion de chiffre n'y est pas abordée, que ce soit leur nombre, leur graphie, leur disposition (ligne, colonne, sens de lecture) ou la nécessité du zéro. En outre, ce système de signifiants étant matériel, il offre certaines possibilités liées à la manipulation des objets (par exemple effectuer des additions et des soustractions en échangeant, classant, organisant les representamens matériels). Néanmoins, il ne peut remplir les fonctions de l'écrit concernant la mémoire et la communication. En outre, il peut ne pas constituer un système de numération dans le cas où il n'est pas utilisé dans le but de désigner un nombre. Son rôle joué dans la constitution des triades (il n'est pas présent dans la description des triades) nous permet d'inférer que le matériel de numération « *base-ten blocks* » n'est pas considéré en tant que système de numération. Mais Fuson & Li (2009) indiquent l'utilisation d'un tel système de numération, calqué sur une numération « régulière » dont il a été question dans la première partie de la thèse, c'est à dire une numération dont l'interprétation est arithmétique multiplicative (les appuis multiplicatifs étant dix, cent, mille, dix-mille, etc.). Nous y lisons en effet p. 801: « *[…] tens and ones words that where expanded forms of East Asian words […] : 12 was said as twelve and as one ten two ones (the East Asian form is just one ten two).* ». Par contre, les autres signifiants du nombre ne vont pas se constituer en système de numération. Fuson & Briars (1990) indiquent par exemple « *four big cubes, two flats, five long, seven little cubes* » relativement au matériel « *base-ten blocks* ». Il s'agit là de décrire une collection organisée en groupements de dix, cent, mille. Ce type de signifiant fait partie des « désignations des groupements », terminologie qui souligne cette fonction bien qu'ils puissent potentiellement constituer un système de numération avec un interprétant spécifique à un système sémiotique. Par exemple, ces désignations du type « trois paquets de dix et deux » peuvent être des « désignations des groupements » avant éventuellement de devenir un système de numération « en unités ». Notons que la terminologie décontextualisée « trois dizaines et deux unités » fait cependant plus référence à un tel système de numération[159].

Nous retenons ainsi que, de par son interprétant, chaque « autre signifiant » peut jouer un rôle dans un itinéraire cognitif d'enseignement. Dans les recherches de Fuson, il s'agit de faire évoluer conjointement le système de signifiant « numération parlée » et le système de signifiant « numération écrite chiffrée », d'une interprétation ordinale vers une multiplicative. Chacun de ces « autres signifiants » en favorise certains aspects, comme l'organisation d'une collection en groupes (de dix), mais ne les prend pas tous en charge. Nous avons signalé en outre que dans l'article de 2009, un de ces autres signifiants est, selon notre analyse, clairement constitué en système de numération.

[159] Notons que *ten* en anglais signifie à la fois dizaine et dix.

2. Les autres recherches : différentes approches

D'une manière générale, nous retrouvons dans toutes les recherches les trois grandes catégories de conception dégagées par Fuson : l'écriture chiffrée comme une marque globale du nombre (non distinction des chiffres), comme juxtaposition de plusieurs chiffres indépendants ou comme système de plusieurs chiffres dont la position est signifiante. Ainsi, ce qui différencie notablement les autres recherches de celles de Fuson c'est, d'une part la place accordée à l'organisation de la collection et plus généralement aux autres signifiants (les « pôles »), et d'autre part, de manière non indépendante, le modèle de développement de la conceptualisation qui est proposé, c'est-à-dire l'évolution des interprétations de la numération écrite chiffrée et de la numération parlée ainsi que de leurs liens. Comme pour l'étude précédente consacrée aux recherches de Fuson nous allons interpréter les « pôles » rencontrés comme des signifiants (système de numération ou non) ou comme des domaines d'exploration de problèmes et nous allons indiquer quelle est leur fonction dans l'itinéraire proposé. Nous allons aussi indiquer quels sont les interprétants que nous pouvons leur associer. Cependant, ces signifiants ne sont pas en général des objets d'enseignement institutionnellement identifiés et ils sont abordés en relation avec d'autres signifiants dans une variété de problèmes non spécifiée. La détermination des cheminements cognitifs potentiels dans un enseignement effectif mettant en jeu ces signifiants demande des informations que nous ne pouvons pas obtenir. Nous allons ainsi nous limiter à un niveau d'analyse nous permettant d'envisager un champ des possibles au niveau des itinéraires cognitifs d'enseignement.

2.1 La variété des problèmes à aborder

La recherche de Fuson se base avant tout sur une analyse des réponses d'élèves confrontés à des exercices et des questions. Cette méthodologie de recherche est un des points de convergence de la quasi totalité des recherches que nous avons consultées, même si des auteurs comme DeBlois (1995, 1996) partent tout d'abord de considérations théoriques sur l'apprentissage (d'essence piagétienne en ce qui la concerne) qui permettent d'analyser le travail des élèves. Ainsi, les mots procédures ou encore stratégies sont employés. De plus, ce sont surtout les erreurs des élèves qui sont analysées, elles sont prises comme trace des « mathématiques à l'œuvre[160] ». Les problèmes abordés sont principalement relatifs à l'obtention d'une désignation parlée ou chiffrée du cardinal d'une collection (ou inversement, relatifs à la production d'une collection de cardinal donné par une désignation parlée ou chiffrée) ou encore à la comparaison de nombres, soit signifiés à travers les cardinaux de collections, présentes (manipulables ou non) ou figurées, soit indiqués par une désignation parlée ou écrite chiffrée. Cependant, beaucoup d'auteurs citent non seulement des problèmes de dénombrement, mais aussi des problèmes mettant en œuvre des transformations de cardinaux par ajout/retrait ainsi que des problèmes mettant en jeu deux voire trois cardinaux. C'est le cas pour Fuson en particulier mais aussi dans la synthèse sur les recherches de Verschaffel & al. (2006), qui mettent en avant des problèmes d'addition et de soustraction de nombres représentés par leur écriture chiffrée. Un consensus nous semble être atteint sur le fait d'aborder une certaine variété de problèmes sur un long terme, ce qui fait écho à notre

[160] Nous utilisons cette expression sans plus de précision en ce qui concerne les recherches étudiées. Dans celles-ci, les enjeux mathématiques sont généralement inférés à la fois de l'observation des procédures des élèves et de notions mathématiques sur la numération non toujours complètement explicitées. En effet, le plus souvent, le format des articles de publication ne permet pas d'exposer complètement les notions mathématiques en jeu dans les numérations, d'autant que celles-ci peuvent être considérées comme connues des lecteurs. Dans le premier chapitre de la thèse, nous avons montré leur complexité.

cadre théorique. Cependant cette variété n'est pas toujours questionnée en elle-même, et l'ordre ainsi que la temporalité de la nature des problèmes à aborder sont différents selon les auteurs. Pour autant nous pouvons interpréter certaines recherches, Fuson (1990), DeBlois (1996) comme des propositions de proposer « rapidement » des problèmes de techniques opératoires mettant en jeu des nombres à plusieurs chiffres, les problèmes menant à des additions et des soustractions ayant été traités auparavant avec la numération parlée. Verschaffel & al. (2006) indiquent que selon Buys (2001) chaque type de stratégie dans ces problèmes élémentaires renvoie à une conception différente du nombre.
Les différences entre les stratégies pour les opérations (en particulier addition et soustraction) peuvent être reliées aux interprétations que nous avons dégagées. Citons par exemple les trois types de stratégies (de calcul mental) pour des additions de nombres de vingt à cent relatées par Torbeyns, Vanderveken, Verschaffel & Ghesquière (2006). Les « *split stratégies* » qui s'appuient sur une séparation des nombres avec appui sur la dizaine inférieure (49 + 25 = ? ; 40 + 20 = 60 ; 9 + 5 = 14; 60 + 14 = 74), les « *jump strategies* » qui s'appuient sur un sur- ou sous-comptage de dizaines (« *counting up and down tens* ») suivi d'un autre en unités (49 + 25 = ? ; 49 + 20 = 69 ; 69 + 5 = 74) et enfin les « *varying strategies* » qui mettent en jeu des propriétés arithmétiques soit par des procédures de compensation (49 + 25 = ? ; 50 + 25-1 = 75-1 = 74) soit par des « *short-jump* » ou stratégies d'addition par complémentarité (71-69 = ? ; 69 + 2 = 71 ; donc la réponse est 2). Par rapport à notre travail de la première partie de la thèse, nous pouvons traduire les conclusions données dans Verschaffel & al. (2006) par le fait que les « *jumps strategies* » sont proches d'une vision ordinale (« *Jump strategies in which the numbers are seen primarily as objects in the counting row and for which the operations are movement along the counting row* »), les « *splits strategies* » font intervenir quant à elles la structure décimale de la numeration, référence à dix comme repérant ou appui additif (« *Split strategies in which the numbers are seen primarily as objects with a decimal structure and in which operations are performed by splitting and processing the numbers on the basis of this structure* »), et enfin les « *varying strategies* » utilisent des propriétés arithmétiques (« *Varying strategies based on arithmetic properties in which the numbers are seen as objects that can be structured in all sorts of ways and in which operations take place by exploiting a suitable structure and using the appropriate arithmetic properties* »). Nous pouvons donc voir dans ces stratégies un prolongement des propriétés mathématiques dégagées dans l'interprétation des numérations. Nous pouvons ajouter des stratégies dans lesquelles les nombres sont perçus via leur écriture chiffrée (par exemple une addition posée résolue mentalement) et qui peuvent donc faire appel aux propriétés mathématiques qui leur sont propres. Elles sont décrites dans les nombreux travaux consistant à analyser les stratégies des élèves dans les opérations posées mettant en jeu des écritures chiffrées[161]. Signalons cependant que les chercheurs ne sont pas tous unanimes sur la place que doivent occuper les problèmes arithmétiques dans la conceptualisation du nombre. Par exemple Verschaffel & al. (2006) rapportent que Shrader & Siegler (1998) donnent un modèle dans lequel des performances arithmétiques peuvent être atteintes rapidement, ce que discutent Baroody & Tiilikainen (2003).
D'autres problèmes sont rapportés par les chercheurs, ce sont ceux qui ont trait à la position, l'ordre, le rang indiqué par un nombre – trois pour le troisième ou le numéro trois – ou encore l'écart, la distance entre deux nombres entiers, sans pour autant faire référence nécessairement à un cardinal. Treffers (2001) propose ainsi de définir deux conceptions du nombre, « *structuring and representation of number* ». La première, « *structuring* », se réfère aux maniements des relations arithmétiques entre les nombres, la deuxième, « *positioning* », à

[161] Un nombre important d'entre elles est classifié dans Verschaffel & al. (2006). Voir aussi Conne (1984) pour une classification selon les relations en jeu dans les stratégies de 12 problèmes arithmétiques de la structure additive donnés par Vergnaud & Durand en 1976.

l’habileté à placer les nombres entiers sur une droite « vide » possédant une origine et un point final[162], c'est-à-dire à évaluer leur distance. Toutes ces notions font écho aux définitions du nombre que nous avons données ainsi qu’aux interprétations des numérations, sans être issues du même axe de recherche. DeBlois (1996) indique en outre que le nombre est une façon de « *mesurer*[163]*, d’ordonner ou de transformer* », cependant beaucoup de chercheurs mettent plus en avant les aspects cardinaux des nombres (relativement à la mesure d’une collection d’objets) que des aspects ordinaux. Si, en ce qui concerne la numération chiffrée de position, cela semble cohérent avec notre étude mathématique, il n’en reste pas moins que la place de l’aspect ordinal reste une question ouverte et plus généralement la place du concept de nombre entier naturel par rapport aux numérations.
Nous retenons que les procédures observées chez les élèves dans les problèmes (arithmétiques en particulier) mettent en jeu potentiellement telle ou telle interprétation, mais qu’il n’y a pas de consensus sur l’ordre et leur fonction dans les itinéraires d’enseignement. Cependant dans le calcul mental, ce sont les deux interprétations, ordinale avec repérant et arithmétique additive, qui sont relevées.

2.2 La disponibilité des stratégies

En accord avec les recherches de Fuson & al. (1997), nous observons un certain consensus sur le fait que la pluralité des conceptions présentes chez un même élève au même moment varie suivant les connaissances des élèves, la nature des problèmes et les variables didactiques, ce qui est signalé dès 1980 par Comiti, Bessot & Pariselle (1980). Nous considérons ce résultat comme une marque de la variabilité de la disponibilité des stratégies selon ces critères. En outre, Verschaffel & al. (2006, p. 561) soulignent que les problèmes arithmétiques élémentaires (additionner trois et quatre par exemple) donnent lieu à des procédures différentes mais partagées par tous les sujets : la différence entre élèves en difficulté et les autres se faisant moins sur les types de procédures utilisées que sur la maîtrise qu’ils en ont progressivement. En ce qui concerne la disponibilité des stratégies mettant en jeu la numération parlée ou/et celle écrite, Delaplace & Weil-Barais (2008) indiquent que le recours à l’écriture chiffrée comme trace mémorielle des désignations des cardinaux n’est pas une pratique fréquente pour les élèves de primaire. Ces derniers préfèrent le plus souvent recompter le nombre des éléments d’une collection plutôt que d’utiliser une écriture chiffrée disponible. Par ailleurs, face à un même problème, il existe différentes stratégies, mettant en jeu soit la numération parlée, soit la numération écrite chiffrée, ou les deux simultanément. La maîtrise qu’en ont les élèves progressivement[164] met donc « en concurrence » l’emploi de telle ou telle numération et donc les interprétations qui sont liées.

[162] Nous traduisons l’extrait « *being able to place whole numbers on a empty number line with a fixed start and end point. […] Positioning enables students to gain a general idea of the size of numbers to be placed* », Treffers (2001).
[163] Ce qui comprend des problèmes de dénombrement, de comparaison et d’estimation. Pour ces derniers voir Verschaffel & al. (2006, p. 577).
[164] Les auteurs indiquent en effet une progression unanimement observée. Par exemple pour trois plus quatre, la stratégie initiale est l’établissement de la collection par comptage de trois puis quatre objets, puis un comptage de l’ensemble à partir de un, ensuite il s’agit de stratégies de sur-comptage (collection présente, puis mentalement), et ensuite de stratégies arithmétiques de type « trois plus trois plus un », jusqu’à la mémorisation (mise en mémoire à long terme issue de la progression précédente).

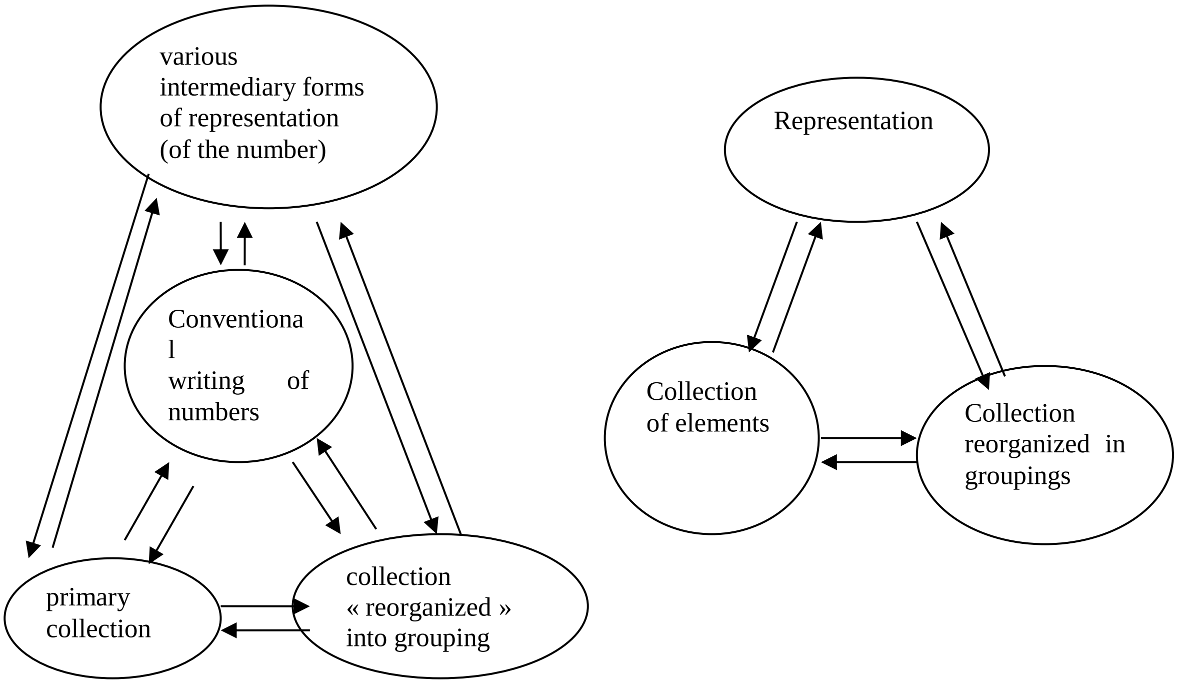
2.3 La relation entre écriture chiffrée et désignation parlée en langue maternelle

Lorsqu'il est fait référence de manière explicite à une écriture chiffrée, dans une procédure ou dans un énoncé, il semble que les chercheurs y associent, comme Fuson & al. (1997), le plus souvent sa désignation parlée. La désignation chiffrée est donc envisagée principalement dans son rapport avec la désignation parlée, et le plus souvent nous semble-t-il dans un rapport de subordination. Les triades des « *conceptual structures* » de Fuson en sont un exemple emblématique, puisque la numération parlée en langue maternelle et celle écrite chiffrée en sont deux « pôles » indissociables. Dans ce cas, nous ne pouvons pas voir l'interprétation de référence de la numération écrite chiffrée apparaître en tant que tel puisque cette dernière est associée à une interprétation de la numération parlée. C'est en ce sens que nous parlons de subordination. Cette association systématique entre les deux numérations est repérable dans les autres recherches, mais peut être traitée différemment. Par exemple DeBlois indique que la conceptualisation de la numération de position chiffrée se fait à travers la coordination de la notation de position et de la valeur de position (et ce en accord avec Fuson). Or « *la valeur positionnelle réfère à des ensembles qui peuvent être comparés, alors que la notation positionnelle réfère à une organisation spatiale des chiffres (juxtaposition des chiffres) et temporelle (récitation de la comptine des nombres*[165]*)* », DeBlois (1996). Ainsi à travers la notation positionnelle, la comptine des nombres même au-delà de dix (qui se réfère à une interprétation ordinale) est associée à la conceptualisation des écritures chiffrées. Mais, la valeur positionnelle semble elle aussi liée à la numération parlée, puisque dès le premier palier décrit par DeBlois (1996), celui de la composante intuitive du concept préliminaire[166], la valeur attribuée au chiffre est reliée à celle attribuée à travers une désignation orale : « *l'enfant attribue une idée de quantité plus ou moins grande aux mots : dizaine, centaine, mille, million* », DeBlois (1996). En outre la subordination de la numération écrite chiffrée à la numération parlée reste le plus souvent implicite, et d'autres facteurs peuvent entrer en ligne de compte. Par exemple dans le traitement des relations entre les trois « pôles » des triades de Fuson, nous remarquons que les relations entre la numération parlée et les collections d'objets qui ne font pas intervenir la désignation écrite sont systématiquement évoquées, par contre les relations entre numérations parlées et numération écrite chiffrée sont considérées soit avec ou soit sans les collections. Plus précisément, certains auteurs regardent le lien collection/numération parlée sans jamais évoquer les écritures chiffrées des nombres. C'est à dire qu'ils étudient des cheminements cognitifs utilisant des liens numération parlée/signifié(s), sans convocation de la numération écrite chiffrée. C'est le cas de Ricco, Menotti, Boyer, Larère, Numa Bocage & Allenbach (2008) dans leur analyse des compétences liées au comptage pour des élèves de CP (y compris en fin d'année alors que la numération écrite chiffrée est introduite dans son aspect positionnel). D'autres chercheurs envisagent les liens entre les désignations parlées et les désignations écrites chiffrées sans référence à des collections principalement lorsqu'ils abordent la lecture des écritures chiffrées, ce que nous interprétons comme un travail sur les liens signifiant/signifiant. Cela peut être soit dans un problème les traitant spécifiquement, par exemple « écrire avec des chiffres « douze » », soit dans un problème dans lequel ces liens peuvent intervenir dans la stratégie de résolution, par exemple la consigne donnée par écrit « calculer 12 + 9 » qui est traduite par « calculer douze plus neuf ». Cependant, dans Fuson & al. (1997) l'indication que

[165] C'est nous qui soulignons. Cette récitation va bien au-delà de dix, ce qui n'est mathématiquement pas nécessaire dans la numération écrite chiffrée selon notre analyse.

[166] DeBlois analyse la conceptualisation de la numération écrite chiffrée à l'aune d'éléments théoriques d'essence piagétienne, précisés par Bergeron et Herscovics. Cette approche est détaillée dans DeBlois (1996).

chaque triade doit être objet d'enseignement en considérant chacune des flèches doubles séparément permet d'envisager des problèmes mettant en jeu uniquement une organisation de collection et l'écriture chiffrée indépendamment de la désignation parlée. C'est ce que nous avons envisagé dans l'interprétation de la numération écrite chiffrée. Nous faisons référence au lien « direct » signifiant (écriture chiffrée) / signifié(s) dans les cheminements cognitifs, c'est-à-dire sans passer par d'autres signifiants. Cette possibilité est exploitée par exemple par Bassis (2003) puis Chevalier (2008), avec un codage de l'organisation des collections utilisant des groupements successifs de cardinaux quatre (base quatre)[167]. Notons que celle-ci n'est pas non plus exclue dans le modèle de DeBlois (1996), ni dans la recherche de Bednarz et Janvier (1982, 1988) qui schématisent leur conception de la numération comme suit :



Le premier schéma est issu de la recherche publiée en 1982, recherche qui a été suivie d'une expérimentation en classe durant 3 ans qui a donné lieu à une publication en 1988. C'est de cette dernière dont est extrait le deuxième schéma. Les flèches indiquent que la numération est conçue comme un réseau de connaissances (« *network of skills* ») entre trois états (« *states* ») : « *the primary collection itself* », « *the collection re-organized into groupings* », « *the representation of number associated with this collection, by conventional symbolic writing, or by other modes of representation* ». L'accent est mis sur le passage entre une collection non organisée à son organisation, valable pour toute numération. La place de la numération parlée n'est donc pas ici particulièrement mise en avant, ce sont les relations entre l'ensemble des « représentations » (pour nous des signifiants) qui sont discutées à travers cette schématisation, en particulier leur place par rapport à la numération écrite chiffrée[168]. A remarquer alors que cette perspective permet aux auteures de tenir compte de différentes écritures pouvant coder l'organisation d'une collection (par exemple de type 3X, 2I pour 32), qui peuvent donc constituer une autre désignation, tout comme des « *pictural disguised*

[167] C'est une possibilité qui a été utilisée dans la réforme de l'enseignement en France dans les années 70, dite des maths modernes (voir par exemple Fischer & Bocerean (2004) ou Conne (2001) pour une analyse), dans laquelle les numérations en base k étaient un moyen, si ce n'est un objet, d'apprentissage.

[168] Cette optique nous semble développée de manière plus générale dans de nombreux travaux de Duval, par exemple celui de 2006.

representation » consistant en des dessins figurant les organisations obtenues avec du matériel. Ceci nous amène à envisager d'autres signifiants que ceux envisagés dans les triades de Fuson.

2.4 Variétés des signifiants intervenant dans la numération

Mis à part nos deux systèmes de numération, nous avons déjà relevé d'autres éléments à prendre en compte dans le processus de conceptualisation.
Il s'agit tout d'abord du troisième « pôle » des triades de Fuson, l'organisation de collections. Nous avons indiqué qu'il s'agissait alors plutôt d'un cadre permettant de poser des problèmes mettant en jeu le nombre, cadre qui est privilégié du fait de la nature des notions en jeu : les mises en signes concrètes du cardinal d'une collection de la première partie de la thèse. D'ailleurs, toutes les recherches y font référence : *a minima* dans les problèmes qui ont servi dans les expérimentations et les observations et *a maxima* dans leurs conclusions sur la conceptualisation ou l'apprentissage. Bednarz et Janvier (1982, 1988) permettent de préciser son rôle potentiel. Elles mettent l'accent sur le passage d'une collection non organisée à son organisation. Certaines connaissances propres à la numération chiffrée de position sont mises en lien avec des collections à organiser :

- faire des groupes
- les défaire
- passer à un groupement supérieur, c'est-à-dire faire des groupements de groupements
- échanger un groupement d'un certain ordre en une unité de l'ordre supérieur et inversement
- coder, c'est-à-dire passer d'une collection réorganisée en groupements à une représentation du nombre
- décoder
- découvrir les lois régissant les groupements successifs.

Ces connaissances en jeu dans la numération écrite chiffrée sont symbolisées par les flèches de leurs schémas. Nous y voyons la traduction en termes de connaissances de la première partie de l'interprétant de l'interprétation de référence que nous avons définie dans la première partie de la thèse. La deuxième partie de l'interprétant n'étant pas indiquée ici.
Par ailleurs, nous avons noté dans d'autres recherches l'emploi de systèmes de désignation orale annexes qui vont se constituer en systèmes de numération : une numération en unités, « trois dizaines et quatre unités » et une numération de type asiatique consistant soit à énumérer les chiffres, « trois, quatre », soit à dire « trois dix quatre (un) ». Ce dernier cas a été développé principalement dès les années 90 par Brissiaud en France et par Fuson aux États-Unis, son achèvement le plus récent étant développé dans Fuson & Li (2009). Il est utilisé par ces chercheurs comme un quatrième « pôle » ajouté à la triade (voire un cinquième si on considère simultanément la numération « en unités ») et est perçu comme un moyen d'apprentissage pour les élèves de langues européennes, du fait d'une plus grande proximité avec la numération écrite chiffrée[169]. L'interprétation qui peut lui être théoriquement associée est en effet celle d'une numération arithmétique multiplicative, celle décrite dans la première partie de la thèse pour la numération parlée en Français. Elle est donc plus proche de l'interprétation de la numération écrite chiffrée. La justification « empirique » d'une telle

[169] C'est ce que nous avons aussi développé dans la première partie de la thèse en nuançant ce « constat ». Nous avons en effet indiqué la « proximité » entre une interprétation multiplicative et l'interprétation de référence au niveau de la première partie de l'interprétant. Cette proximité étant à relativisée dans la mesure où, dans les procédés de mise en signes concrets d'une collection, nous avons indiqué que l'organisation et le comptage n'y jouaient pas le même rôle. Ceci a été traduit en particulier par la stratégie « organiser/configurer pour désigner », introduite chapitre 4, §3.1. La deuxième partie de l'interprétant est par ailleurs sensiblement différente.

hypothèse vient d'analyses comparatives entre élèves asiatiques dont la numération parlée est (traduite en français) de type « cinq/trois » ou « cinq dix trois » pour cinquante-trois[170]. En ce qui concerne plus spécifiquement la numération « en unités », des chercheurs comme Chambris (2008) la considèrent comme un levier important pour l'apprentissage, en la reliant en outre au système métrique : c'est donc l'idée de système de mesure qui prévaut ici, avec une logique qui lui est propre[171]. Elle est par exemple toujours corrélée à un dénombrement d'une collection. De ce fait, son statut de système de numération est différent de celui des numérations orales déjà considérées, puisque les désignations ne sont employées que dans ce contexte. Nous avons déjà indiqué que théoriquement son interprétation est proche de l'interprétation multiplicative de la numération parlée.
Du fait des interprétations que l'on peut leur associer et dans la mesure où elles sont employées systématiquement dans une certaine variété de problèmes (décontextualisation, utilisation pour désigner le nombre), nous interprétons ces signifiants comme des systèmes de numération. Ils ont en commun avec la numération parlée leur spécificité orale. Ces deux types de systèmes annexes de désignations orales, « à l'asiatique » et « en unités », peuvent être considérés comme pouvant être des aides à l'apprentissage et non comme une nécessité dans la conceptualisation. Aucune étude n'a été faite, à notre connaissance, sur les liens qu'ils entretiennent avec l'ensemble des autres « signifiants ». Nous avons relevé dans les recherches consultées l'existence d'au moins trois autres types de signifiants.
Le premier concerne toutes les désignations qui peuvent coder l'organisation d'une collection (certaines sont indiquées dans la première partie de la thèse), sans être nécessairement utilisées comme des systèmes de numération et que nous nommons de manière générique comme « désignation des groupements ». Un certain nombre est envisagé par Bednarz et Janvier : par exemple de type 3X, 2I ou XXX, II pour 32 ou des « *pictural disguised representation* ». Leur « interprétation » (rappelons qu'ils ne sont pas nécessairement constitués en système sémiotique de numération) est de l'ordre d'une de celles dégagées dans la première partie de la thèse, sachant en outre qu'ils peuvent aussi servir à coder des collections non nécessairement organisées selon des principes de base (dix ou autre) ou de mesure. Un signifiant du type « trois paquets et deux » peut être rangé dans cette catégorie même lorsqu'il ne fait pas l'objet d'un travail amenant à le considérer comme un système de numération.
Le second est constitué des doigts de la main et est développé par exemple par Brissiaud (1991). Son « interprétation » peut avoir des points communs avec une numération ordinale, éventuellement avec repérant (cinq ou dix) ou arithmétique additive (suivant la façon dont il est utilisé).
Le troisième est constitué par la « droite numérique» des écritures chiffrées des nombres écrits sur une ligne de gauche à droite dans l'ordre croissant. La ligne peut ne pas comporter tous les nombres, ce qui est indiqué par des espaces libres. En se basant sur Verschaffel & al. (2006), Chambris (2008) a fait une synthèse des recherches de l'« *empty number line* », dont nous avons parlé en ce qui concerne la distinction entre les aspects « *structuring* » et « *positioning* » du nombre de Treffers (2001). Cette « *droite numérique vide » semble « davantage étudiée comme un instrument de calcul, pour éviter le recours aux algorithmes et favoriser l'invention de procédures, et plus généralement comme une représentation de l'ensemble des entiers naturels que comme un outil pour représenter une situation, une représentation linéaire de l'espace, par exemple* », Chambris (2008). En ce qui concerne le rôle dans la conceptualisation, nous pouvons lire dans Verschaffel & al. (2006) : « *Bien que plusieurs didacticiens des mathématiques travaillant dans ce domaine de l'arithmétique des nombres à plusieurs chiffres donnent à cette interprétation sur la droite une place de plus en*

[170] Voir par exemple Fischer (1990).
[171] Voir la première partie de la thèse.

plus importante dans les curricula, manuels scolaires et guides pédagogiques (expérimentaux), il n'y a apparemment pas d'étude qui établisse de façon décisive que le développement de cet aspect accroisse les connaissances conceptuelles des élèves (et ses relations aux autres aspects du développement des nombres à plusieurs chiffres) d'une façon large et systématique. »[172]. La question reste cependant posée sur le rôle que peut jouer cette droite numérique dans la conceptualisation des écritures chiffrées, sachant qu'elle peut permettre aussi de relier la désignation écrite chiffrée d'un nombre à sa désignation parlée grâce à une récitation de la comptine numérique couplée à une lecture des écritures chiffrées.
Nous nous arrêtons ici pour les « autres signifiants » envisageables, car il peut en exister de nombreux, par exemple les abaques envisagés par DeBlois (1995) ou Ma (1999), p.7 cité par Verschaffel & al. (2006), les égalités numériques de type 10+10+10+5 étudiées par Conne (1989), ou encore les bouliers étudiés par Poisard (2005). Nous voyons qu'ils peuvent être oraux, dessinés, écrits à l'aide de symboles ou encore « agis »[173].

2.5 Les connaissances préalables à l'introduction de l'écriture dans son aspect positionnel

A travers la notion de champ conceptuel, notre cadre théorique amène à considérer les numérations en relation avec le concept de nombre. A travers la notion d'historicité, ce sont les connaissances nécessaires à l'apprentissage de l'écriture chiffrée qui sont questionnées. De plus, dans l'étude des procédés concrets de mise en signes (en écriture chiffrée) du cardinal d'une collection il apparaît qu'il va s'agir non seulement de constituer des groupements de dix, mais encore d'en désigner le nombre (par un chiffre). Ces considérations théoriques font écho avec les travaux de Bednarz et Janvier qui précisent certaines connaissances en jeu dans la numération écrite chiffrée dans la liste que nous avons traduite ci-avant.
Comme nous l'avons signalé, l'ensemble des chercheurs semble unanime sur le fait que des difficultés importantes chez les élèves résultent du fait que certains aspects de la conception du nombre à un chiffre font obstacle à celle du nombre à plusieurs chiffres. Ceci est noté en particulier par Fuson et DeBlois puis repris pas Veschaffel & al. (2006) quand sont synthétisées les recherches à ce sujet : « *Illustrations of lack of conceptual understanding are elementary school children's inability to identify the tens, hundreds, etc. digit in a multidigit number, to relate ungrouped and grouped objects to the different digits in a multidigit number, and to demonstrate or explain 10-for-1 trading with concrete representations. [...]. According to Fuson (1992, p. 263), many errors children in the United States make on numeration indicate that they interpret and treat multidigit numbers "as single-digit number placed adjacent to each other, rather than using multidigit meaning for the digits in different positions"* ». Verschaffel & al. citent en outre Anghileri (1999) qui fait les mêmes remarques pour les élèves du Royaume-Uni. Ceci met en évidence des problèmes relatifs aux groupements, moins dans leur constitution (habileté de comptage) que dans leur prise en compte comme objet unitaire que l'on peut aussi dénombrer afin d'obtenir une désignation du nombre (en tant que cardinal d'une collection)[174]. Pour autant, plusieurs articles indiquent que les habiletés de comptage pour constituer une collection ne sont pas complètement acquises au moment de l'introduction de l'écriture chiffrée. Ainsi, Bideaud, Le Halle & Vilette (2004) décrivent les connaissances relatives à la notion de collection et Briand (1999) analyse plus précisément des connaissances sur l'énumération. Les auteurs indiquent que ces connaissances sont travaillées et acquises lorsque les élèves sont capables de résoudre un certain nombre de problèmes sur les collections manipulables puis non manipulables (figurées

[172] Traduction de Chambris (2008).
[173] Des bouliers, des quipus, des abaques, etc.
[174] Voir aussi, Aigoin & Debourg (2004) pour un avis de praticiens.

par exemple à l'aide de croix dessinées sur une feuille) et décrivent les variables qui jouent sur la réussite des élèves[175]. DeBlois (1996) retient par ailleurs l'idée de concepts préliminaires « *où les objets sont traités dans un contexte dominé par le temps et l'espace (il colle, il sépare, il place avant ou après ...).* » et indique que dépasser ce palier est une étape obligatoire. Pour résoudre ces problèmes, les recherches s'accordent donc sur le besoin de ces connaissances antérieures pour aborder la numération écrite chiffrée et elles sont unanimes sur la nécessité de conceptualiser le nombre à travers une certaine maîtrise de la comptine numérique des désignations parlées en langue maternelle.

La première triade de Fuson, Unitary single digit, sous-tend cependant d'aller plus loin que des habiletés de comptage uniquement dans des problèmes de dénombrement ou de comparaison de cardinaux, mais de l'élargir à une structure arithmétique plus riche, comportant des problèmes pouvant être résolus par des additions et des soustractions de nombres à un chiffre[176]. DeBlois (1996) donne quant à elle une autre perspective en indiquant à propos de l'observation des procédures d'élèves âgés de huit ans et plus « *Une reconnaissance des relations d'équivalence et de conservation des unités de mesure de quantité ont semblé précéder la nécessité d'introduire l'opération d'addition* ». Ainsi la question plus générale de la nécessité d'aborder tel ou tel problème sur le nombre avant l'introduction de l'écriture chiffrée dans son aspect positionnel reste ouverte.

Une autre question, non indépendante de la dernière, concerne le champ numérique à aborder avant l'introduction de l'écriture chiffrée dans son aspect positionnel. La comptine numérique est disponible comme compteur pour les procédés concrets de mise en écriture chiffrée du cardinal d'une collection. Selon notre analyse, ce compteur n'est nécessaire que pour constituer des groupes de cardinaux inférieurs à dix. Nous interprétons les différentes analyses des conditions d'opérationnalité de la comptine numérique (au moins jusqu'à dix et le plus souvent jusqu'à seize) faites dans de nombreuses recherches comme faisant écho à l'interprétation strictement ordinale de la numération parlée, c'est-à-dire sans repérant. L'interprétation ordinale au-delà de dix, visible par exemple dans la deuxième triade de Fuson, Unitary multidigit, n'est pas congruente avec l'interprétation que nous avons dégagée de la numération écrite chiffrée. En résumé, les travaux consultés considèrent qu'une exploration du nombre à travers la comptine numérique doit précéder l'introduction de l'écriture chiffrée dans son aspect positionnel, mais ils n'abordent cependant pas explicitement le champ numérique à aborder en lien avec la non-congruence telle que nous l'avons précisée. Nous allons étudier comment cette non-congruence initiale est pour autant prise en compte par les chercheurs dans l'introduction de l'écriture chiffrée dans son aspect positionnel.

3. Différents choix d'itinéraires pour surmonter le problème de non-congruence

Des approches différentes amènent à considérer la numération écrite chiffrée au niveau cognitif mettant en avant plusieurs signifiants :

1) numération écrite chiffrée (par exemple 53),
2) numération parlée dans la langue maternelle (cinquante-trois en français),

---

[175] Pour un résumé des travaux sur les premiers pas dans la conceptualisation du nombre, voir par exemple Numa Bocage (1997). Pour une approche des problèmes soulevés par le « pré-numérique » en primaire de la maternelle au CM2, voir Margolinas & Rivière (2008) ou Margolinas, Canivenc, Wozniak, De Redon & Rivière (2007).

[176] Kosyvas (2010) met par exemple l'accent sur l'importance des décompositions et recompositions du nombre dans sa conceptualisation. Celles-ci sont basées sur l'implication a=b+c entraîne a=(b-x)+(c-x) qui peut être travaillée dès la maternelle.

3) collections d'objets (organisées –de différentes façons–, ou non)[177],
4) numération en unités (cinq dizaines et trois unités),
5) numérations annexes orales (de type asiatique comme cinq-trois ou cinq-dix-trois),
6) désignation des groupements, orale ou écrite (par exemple, XXXXX III ou 5X, 3I ou « 3 paquets de dix » et 2 ou encore des productions graphiques diverses),
7) droite numérique (vide ou « pleine »),
8) doigts de la main,
9) Représentations diverses (dessins, schémas)
10) Autres ... (abaques, bouliers, écritures en lignes par exemple de type 10+10+10+4 associées à un comptage).

Ils peuvent donc être oraux, dessinés, écrits à l'aide de symboles, « agis[178] ». Chaque recherche met le focus sur les uns ou les autres :
- pour Delaplace & Weil-Barais (2008), des problèmes spécifiques liés à la mise en signes dans un contexte oral par rapport à un contexte écrit (aspect mémoriel en particulier),
- pour Fuson & al. (1997) la triade numération parlée-numération écrite chiffrée-organisation d'une collection, mettant entre autres l'accent sur des aspects linguistiques, avec la possibilité de l'utilisation d'une numération annexe, Fuson et Li (2009), Brissiaud (2001)
- pour Bednarz et Janvier (1982, 1988), les trois « états », collection non organisée-collection organisée-représentation du nombre (incluant des systèmes de numération écrits annexes),
- pour Chambris (2008) le jeu entre numération en unités/ numération écrite/ collection à mesurer,
- pour Treffers (2001), l'importance de la droite numérique vide pour travailler la dualité ordinal/cardinal,
- pour Brissiaud (1991), le rôle joué par les représentations des doigts de la main,
- pour Chevalier (2008) et Bassis (2003), le rôle joué par des bases annexes autres que dix,
- pour Poisard (2005), le rôle joué par des bouliers,
- pour Conne (1989), le rôle des écritures additives de type 10+10+10+5.

Beaucoup de ces chercheurs font intervenir en outre des manipulations matérielles de groupements qui peuvent être reliées à un contexte matériel précis (comme des boites de crayons), ou/et décontextualisées comme le matériel de numération « base-ten blocks », ou/et dessinées ou schématisées sur feuille. Les travaux étudiés indiquent une association nécessaire entre la numération écrite chiffrée et la numération parlée mais cette association y est envisagée de différentes manières. Cependant nous notons un constat de départ unanime sur les nombreuses confusions faites par les élèves entre numération parlée et numération écrite chiffrée. L'exemple le plus cité est la correspondance de type « cinquante-trois/ 503 » noté dans la triade Decade and Ones de Fuson. La non-congruence y est donc reconnue. La question est alors de savoir comment ce constat est pris en compte dans la façon d'introduire les éléments propres à l'interprétation de la numération écrite chiffrée. Nous allons analyser les propositions dans les recherches en termes d'itinéraires cognitifs d'enseignement.

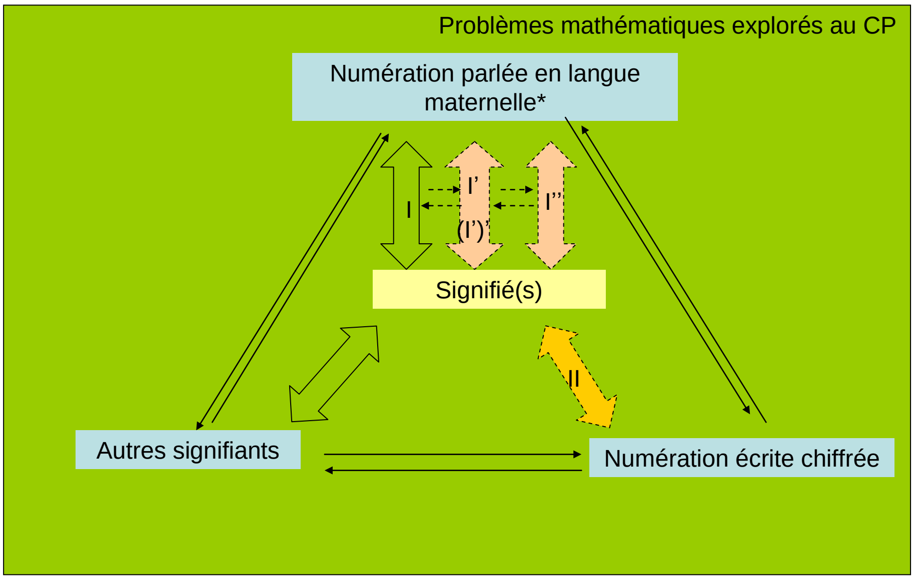
Les schémas que nous allons donner sont propres à notre cadre théorique et ne peuvent être compris sans s'y référer (chapitre 4). Ils nous servent à catégoriser les itinéraires cognitifs d'enseignement inférés des recherches. En particulier, un certain ordre est à considérer dans l'établissement des liens, cet ordre n'étant pas toujours explicite dans les recherches consultées et ces liens n'étant eux-mêmes que partiellement établis.

[177] Nous avons indiqué dans le chapitre 4 en quoi des collections peuvent être considérées ou non comme des signifiants du nombre.
[178] Des bouliers, des quipus, des abaques, etc.

3.1 Un 1er type d'itinéraire : évolution de l'interprétation de la numération parlée en langue maternelle

Dans la recherche de Fuson de 1997 sont exposées outre celle de Fuson elle-même, trois autres façons d'introduire l'écriture chiffrée mettant en jeu trois « pôles » dont il a déjà été question : numération parlée, désignation des groupements et collections (organisées). Elles ont en commun le fait de proposer des « *word problems* » que nous interprétons comme liés successivement à l'interprétation strictement ordinale (comptage de un en un) puis à l'interprétation arithmétique additive[179] (comptage de dix en dix) et enfin à l'interprétation arithmétique multiplicative (comptage des dizaines). Le schéma principal est donc le suivant :

Itinéraire cognitif 1 : évolution de l'interprétation de la numération parlée



L'évolution de l'interprétation de la numération parlée en France est repérable dans les flèches : I pour la strictement ordinale, I' pour l'ordinale avec repérants, (I')' pour l'arithmétique additive, I'' pour l'arithmétique multiplicative. L'interprétation de référence en jeu dans la double flèche II, celle de la numération écrite chiffrée, est alors élaborée grâce à l'interprétation arithmétique multiplicative de la numération parlée I'' grâce au rapport oral/écrit qu'entretienne les deux numérations. Nous avons indiqué dans la première partie de la thèse, puis dans le chapitre 4, qu'il est susceptible d'y avoir un écart entre I'' et II. Cet écart n'est cependant pas explicitement notifié dans les recherches que nous avons consultées. Nous avons mis (I')' en italique car certains chercheurs, comme Collet (2004), indiquent qu'elle n'est pas nécessaire à l'itinéraire. Les « autres signifiants » ont pour rôle d'aider à la réalisation de l'itinéraire cognitif d'enseignement. L'astérisque accolé à « numération maternelle » indique que cet itinéraire est valable pour les langues anglo-saxonnes ou latines, et de manière générale pour toutes celles qui peuvent s'analyser comme numération avec repérants ou/et appuis additifs, comme nous l'avons fait dans la première partie de la thèse pour la numération parlée en France.

Différentes possibilités sont à noter quant au moment où les écritures chiffrées vont être associées à la numération parlée en langue maternelle pour faire évoluer leur interprétation. Ainsi, chacun des programmes de la recherche de Fuson se distingue selon ce moment

[179] Là encore, il est difficile de savoir s'il ne s'agit pas plutôt d'y lire l'interprétation ordinale avec repérants.

d'introduction de l'écriture chiffrée. Le CGI (pour *Cognetively Guided Instruction*) de Carpenter, Fennema et Franke propose d'utiliser les écritures chiffrées dès l'interprétation strictement ordinale[180] (I), le PCMP (pour *Problem Centered Mathematics Project*) de Huma, Murray et Olivier propose une introduction au moment de l'interprétation arithmétique additive (I'), et enfin le CBI (pour *Conceptually Based Instruction Project*) de Hiebert et Wearne propose une introduction au moment de l'interprétation arithmétique multiplicative (I''). Ceci est lié aux différences que nous avons relevées entre ces trois itinéraires en ce qui concerne les relations avec les autres « pôles ».
Pour le CGI, les « *word problems* » sont centraux : il s'agit avant tout de donner des réponses aux problèmes numériques grâce à la numération parlée. Les écritures chiffrées sont toujours considérées dans leur fonction de traduction des mots de la numération parlée (interprétation ordinale) : il s'agit alors d'expliquer comment écrire les noms des nombres en augmentant progressivement le champ numérique exploré. Les organisations de collections et un signifiant de type « désignation des groupements » sont utilisés comme moyen de réaliser cet apprentissage, via en particulier la manipulation d'un matériel de numération de type « base-ten blocks » : c'est un moyen d'évoluer vers une interprétation de la numération parlée de type arithmétique multiplicatif.
Pour le PCMP, les écritures chiffrées sont prioritairement vues comme une traduction écrite du cardinal d'une collection obtenue par un comptage de dix en dix (dix, vingt, trente, si nous le traduisons en français), considéré comme plus efficace qu'un comptage un en un[181] . Chaque dizaine est traduite en écriture chiffrée dix=10, vingt=20, etc., ainsi que chaque unité restante. La superposition des deux, à l'aide du matériel Montessori, permet de traduire la désignation orale en la désignation écrite chiffrée : par exemple la désignation orale « cinquante-trois » est matérialisée par deux cartons Montessori sur lesquels sont inscrits (en chiffres) 50 et 3 que l'on superpose pour obtenir 53 (le 0 étant caché par le 3). Dans ce projet le matériel de numération de type « *base-ten blocks* » n'est pas utilisé et les signifiants de type « désignation des groupements » sont évités, tout au moins au début des apprentissages.
Enfin, pour le CBI, la numération parlée est reliée à des signifiants de type « désignation des groupements », « *5 groups of ten and 3 units* », via une organisation de la collection qui doit apparaître comme facilitant le comptage[182]. C'est à ce moment que la structure (chiffres et position de chiffres) de l'écriture chiffrée associée déjà introduite (ici 53) est questionnée.

3.2 Un 2ème type d'itinéraire : le recours à une numération orale annexe

Celui-ci concerne l'utilisation d'une numération annexe.
Fuson ne porte pas son attention principale sur le lien entre « *unitay multidigit* » et « *separate Tens and Ones* », c'est-à-dire ce que nous interprétons comme une évolution d'une interprétation (strictement) ordinale à une ordinale avec repérants ou/et arithmétique additive. Elle analyse en effet plus particulièrement le passage entre les deux dernières triades (voir la figure1-continued). Le fait que dans celles-ci, le troisième « pôle », concernant une numération orale ne soit plus la numération parlée en langue anglaise mais ce que nous

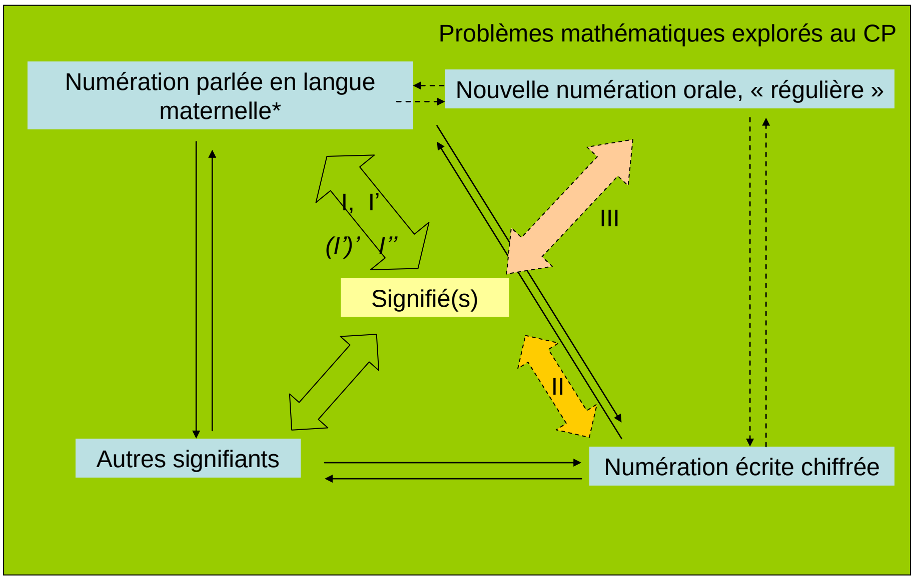
[180] Le modèle de développement en triades montre que c'est aussi le cas pour Fuson. Cependant dans des développements plus récents, elle indique en outre l'utilisation d'une numération annexe. Nous développons cet autre itinéraire ci-après.
[181] C'est pourquoi nous pouvons l'interpréter comme proche d'une conception ordinale avec repérants, mais, comme nous l'avons signalé pour toutes les recherches, des éléments plus précis nous manquent pour réellement trancher par rapport à une interprétation arithmétique additive.
[182] Le fait de ne pas employer le mot dizaine (ten), d'y associer rapidement l'écriture chiffrée et de ne pas indiquer l'aspect « mesure », nous amène à penser que les désignations de type « *5 groups of ten and 3 units* » sont interprétables comme étant du type « désignation des groupements » et non des signifiants constitués en système de numération.

interprétons comme une numération « en unités », va étayer l'idée de recourir à l'emploi d'une autre numération orale pour l'apprentissage. C'est ce qui est développé par Fuson et Li (2009), plus particulièrement en mettant l'accent sur des « ten-bases stratégies » qui permettent de s'appuyer sur dix dans des stratégies de « *word problems*[183] » arithmétiques mettant en jeu des nombres à un chiffre. Elle estime donc souhaitable une interprétation arithmétique additive de la numération écrite chiffrée (ou est-ce une numération ordinale avec repérants ?) qui doit évoluer vers une numération arithmétique multiplicative en établissant des liens entre une numération parlée usuelle et une numération en unités (« *multiunits* »). Ainsi cinq « pôles » sont en jeu jouant des rôles différents et introduits à des moments différents et elle propose un modèle successif de liens entre ceux-ci.
DeBlois (1995) quant à elle observe chez un élève scolarisé âgé de huit ans et sept mois des difficultés relatives à la conception de groupement comme objet unitaire (donc « comptable ») ainsi qu'à la conception d'une autre désignation que la désignation orale comme pouvant désigner le cardinal d'une collection (une désignation écrite chiffrée ou une désignation « en unités »). Après une étude de la conceptualisation de la numération de position à partir d'élèves de huit à onze ans, DeBlois (1996) met alors en exergue l'importance d'une numération en unités. Nous avons déjà indiqué que Chambris (2008) relève aussi l'importance du lien « numération en unités » et écriture chiffrée, liées à des manipulations.
Ces recherches permettent d'envisager un autre processus concernant l'apprentissage de la numération chiffrée de position pour les élèves dont la langue maternelle utilise une numération comme celle parlée en France, c'est-à-dire dont les representamens ne permettent pas aisément une interprétation multiplicative. Au lieu de faire évoluer l'interprétation de la numération chiffrée via l'interprétation de la numération parlée en langue maternelle (connaissance ancienne), il va s'agir d'utiliser une numération orale annexe dont l'interprétation va être plus proche de celle de la numération écrite visée (c'est-à-dire de référence). Dans les recherches consultées, nous avons repéré deux numérations orales qui peuvent jouer ce rôle. Elles permettent toutes les deux facilement une interprétation arithmétique multiplicative (au moins pour le chercheur). La première est une numération en unités fondées sur des groupements de dix qui constituent au fur et à mesure les unités de mesure. Les désignations sont de type « trois centaines, sept dizaines, neuf unités ». De par son emploi et un certain degré de décontextualisation elle peut se constituer en système sémiotique pour être ainsi considérée comme une numération annexe. La deuxième est une numération dont la forme est calquée sur certaines numérations asiatiques, comme la chinoise, et qui consiste à prononcer les appuis et les appuyants multiplicatifs, « trois cents sept dix neuf »[184]. Les deux sont formellement proches, et leur proximité est soulignée par Fuson & Li (2009) quand elles comparent l'usage de la première par rapport à la seconde dans leur proposition pour l'enseignement : « *When explaining their method, children used the quantity words that named the multiunits (three hundreds seven tens nine ones) that where like Chinese number words (except for the plurals and the word ones at the end), and they also became able to use English number words.* ». Cependant, la première est issue de la mesure des grandeurs, elle est donc utilisée en particulier pour indiquer des grandeurs dans des activités de mesurage de quantité discrètes, ce qui favorise une interprétation arithmétique additive et multiplicative, l'aspect cardinal est prédominant. Pour la deuxième, elle est susceptible d'être employée dans une plus grande variété de problèmes, comme c'est le cas de

[183] Les *word problems* sont ceux qui mettent en jeu les désignations parlées usuelles des nombres. Il peut s'agir de *word problems* arithmétiques. Verschaffel & al. (2006) en donne un exemple : « *Pete has 9 apples. He has 3 apples more than Connie. How many apples does Connie have ?* ». Ces derniers sont répertoriés par plusieurs chercheurs en 14 catégories, voir par exemple Vergnaud (1981, 1991).
[184] Voire « trois sept neuf ».

la numération parlée en langue maternelle, en particulier tous les problèmes mettant en jeu le nombre, y compris ceux faisant intervenir un aspect ordinal[185].
Nous qualifions cette numération relais de « régulière ».
Nous obtenons le schéma suivant :

Itinéraire 2 : utilisation d'une numération orale annexe



Les « autres signifiants » ont pour rôle d'aider à la réalisation de l'itinéraire cognitif d'enseignement. L'interprétation de la numération parlée en langue maternelle est repérable dans les flèches avec les mêmes codes que précédemment. Le fait de mettre aussi I'' en italique et de ne pas lui attribuer une double flèche spécifique, comme dans le schéma du premier itinéraire cognitif, indique que l'évolution vers cette interprétation n'est pas une obligation dans l'itinéraire, contrairement au précédent. Nous n'avons relevé dans les recherches consultées que des numérations orales ayant une interprétation arithmétique multiplicative, ce qui n'est pas surprenant si on considère sa proximité avec l'interprétation de référence que nous avons signalée dans la première partie de la thèse. Nous préférons indiquer cette interprétation arithmétique multiplicative par III, un autre signe que I'', car elle susceptible d'avoir des différences avec celle de la numération parlée en langue maternelle. Cette nouvelle numération est mise en relation avec les deux autres numérations. Le lien avec la numération écrite chiffrée contribue à interpréter cette dernière via son interprétation de référence (II). Le lien avec la numération parlée maternelle peut contribuer à interpréter cette dernière via une interprétation arithmétique multiplicative I''. Le fait de mettre ici I'' en italique et de ne pas lui attribuer une double flèche spécifique, comme dans le schéma du premier itinéraire cognitif, indique que l'évolution vers cette interprétation n'est pas *a priori* une obligation dans l'itinéraire, contrairement au précédent. Cependant, lorsqu'une telle interprétation est en jeu dans la numération parlée en langue maternelle, le lien ancien écrit/oral entretenu entre cette dernière et la numération écrite chiffrée peut constituer une aide. En ce sens l'interprétation I'' peut participer à l'itinéraire cognitif. Néanmoins, les recherches consultées ne permettent pas de préciser l'ordre dans lequel ces différents liens sont établis. Nous notons cependant que l'écriture chiffrée peut être reliée à l'une ou l'autre numération orale à différents moments.

[185] Ainsi, une comptine numérique peut être récitée, favorisant son emploi dans une interprétation ordinale.

Ainsi, Fuson envisage une association entre la numération écrite chiffrée et parlée en langue maternelle dès le début de l'itinéraire. Son modèle comprend une évolution de l'interprétation de la numération parlée en langue maternelle de l'ordinal vers une interprétation arithmétique additive, ce qui a pour résultat de faire évoluer conjointement celui de la numération écrite chiffrée : c'est seulement ensuite qu'est utilisée la numération orale annexe. Collet (2004) revient sur ce choix à partir d'une étude sur 120 élèves de Belgique de 1ère et deuxième année d'école élémentaire (6-8 ans) : la maîtrise complète de la triade « *Decades and Ones* » ne semble pas nécessaire pour atteindre les deux dernières. Autrement dit, il ne lui semble pas nécessaire d'utiliser une interprétation additive de la numération écrite chiffrée, et donc son association avec une numération orale annexe peut se faire plus tôt que dans l'itinéraire proposé par Fuson : cette fois-ci l'évolution de I vers I' n'est pas utilisée pour déclencher l'évolution de l'interprétation de la numération écrite chiffrée.
Soulignons, que des chercheurs comme DeBlois et Chambris indiquent l'utilisation d'une numération orale annexe en unités comme une aide à l'apprentissage des élèves. Leurs travaux concernent essentiellement des élèves de plus de sept ans qui ont donc théoriquement (c'est-à-dire d'après les programmes scolaires) déjà fait évoluer leur interprétation de la numération écrite chiffrée vers une interprétation de référence. Elles ne se prononcent donc pas sur une utilisation précoce d'une numération en unités dans les apprentissages , comme nous l'avons indiquée dans ce deuxième itinéraire.

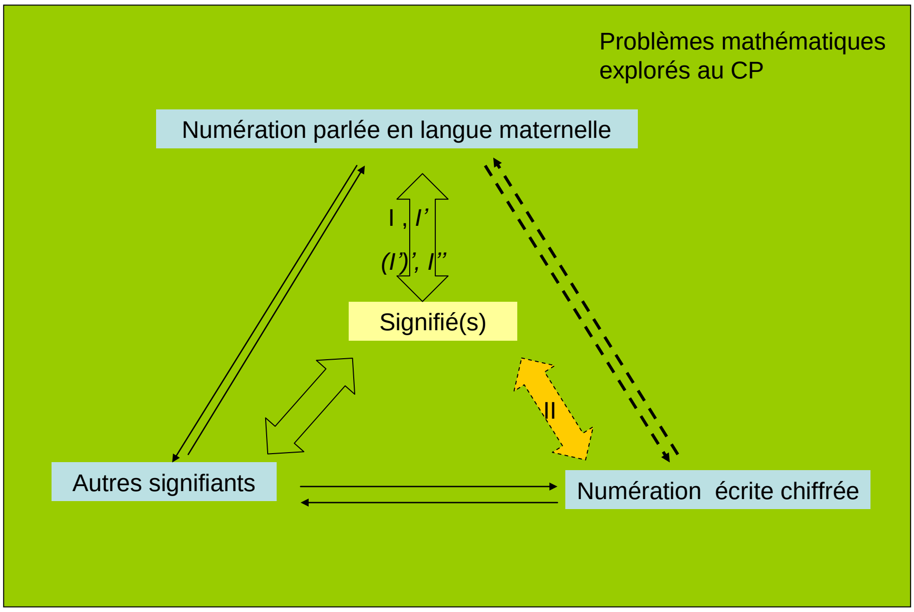
3.3 Un 3ème type d'itinéraire : un lien différé avec la numération parlée en langue maternelle

Les possibilités indiquées précédemment sont-elles les seules ? Doit-on partir de « *word problems* » ou/et d'un comptage d'une collection pour introduire l'écriture chiffrée ? Certaines recherches permettent de penser que ce n'est pas obligatoire. Ainsi, si l'utilisation de la comptine numérique semble considérée comme nécessaire pour la conceptualisation du nombre, dès 1980, Comiti, Bessot & Pariselle signalent qu'elle n'est cependant pas toujours un outil maîtrisé par les élèves même en fin de CE1 (enfants de 7-8 ans), mais surtout pas toujours nécessaire. Par exemple des stratégies mettant en œuvre des bijections entre objets de deux collections peuvent être utilisées pour résoudre des problèmes (ce qui se réfère à la définition du nombre privilégiant les classes d'équivalence), sans passer par la comptine numérique mais en convoquant des connaissances relatives à l'énumération, Briand (1999). Par ailleurs, Verschaffel & al. (p. 562, 2006) rapportent que des équipes de chercheurs japonais montrent l'efficacité des stratégies d'addition de sommes de petits nombres se basant (culturellement) sur des groupes de cinq, à l'aide en particulier d'abaques, et donc pas sur la numération parlée. Des problèmes relatifs aux nombres peuvent donc être résolus sans avoir nécessairement recours à la numération parlée. En ce qui concerne l'introduction de l'interprétation de l'écriture chiffrée, nous avons déjà signalé que Bednarz et Janvier (1982, 1988) mettent l'accent sur le lien entre l'organisation de la collection et l'écriture chiffrée pour construire les connaissances qu'elles ont listées (voir ci-avant), sans faire référence explicitement à un comptage. Les habiletés de comptage sont néanmoins sous-entendues, tout au moins jusqu'à dix. Nous voyons dans ces recherches des possibilités (théoriques) de travailler précocement le lien signifiant (écriture chiffrée) / signifié(s) mettant en jeu l'interprétation (toujours celle de référence) de l'écriture chiffrée[186]. Ainsi les itinéraires cognitifs que nous avons déjà décrits ne sont pas les seuls envisageables. Nous avons indiqué que dans des publications récentes Bassis (2003) et Chevalier (2008) exploitent cette

[186] Il s'agit de coder une organisation et non pas une organisation issue d'un comptage. Cf. les définitions données dans le chapitre 4, en particulier « organiser/configurer pour désigner ».

possibilité de ne pas utiliser la numération parlée usuelle en France au moment de cette introduction.

Itinéraire 3 : un lien différé avec la numération parlé



Les « autres signifiants » ont pour rôle d'aider à la réalisation de l'itinéraire cognitif d'enseignement. L'interprétation de la numération parlée en France est repérable dans la double flèche : I pour strictement ordinale, I' pour ordinale avec repérant, (I')' pour arithmétique additive, I'' pour arithmétique multiplicative. Le fait de mettre I, I', (I')' et I'' au même niveau, indique que l'évolution éventuelle de l'interprétation de la numération parlée en langue maternelle n'est pas prise en compte dans l'itinéraire (tout au moins au début), contrairement au précédent. La spécificité de cet itinéraire est en effet que l'interprétation en jeu dans la flèche II, celle de référence de la numération écrite chiffrée, est introduite initialement sans ces dernières. I', (I')' et I'' sont mis en italique pour montrer qu'ils ne sont pas nécessaires au début de l'itinéraire : seul un comptage un en un est utilisé pour élaborer des groupements de dix. Le lien « direct » entre les deux numérations est mis en pointillé pour indiquer qu'il est différé et que d'une certaine manière un lien nouveau est construit, puisque il est possible de voir l'écriture chiffrée autrement que comme la version écrite des désignations orales. La numération parlée pourrait jouer un rôle similaire aux autres signifiants. Cependant les liens faits antérieurement entre les écritures chiffrées et la numération parlée en langue maternelle en tant que numération ordinale (avec repérant ou non) dans un champ numérique au-delà de dix, ne permettent d'envisager la numération parlée comme un relais, comme ce peut être le cas pour d'autres signifiants. En effet, les signifiants « relais » ne doivent pas être interprétés *a priori* de manière ordinale.

4. Conclusions sur les recherches consultées

4.1 Synthèse

Les propriétés mathématiques dégagées dans notre analyse du premier chapitre apparaissent de manière différente dans les recherches consultées selon les méthodologies et éléments théoriques utilisés. Par exemple certaines sont traduites sous forme de savoir-faire : faire des groupes, les défaire, passer à un groupement supérieur, échanger un groupement d'un certain ordre en une unité de l'ordre supérieur et inversement, coder, décoder, découvrir les lois régissant les groupements successifs, cf. Bednarz et Janvier (1982, 1988). D'autres sont lisibles à travers des relations entre des « pôles », comme les triades reliant les deux numérations et une organisation de la collection de Fuson & al. (1997). En conséquence, il nous est difficile de distinguer l'interprétation ordinale avec repérant de l'interprétation arithmétique additive, par exemple dans les triades « Décade and Ones » et « Sequence Tens and Ones », voire « Unitary Multidigit » de Fuson & al. (1997). Pour surmonter cette difficulté, nous aurions pu considérer les problèmes en jeu. Par exemple, des problèmes de calcul mental liés à des problèmes de la structure additive[187] permettent d'inférer que les auteurs considèrent une interprétation arithmétique additive. Mais, dans les projets d'enseignement consultés, le détail de ces problèmes et de leur programmation n'est pas assez précis pour que nous puissions conclure sur les interprétations considérées. Cependant, nous pouvons relativement facilement distinguer l'interprétation (arithmétique ?) multiplicative. Cette différence de traitement constitue un résultat. Nous émettons l'hypothèse que dans les recherches consultées les auteurs ne distinguent pas – tout au moins clairement – dans les aspects de la numération parlée une interprétation arithmétique additive d'une interprétation ordinale avec repérant.

Nous avons distingué des itinéraires cognitifs d'enseignement selon le rôle joué par la numération parlée dans l'introduction de l'interprétation de la numération écrite chiffrée. En conséquence, les « autres signifiants » jouent un rôle différent selon leur fonction dans les itinéraires, tandis que d'autres éléments, comme l'organisation des collections, constituent un terrain privilégié pour poser des problèmes. En outre suivant l'interprétation qui lui est propre, chacun de ces « autres signifiants » permet (potentiellement) de travailler plus tel ou tel aspect de l'interprétation de la numération écrite chiffrée. Nous avons ainsi dégagé trois itinéraires.

1er itinéraire :

Le nombre reste étroitement lié à la numération parlée en langue maternelle et le rôle de l'écriture chiffrée reste avant tout celui d'indiquer par écrit les noms des nombres de cette numération. Les « autres signifiants » aident à accompagner l'évolution simultanée des interprétations des deux numérations : d'une numération ordinale vers une arithmétique multiplicative, en passant par une arithmétique additive ou/et ordinale avec repérant.

2ème itinéraire :

Un nouveau système de numération est utilisé, qui n'est plus seulement un « simple » signifiant, et va être objet d'enseignement[188]. Il va servir de relais entre les deux systèmes de numération (celui parlé en langue maternelle et celui chiffré). Les « autres signifiants » vont aider à construire l'interprétation de ce nouveau système, puis ensuite à faire les liens avec d'une part la numération écrite chiffrée (sans numération parlée maternelle) et d'autre part la numération parlée maternelle.

Deux choix différents ont été repérés : une numération parlée « régulière » « à l'asiatique » et un système de numération en unités. Dans les deux cas ils se rapportent à une numération orale dont l'interprétation en tant que numération (arithmétique ?) multiplicative joue le rôle d'un intermédiaire entre celle de la numération parlée (ordinale avec repérant ou/et arithmétique additive) et celle de la numération écrite chiffrée.

[187] Vergnaud (1991).

[188] Cela peut être temporaire par exemple dans le cas d'une numération parlée à l'asiatique, mais il se peut aussi que son étude se prolonge, par exemple dans le cas d'une numération en unités.

3ème itinéraire :

Le travail initial consiste à établir l'interprétation de l'écriture chiffrée sans recours à d'autres systèmes de numération. Les « autres signifiants » aident à la réalisation de ce processus. La numération parlée en langue naturelle est ensuite reliée à l'écriture chiffrée.

Selon les itinéraires, le problème de conserver et d'utiliser les acquis sur la conceptualisation du nombre en relation avec la numération parlée, issus de la maternelle et/ou travaillés au début du CP, est abordé différemment.

Dans le premier itinéraire, le problème est résolu de fait car les deux numérations gardent leur relation initiale de version orale/écrite des « mêmes » signes et c'est leur interprétation commune qui évolue simultanément. Dans le 2ème itinéraire, ce sont les aspects oraux et systémiques de la nouvelle numération qui constituent un moyen de garder les acquis sur la conceptualisation du nombre et de faire le lien avec la numération orale. En effet, le caractère oral permet de favoriser l'établissement de la numération annexe en tant que signifiant du nombre en l'utilisant dans les mêmes problèmes que la numération parlée en langue maternelle et dans des fonctions propres à l'oral. En outre l'écriture chiffrée garde par rapport à ces deux numérations le même statut de traduction écrite des signifiants oraux. Ainsi les connaissances relatives au nombre sont aussi (potentiellement) mobilisables via le nouveau système de signifiant. Dans le 3ème itinéraire, les acquis sur la conceptualisation du nombre peuvent se faire d'une part en se restreignant à un champ numérique inférieur à dix quand la numération parlée en langue maternelle est convoquée, et d'autre part grâce à des problèmes (re)connus par les élèves comme des problèmes numériques quand la numération parlée en langue maternelle n'est pas convoquée (par exemple des comparaisons de cardinaux de collections par bijection). Les liens ultérieurs entre les deux numérations permettent de transposer sur la numération écrite chiffrée les connaissances sur le nombre acquises via la numération parlée en langue maternelle. Réciproquement, il est alors possible de faire évoluer l'interprétation de la numération parlée vers une numération arithmétique multiplicative grâce à ce lien.

Dans ces trois itinéraires, différents aspects de l'interprétation de la numération écrite chiffrée sont en jeu dès son introduction, d'autres sont travaillés ultérieurement. Les différents itinéraires permettent ainsi de multiples options sur le processus de conceptualisation, en y favorisant initialement certains aspects de l'interprétation et/ou en y abordant d'autres à différents moments (notamment via le recours à d'autres signifiants).

4.2 Questions soulevées

De manière globale, les différents itinéraires font jouer un rôle différent aux différentes interprétations de la numération parlée. Toutes les recherches ne peuvent être analysées comme relevant du même type d'itinéraire et certaines posent même la question de la place à accorder à l'interprétation arithmétique additive de la numération parlée, celle-ci ne semblant pas nécessaire aux élèves pour construire certains aspects de l'interprétation de la numération écrite chiffrée, (Collet, 2004). En outre, les recherches consultées n'apportent pas de réponses explicites sur l'influence des itinéraires sur la disponibilité des connaissances selon les problèmes, par exemple en ce qui concerne les problèmes de calcul mental par rapport à des problèmes de calcul posé. Ainsi, Fuson note que la *« concatenated single digit conception »* est qualifiée de *« constantly seductive digits conception »*, de sorte que l'interprétation ordinale reste encore engagée dans des additions posées avec des écritures chiffrées. Réciproquement, certains élèves envisagent des calculs mentaux uniquement en visualisant mentalement une addition posée avec les écritures chiffrées. Par ailleurs Delaplace & Weil-Barais (2008) notent que le recours à l'écriture chiffrée comme mémoire reste encore

relativement peu répandu chez les élèves de primaire, ceux-ci préférant recompter plutôt que de noter leur résultat. La question de l'influence des itinéraires proposés sur la disponibilité des connaissances des élèves reste donc ouverte, mais beaucoup d'autres paramètres sont susceptibles d'intervenir en classe, ce qui complique cette évaluation.
Le manque de précision sur l'utilisation exacte des « autres signifiants » (un, plusieurs, quels aspects développent-ils exactement, quand ?) et sur la simultanéité ou non de l'emploi des numérations (par exemple dans chacune des triades de Fuson, quel est l'ordre des liens indiqués par les doubles flèches ?) pose le problème des éléments des interprétations à introduire au fur et à mesure. En effet, si tous les aspects de l'interprétation de la numération écrite chiffrée semblent ne pas pouvoir intervenir en même temps dans le processus d'apprentissage, quels sont ceux à privilégier pendant son introduction puis *a posteriori* ?
L'introduction de l'écriture chiffrée dans son aspect positionnel pose en outre des questions sur les connaissances antérieures nécessaires. S'il est reconnu que certaines compétences sur les habiletés de comptage sont nécessaires, les recherches donnent des réponses plus contrastées sur l'étendue des connaissances sur le nombre dont l'apprenant a besoin : quel niveau de conceptualisation ? Quelle est la place de l' « ordinal », du « cardinal », des problèmes arithmétiques, du calcul mental ? Quel champ numérique aborder, à quel moment ?
La question est en effet difficile du fait qu'il a été démontré que ces connaissances s'acquièrent sur un long terme et y compris grâce aux écritures chiffrées. Les élèves ont acquis des connaissances sur les nombres prioritairement via la numération parlée dans leur langue maternelle. Se pose alors le problème de définir et d'organiser les liens entre les différents signifiants dégagés : avec quels (variété de) problèmes ? Quelles étapes ? Quelle mise en œuvre en classe ?
Nous avons ici apporté des éléments de réponse au niveau des itinéraires cognitifs d'enseignement proposés dans les recherches. Mais quel que soit l'itinéraire, il existe des marges de manœuvre. Nous en avons déjà vu des exemples dans la recherche de Fuson pour le premier itinéraire. D'une manière plus précise nous nous posons des questions sur les progressions possibles en classe, et en particulier sur la façon dont sont articulées les différentes interprétations dans un itinéraire. Il nous semble que tout n'est pas envisageable en classe.
Nous allons apporter un éclairage sur ce problème en nous tournant vers les manuels scolaires qui vont nous permettre de considérer les itinéraires avec plus de précision. Ici nous ne cherchons pas à évaluer les itinéraires proposés, mais à obtenir des informations sur leur diversité, et donc à identifier certains facteurs de faisabilité des itinéraires. Ces informations nous sont utiles pour le projet de la thèse consistant à comprendre les déroulements en classes « ordinaires », en particulier susceptibles d'utiliser un manuel scolaire. D'une certaine manière la question est de comprendre comment une certaine marge de manœuvre indiquée par l'analyse des recherches en termes d'itinéraire cognitif d'enseignement est investie dans les manuels.

CHAPITRE VI
Des itinéraires proposés dans les manuels

1. Présentation de l'étude

1.1 Place dans la thèse et apports théoriques complémentaires

a. Les questions

En précisant les itinéraires cognitifs d'enseignement dégagés dans l'étude des recherches antérieures, l'analyse des manuels scolaires a pour but d'indiquer une certaine variété des possibilités à l'intérieur de chaque itinéraire. Ces possibilités sont théoriquement nombreuses, selon en particulier la place accordée à certaines connaissances (consolidation de la conceptualisation du nombre, abord plus ou moins précoce de problèmes arithmétiques à l'aide de la numération parlée ou/et écrite etc.). Cependant les auteurs des manuels sont aussi contraints par des paramètres institutionnels (programmes, horaires, etc.) et influencés par leurs conceptions sur l'apprentissage et le cas échéant leur expérience professionnelle dans l'enseignement. De ce fait, cette étude peut nous permettre de délimiter aussi un premier champ des possibles et contraintes pour la classe. Notons cependant que son but n'est pas de mettre à jour les conceptions sous-jacentes des auteurs.

Les questions que nous nous posons sont relatives à l'articulation précise des différentes interprétations dans un itinéraire cognitif.

Y a-t-il des différences selon le champ numérique ?

Comment la relation initiale écrit/orale entre les deux numérations est-elle utilisée? Comment évolue-t-elle ?

Quelles sont les spécificités propres à l'écriture chiffrée, en référence à l'interprétation de référence, qui sont finalement en jeu ?

b. Compléments théoriques

Il nous faut saisir au niveau des propositions des manuels les aspects des systèmes de numération qui apparaissent au fur et à mesure de l'année, afin d'en inférer les interprétations en jeu. Il ne s'agit pas ici d'étudier les cheminements cognitifs « réels » des élèves, qui de surcroît ne peuvent être appréhendés de manière précise et complète sans une étude des déroulements en classe. Le lien entre les propositions des manuels et la classe doit être cependant précisé. Les notions de tâches et activités issues de la psychologie du travail permettent de le faire. Dans la 3ème partie de la thèse, la méthodologie d'analyse des déroulements en classe est issue de la double approche de Robert & Rogalski (2002). Elle croise psychologie ergonomique et didactique. Pour des raisons de cohérence nous allons retenir ici des éléments théoriques de la psychologie du travail qui sont aussi utilisés dans la double approche. Nous nous référons ainsi principalement à Rogalski (2003) et Leplat (2006).

Leplat (2006) définit tâche et activité dans un triplet sujet-tâche-activité : « *On peut lire le triplet de la manière suivante. L'activité dépend du sujet et de la tâche, celle-ci étant définie comme un objectif à atteindre dans des conditions déterminées (techniques, organisationnelles, sociales, etc.). La tâche répond à la question : qu'est-ce qui est à faire ?, l'activité à la question : qu'est-ce qui est fait effectivement ? Analyser l'activité, c'est analyser ce triplet qui forme un système, chaque terme étant en double relation (dans les deux sens) avec chaque autre. Ainsi l'activité dépend de la tâche (prescrite), mais elle peut aussi la modifier (pour en faire la tâche redéfinie). L'activité dépend du sujet, mais elle peut aussi le modifier au sens où elle peut changer, par exemple, les compétences nécessaires à son exécution. Enfin le sujet et la tâche constituent un couplage dans lequel ces termes se codéterminent. La tâche fait appel à certaines caractéristiques du sujet qui changent quand l'activité évolue* ». Nous retenons ces définitions. Pour nous il s'agira de prendre en compte le lien entre les déroulements en classe (lieu de l'activité des élèves et de l'enseignant) et la tâche prescrite. Dans son article de 2003, Rogalski précise qu'une telle définition de la tâche

« *ne préjuge ni du niveau auquel la tâche est décrite, ni de l'espace de liberté du sujet* ». La tâche prescrite est un niveau de tâche qui consiste en « *les buts et les conditions explicités dans les textes prescriptifs* ». Cependant le sujet, pour nous l'enseignant, peut redéfinir la tâche : « *La tâche redéfinie est celle que le sujet -pour nous ici : l'enseignant- se représente comme étant la sienne. [...] La tâche redéfinie est celle que l'on peut faire expliciter à l'enseignant au cours d'entretiens [..] sa caractéristique est d'être explicable, tout comme la tâche prescrite est explicitée* », Rogalski (2003). Les enseignants interprètent donc nécessairement la tâche prescrite et c'est ce que nous aurons à considérer au moment de l'étude en classe, bien que cela ne va pas constituer notre sujet d'étude. En outre, du côté de celui qui effectue la tâche, l'enseignant, la tâche effective, celle qui a effectivement engendré l'activité, peut être encore différente de la tâche redéfinie : « *La tâche effective ne peut que s'inférer de l'activité de l'enseignant.* » et à partir d'une analyse réflexive de l'enseignant, « *La tâche effective se révèle souvent dans la différence avec la tâche redéfinie par l'exclamation (de frustration) « mais c'est pas ça que je voulais faire ...* » », Rogalski (2003).
Nous retenons alors qu'il existe un lien entre la tâche prescrite par un manuel et les déroulements en classe, ceci justifie l'étude des manuels par rapport au projet de la thèse.

1.2 Précisions méthodologiques et choix des manuels

Pour étudier la tâche prescrite par les manuels, il nous faut considérer les différentes informations disponibles. Cependant entre la tâche prescrite « *explicitée dans les textes* » et celle attendue (par les auteurs) existe un écart, la tâche attendue étant « *l'esprit de la tâche* » alors que la tâche prescrite en est la lettre, Rogalski (2003). Ce sont les intentions des auteurs que nous voulons interpréter en termes d'itinéraire cognitif d'enseignement et non pas ce qu'elles deviennent au niveau de l'enseignant (tâche redéfinie ou effective). C'est donc au niveau de la tâche attendue (par les auteurs des manuels) que se situe notre travail. Ainsi, nous allons tenir compte de la différence entre la tâche prescrite et la tâche attendue lorsque les textes ne sont pas suffisamment clairs pour permettre de reconstituer un itinéraire cognitif d'enseignement. Cette différence met en relief le fait que parfois une certaine subjectivité (que nous voulons éclairer par des choix explicites) est nécessaire pour organiser et prendre les indicateurs nécessaires. Ce sont donc dans les données explicites des manuels que nous devons chercher des informations pour en déduire la tâche attendue (l'esprit de la tâche prescrite) afin de l'interpréter en termes d'itinéraire cognitif d'enseignement. Cependant pour l'enseignant, il y a deux prescriptions envisageables : les manuels scolaires et les programmes officiels. Pour être reconnus par l'éducation nationale en France, les manuels doivent suivre les instructions officiels, mais il existe des marges de manœuvres, exploitées de différentes manières par les manuels. Pour distinguer alors les prescriptions venant des programmes et celles des manuels, nous allons utiliser le terme d'itinéraire cognitif proposé (par un manuel). Cependant, pour des raisons de lisibilité, dans le processus d'analyse conduisant à l'établir, nous employons fréquemment les termes de « tâche ou travail prescrit » ou de « prescriptions ». Ces termes renvoient en effet plus facilement au fait d'identifier le manuel comme source des prescriptions (dans lesquelles nous inférons la tâche attendue), ce que font moins par exemple les termes « propositions », « tâche proposée », « attente » ou « tâche attendue ». Dans la méthodologie adoptée, nous allons expliciter le travail qui nous permet de reconstituer les attentes à travers les prescriptions, en précisant en particulier les indicateurs retenus.

a. les indicateurs

Il s'agit de recueillir les informations nous permettant de déterminer les connaissances qui sont potentiellement rendues disponibles aux élèves dans la résolution des problèmes. En référence à la définition d'itinéraire cognitif d'enseignement, à notre analyse de la non-congruence et à la définition de la tâche attendue, nous devons repérer au fur et à mesure de l'avancée dans l'année, le champ numérique considéré, les propriétés de chaque numération travaillées, l'articulation entre les deux numérations et la place des autres signifiants utilisés. Nous notons, en particulier lors de leur introduction, les propriétés qui concernent les deux systèmes et celles qui n'en concernent qu'un seul des deux. Nous devons repérer une évolution globale ponctuée par des moments clés afin d'en inférer des étapes dans l'itinéraire cognitif d'enseignement proposé. Nous considérons avant tout les prescriptions explicites en direction des enseignants qui sont écrites dans les différents textes dont ils disposent : les objectifs annoncés, la démarche générale préconisée, les productions et stratégies attendues chez les élèves. Le grain d'analyse n'est donc pas très fin. Ainsi, les énoncés des exercices ne sont considérés que dans la mesure où les prescriptions explicites ne nous fournissent pas des indicateurs suffisants pour notre analyse. Nous irons alors y chercher les informations qui nous manquent, par exemple en ce qui concerne le champ numérique abordé au fur et à mesure de l'année.

b. Les temps de l'étude

Notre analyse se déroule en trois temps : recueil des informations (indicateurs), analyse en termes de cheminements cognitifs « favorisés » chez les élèves puis en termes d'étapes dans l'itinéraire cognitif d'enseignement proposé.

Pour le premier temps, ce sont dans les écrits explicites des auteurs des manuels sur les prescriptions afférentes à l'enseignement et à l'apprentissage de la numération écrite chiffrée que nous devons chercher nos informations. Les écrits relevés sont de deux ordres : des remarques générales explicites sur la numération et des indications sur le déroulement des séances. La tâche attendue est repérable dans les écrits donnant des orientations générales explicites tels que « *Ces trois unités de travail sont centrées sur la mise en évidence des régularités de la suite écrite des nombres* » [189]. Elle est aussi à chercher dans des indications sur ce qui est à mettre en avant dans une séance *« L'écriture d'un nombre comme 36 peut être directement interprétée comme exprimant le nombre d'objets d'une collection qui peut être organisée en 3 groupements de 10 objets et 6 objets isolés* »[190], sur celles concernant des stratégies envisageables « *comptage de un en un ou comptage de dix en dix puis de un en un en utilisant les groupes de dix* »[191] ou encore sur le champ numérique abordé.

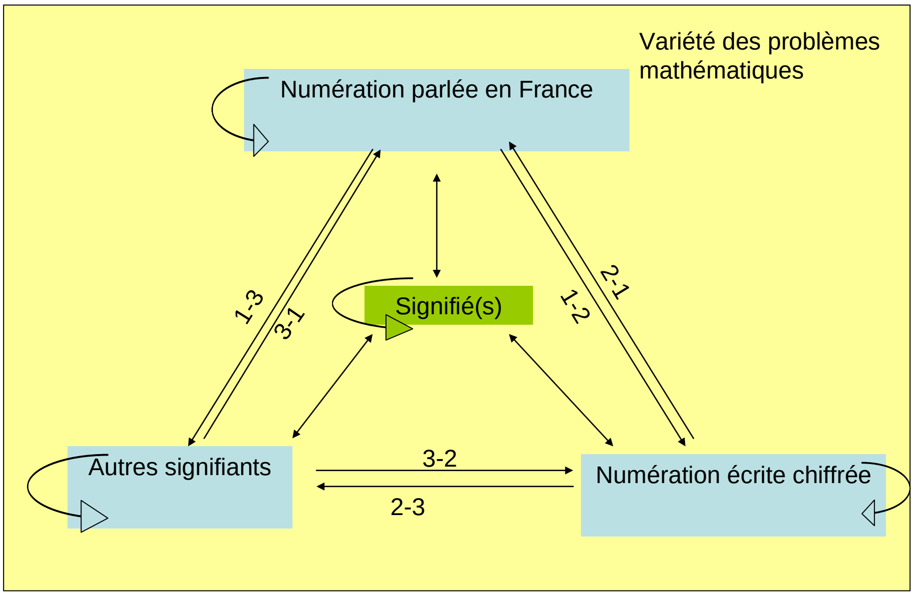
C'est ainsi que nous dégageons dans un deuxième temps des informations qui permettent d'être analysées en termes de cheminements cognitifs favorisés chez les élèves afin d'en inférer dans un troisième temps les étapes de l'itinéraire cognitif d'enseignement proposé par le manuel. Précisons ce que nous entendons par cheminements cognitifs favorisés. Dans le chapitre 4 nous avons défini les cheminements cognitifs et les avons schématisés ainsi :

[189] Cet exemple et les suivants sont extraits du livre du maître de « Cap Maths», Hatier 2005.

[190] Ce texte peut être disponible uniquement à l'enseignant et ainsi prendre une forme plus décontextualisée comme « *utiliser les groupements par dix pour réaliser une quantité* », mais il peut être aussi disponible directement aux élèves via un fichier, sous forme d'un texte ou d'un schéma ou dessin.

[191] Rappelons cependant que nous ne considérons que des éléments qui permettent d'indiquer la tâche attendue par les auteurs. Une analyse *a priori* des stratégies envisageables dans les problèmes proposés est insuffisante en elle-même pour comprendre l'activité réelle en classe et ne ferait que donner une indication sur l'adéquation entre les prescriptions et les conditions de réalisation d'un itinéraire, ce qui n'est pas ce qui est recherché ici.

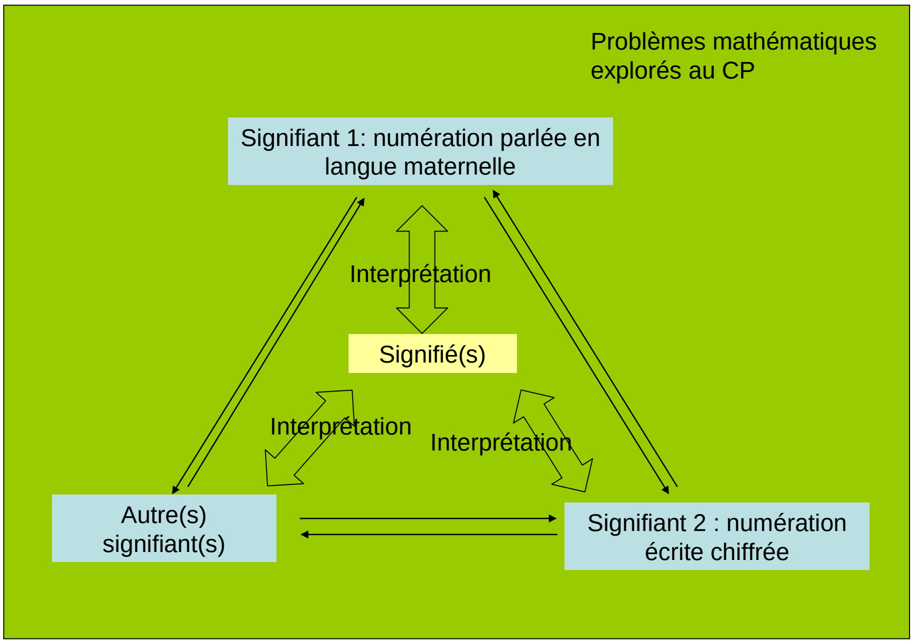
Les cheminements cognitifs potentiels des élèves



Cette schématisation ne peut être envisagée indépendamment du cadre théorique à partir duquel elle a été élaborée. Rappelons en particulier que d'autres cheminements cognitifs que ceux qui vont être notifiés par la suite dans ce chapitre (ceux qui sont prescrits) peuvent être empruntés par les élèves. Certains peuvent être aussi attendus par les auteurs du manuel ou encore les enseignants, mais d'autres aussi sont envisageables. Dans un problème à résoudre, la diversité de cheminement que peut emprunter potentiellement un élève dépend de nombreux paramètres comme par exemple la disponibilité de ses connaissances[192]. Dans ce chapitre, nous ne retenons que ceux qui apparaissent dans le cadre de la progression sur la numération prescrite par les auteurs du manuel, c'est à quoi renvoie le terme « favorisé ». L'encadré global jaune et la locution « variété des problèmes mathématiques » rappellent ce contexte général d'enseignement et d'apprentissage, ils indiquent en particulier que ces cheminements se font dans un contexte de disponibilité des connaissances selon une variété de problèmes. Ainsi, si par exemple les liens signifiants/signifié(s) ne sont pas toujours notifiés dans nos schémas (car non mis en avant dans la logique de la progression prescrite), ils peuvent être mis en jeu par les enseignants ou les élèves dans le déroulement des séances. Ils peuvent l'être soit de manière explicite soit de manière implicite, par exemple via un contexte familier ou du fait que certains signifiants (comme ceux de la numération parlée) évoquent le nombre. Ces possibilités sont étudiées dans la troisième partie de la thèse.

Le troisième temps de l'analyse permet d'identifier l'itinéraire cognitif d'enseignement proposé par le manuel. Rappelons que nous avons schématisé les itinéraires cognitifs d'enseignement ainsi (à comprendre dans le sens dynamique notifié dans les chapitres 4 et 5) :

[192] Ici nous faisons référence à la notion de niveau de mise en fonctionnement des connaissances développé par Robert que nous avons déjà évoquée dans le chapitre 4, mais d'autres facteurs interviennent aussi. Rappelons en outre que nous avons exposé dans ce même chapitre 4 en quoi les cheminements « réels » des élèves étaient plus complexes que veulent bien faire apparaître les schématisations que nous utilisons. Ces schématisations sont cependant utiles à notre étude.



Ces itinéraires font écho aux cheminements précédents, mais cette fois-ci au niveau des interprétations qui sont en jeu dans l'enseignement proposé (ici par les manuels), interprétations qui font elles-mêmes écho à celles dégagées dans la première partie de la thèse[193]. La schématisation permet de mettre en relief certains éléments retenus dans la problématique du chapitre 4, en particulier le jeu des signifiants dans l'évolution des interprétations. A noter que dans le schéma précédent, aucun itinéraire n'est spécifié[194].

c. Le choix des manuels

Afin de donner un aperçu de l'éventail des itinéraires proposés, nous avons consulté un panel important de manuels et avons opéré une sélection afin d'illustrer les variations dans les différents types d'itinéraires dégagés précédemment. Cependant, nous n'avons pas rencontré de manuel proposant réellement un itinéraire du troisième type. C'est pourquoi nous allons étudier deux manuels. Notre choix a été aussi contraint par la quantité des informations utiles à nos objectifs que nous pouvons recueillir : certains auteurs de manuels ne détaillant pas leurs prescriptions, il nous était très difficile d'en retirer les informations souhaitées.
Nous avons en outre choisi des manuels disponibles aux enseignants à la rentrée scolaire 2009.

- « Cap Maths », édition Hatier (2005), de Charnay, Dussuc et Madier, est issu d'une collaboration entre chercheur de l'INRP, formateur IUFM et professeur des écoles. Un certain nombre d'activités proposées sont proches de celles de la collection Ermel chez Hatier. Il prescrit un itinéraire cognitif de premier type, c'est-à-dire faisant évoluer concomitamment l'interprétation de la numération parlée en France et la numération écrite chiffrée, c'est-à-dire d'une numération ordinale vers une

[193] Les interprétations des numérations au niveau des manuels vont être des reconstitutions que nous allons entreprendre dans la cadre de cette thèse. Par ailleurs, elles ne comprennent pas, au moins initialement, l'ensemble des éléments des interprétations « théoriques » que nous avons dégagées dans la première partie de la thèse.
[194] Voir dans le chapitre 5 les schémas relatifs aux trois types d'itinéraire cognitif d'enseignement dégagés.

interprétation de référence de la numération écrite chiffrée (via une interprétation multiplicative).

- « J'apprends les maths avec Tchou », aux éditions Retz (2009), de Brissiaud, Clerc & Ouzoulias, est issu d'une collaboration entre chercheur en psychologie, formateur IUFM et professeur des écoles. Il prescrit un itinéraire cognitif de deuxième type, faisant intervenir une numération orale annexe « régulière » interprétable en tant que numération arithmétique multiplicative, pour amener la numération écrite chiffrée à cette même interprétation.

Les deux manuels se composent de deux ouvrages. Le premier est un recueil d'exercices destination des élèves. Nous le nommons le plus souvent « fichier élève ». Le deuxième, à destination de l'enseignant, fournit des indications pour mener les séances (utilisation du fichier élève, objectifs d'apprentissage, indications sur le déroulement). Nous le nommons guide ou manuel de l'enseignant ou du maître. Par ailleurs, un matériel pédagogique est fourni. Ainsi quand nous employons le mot manuel, il se réfère à l'ensemble de ces documents.

2. Le manuel « Cap Maths »

Comme annoncé dans la méthodologie adoptée, après avoir précisé quelques points méthodologiques spécifiques à l'étude de ce manuel (§ 2.1), nous rendons compte des prescriptions à l'aide des indicateurs définis précédemment (§ 2.2) puis les interprétons en termes de cheminements cognitifs favorisés chez les élèves (§ 2.3) puis en termes d'étapes concernant l'évolution des interprétations, définissant ainsi l'itinéraire cognitif d'enseignement proposé par le manuel (§ 2.4). Afin de faciliter la lecture, les séances clés sont détaillées en annexe et nous n'en donnons ici qu'un résumé.

2.1 Présentation générale et spécificités méthodologiques

Le manuel étudié est la version 2005 de « Cap Maths » aux éditions Hatier.
Il comporte un fichier de 144 pages à destination de l'élève, un guide de 319 pages à destination de l'enseignant et du matériel divers, détachable à la fin du fichier élève ou photocopiable à partir d'un fichier annexe dont dispose l'enseignant.
La programmation des séances est divisée en cinq périodes scolaires. Chaque période comprend trois unités, chaque unité comprend sept séances d'apprentissage (environ une par jour) plus une séance de bilan/évaluation. Un descriptif de chaque séance est donné dans le livre du maître avec des recommandations sur le déroulement, les productions attendues des élèves et les notions importantes à mettre en relief. La plupart du temps, à cette description de chaque séance correspond une page sur le fichier élève. Celle-ci est support à une partie de la séance et les élèves peuvent directement y réaliser les exercices. Certaines consignes sont indiquées sur le fichier (mais doivent être aussi stipulées par l'enseignant), d'autres viennent uniquement de l'enseignant (par exemple pour le calcul mental). Dans le domaine numérique, une séance type comporte tout d'abord des exercices de réinvestissement de notions déjà étudiées, le plus souvent dictés par l'enseignant (calcul mental, problèmes arithmétiques, dictée de nombre, exploration de la suite écrite chiffrée, entraînement à la mémorisation de la comptine numérique, etc.). Un support pour les réponses apparaît dans un encadré en rose ou bleu sur le fichier élève, cependant certains exercices, comme ceux concernant la récitation de la comptine numérique, n'y apparaissent pas. Une séance d'apprentissage sur une notion nouvelle est ensuite prescrite, séance qui, le plus souvent, ne nécessite pas l'emploi du fichier élève. Cependant dans le cas où elle concerne aussi ce fichier, elle est signalée dans un encadré orange. Finalement un « entraînement » se référant à la séance d'apprentissage qui vient de se dérouler est proposé. Il est indiqué par un encadré bleu sur le fichier élève.

Nous avons donc trois sources d'informations : le texte introductif du manuel de l'enseignant, le descriptif de chaque séance dans ce même manuel et le fichier élève. Cependant dans ce dernier, aucuns textes explicitent les intentions des auteurs telle une synthèse ou un résumé en direction des élèves. En conséquence, dans un premier temps, à partir des écrits de la présentation du guide du maître (p. V à XXXI), nous allons relever les prescriptions qui concernent l'enseignement de la numération chiffrée au fur et à mesure de l'avancée dans l'année. Plus précisément, il s'agit du champ numérique, des propriétés de chaque numération, des articulations entre les deux numérations et des séances clés marquant des étapes. L'analyse de ces prescriptions est ensuite affinée grâce aux indications données sur le déroulement de chaque séance. La conformité avec les prescriptions précédentes est étudiée en considérant les objectifs de séance déclarés, le champ numérique abordé et les synthèses en direction des élèves qui sont prescrites. En ce qui concerne les problèmes proposés, nous vérifions que leur énoncé n'est pas en contradiction avec ce que nous avons relevé précédemment.

2.2 Prescriptions relevées

a. Recommandations générales des auteurs en direction des enseignants

Ces recommandations ont été relevées dans la présentation du livre du maître et concernent la « démarche pédagogique ».
Les auteurs prescrivent un découpage en trois phases pour chaque objectif d'enseignement : apprentissage (d'une nouvelle notion), synthèse et entraînement.
L'apprentissage se fait à l'aide de situations-problèmes. Derrière cette notion est mis en avant le fait de proposer des problèmes à résoudre collectivement, sous forme orale et requérant du matériel manipulable. En outre, les textes officiels cités permettent aux auteurs de souligner l'intérêt de faire apparaitre aux élèves les notions nouvelles comme efficaces pour résoudre des problèmes. Les synthèses ont quant à elles pour but d'identifier les connaissances à retenir et comportent donc une part d'institutionnalisation alors que les phases d'entraînement ont pour objectif de mettre en œuvre les connaissances nouvellement introduites à travers la résolution d'exercices.

b. Prescriptions en ce qui concerne la numération

Dans le texte introductif dans la présentation du guide du maître, il est indiqué que dans chacune des cinq périodes un champ numérique spécifique est abordé et des directives différentes concernant l'enseignement de la numération sont prescrites. Ces prescriptions donnent donc des indications globales sur les orientations de l'enseignement de la numération préconisées par le manuel. Pour chaque période, nous les mettons en parallèle avec les précisions apportées dans le déroulement des séances proposées au fur et à mesure. Afin de faciliter la lecture, certains éléments sont détaillés en annexe et nous n'en donnons ici qu'un résumé.

<u>Période 1</u> : unités 1 à 3, champ numérique 1 (un) à 19 (dix-neuf)
Les auteurs indiquent leur volonté de stabiliser tout d'abord les connaissances de la maternelle sur le nombre, sans étudier les nombres un par un. Nous pouvons lire p.VII du guide du maître :
« *Sans formalisation prématurée, le travail proposé concerne notamment :*
- *la maîtrise de la suite des nombres jusqu'à 16 : notamment la comptine orale ;*
- *l'utilisation des nombres pour exprimer des quantités et en garder la mémoire ;*

- la maîtrise de différents moyens de dénombrement : reconnaissance immédiate de petites quantités ou de quantités organisées (dé, doigts ...), comptage un par un ;
- la maîtrise de l'écriture des chiffres ».
Ceci est travaillé dans la période 1, pour les nombres de un à dix-neuf. Cinq points sont mis en avant, p. XIII et XIV dans la présentation du livre du maître :
« ***Faire prendre conscience de l'utilité des nombres***. *Au cours de cette première étape, les problèmes proposés conduisent les élèves à prendre conscience des différentes utilisations des nombres pour exprimer et mémoriser des quantités ou pour les comparer, sans avoir à les reproduire.* »
« ***Assurer un bonne maîtrise de la suite orale des nombres jusqu'à 19 (comptine numérique)****. « Le plus souvent à l'école maternelle les nombres sont « dits » précise le programme pour l'école maternelle. Consolider la maîtrise de la suite orale, en particulier dans la zone délicate entre dix et vingt, constitue donc un objectif important, [...].* »
« ***Consolider différentes stratégies de dénombrement****. Pour exprimer une quantité à l'aide d'un nombre, plusieurs moyens sont développés : reconnaissance immédiate pour les très petites quantités (jusqu'à quatre), quelle que soit la disposition des objets ; reconnaissance immédiate pour des collections organisées (constellation du dé, doigts) ; comptage un par un [...].* ».
« ***Reconnaître les écritures chiffrées des nombres***. *La reconnaissance des écritures chiffrées (au moins pour les nombres jusqu'à 9) est déjà assurée pour certains élèves alors qu'elle reste délicate pour d'autres. Une aide et un entraînement sont donc nécessaires. L'utilisation de la file numérique (matérialisation de la suite écrite) permet de faire le lien entre désignation orale et écriture chiffrée des nombres, l'élève pointant successivement chaque nombre de la file (1, 2, 3 ...) en même temps qu'il énonce la suite orale (un, deux, trois ...).* ».
« ***Varier les modes de représentation des nombres***. *Il est tentant de recourir à un matériel privilégié pour représenter les nombres, en particulier les petits nombres. Mais ce n'est pas sans risque, celui notamment d'enfermer la pensée de l'enfant dans une référence permanente à ce matériel et de bloquer ainsi le nécessaire processus d'abstraction. C'est ce qui nous a conduit à envisager une pluralité de représentations, en favorisant aussi souvent que possible les mises en relations : doigts, constellations, objets divers et, plus tard ; monnaie ... en lien avec la comptine orale et la file numérique*. ».

<u>Période 2</u> : unités de 4 à 6, champ numérique de 1 à 39
Il s'agit de repérer tout d'abord les régularités de la suite des écritures chiffrées : « *Le fait que le chiffre « de gauche » (non encore reconnu comme celui des dizaines) ne change que lorsque celui « de droite » (non encore reconnu comme celui des unités) passe de 9 à 0.* », p. XIV du livre du maître. Ce repérage est relié à l'ordre dans la file numérique des écritures chiffrées, ensuite cet ordre permet de comparer deux nombres désignés par leur écriture chiffrée : « *une bonne maîtrise de cette suite offre un premier moyen de comparaison des nombres* », p. XIV du manuel de l'enseignant. Ensuite est prescrite la mémorisation de la comptine numérique en insistant sur les mots vingt et trente qui sont mis en parallèle avec les régularités de l'écriture chiffrée : « *Souligner la double régularité des nombres de 20 à 39 : celle des écritures chiffrées (valable également pour les nombres plus petits), celles de leur désignation orale : il suffit de se souvenir des mots vingt et trente (ce qui n'est pas vrai pour les nombres plus petits que vingt)* » p. 71 du manuel du maître. Comme pour le champ numérique précédent, il s'agit de lire les écritures chiffrées (prescription écrite p. XIV du manuel de l'enseignant), mais aussi d'écrire les désignations orales dans des dictées de nombres (voir par exemple la séance 5 de l'unité 4). Enfin sont prescrites des habiletés de comptage sur des collections jusqu'à 39 objets, basées sur l'utilisation des doigts (des deux mains) en parallèle de l'emploi des mots dix, vingt, trente. « *Les premiers groupements sont*

réalisés à cette occasion, ce qui prépare la prise de conscience du rôle joué par le nombre dix et le principe de groupements par dix caractéristique de notre système numérique », p. XIV du livre du maître. Un extrait du rapport de synthèse de Barouillet et Camos du ministère de la recherche (2002) qui est donné p. XIV du manuel de l'enseignant argumente la nécessité de ce travail de groupements en lien avec la numération parlée : « *La faible transparence de la base dix dans les langues occidentales influe négativement sur l'apprentissage de la numération écrite* ».
Finalement un travail d'association signifiant/signifiant entre les écritures littérales des nombres de un à vingt et leur désignation orale est prescrit : le nombre qui se dit « deux » s'écrit « d e u x » avec les lettres de l'alphabet[195].

<u>Période 3</u> : unités de 7 à 9, champ numérique de 1 (un) à 59 (cinquante-neuf)[196].
Dans un premier temps est prescrit un travail identique à celui de la période précédente dans le champ numérique des nombres jusqu'à 59 (cinquante-neuf) : le repérage de la régularité d'apparition des chiffres dans la file numérique des écritures chiffrées « *Le fait que le chiffre « de gauche » (non encore reconnu comme celui des dizaines) ne change que lorsque celui « de droite » (non encore reconnu comme celui des unités) passe de 9 à 0.* » est repris <u>en parallèle</u> de l'appui sur les mots vingt, trente (son proche de trois), quarante (son proche de quatre), cinquante (son proche de cinq) dans la comptine numérique orale.
Ensuite, dans la présentation du manuel du maître, cette période 3 est indiquée comme étant celle dans laquelle une écriture chiffrée connue (donc de 1 à 59) telle que 35 a son premier chiffre 3 qui va être relié à un comptage en 3 groupements de dix unités et son deuxième chiffre 5 à 5 unités isolées : l'écriture 35 quant à elle « *évoque le nombre total d'unités* », p. XV du manuel du maître. L'introduction se fait dans le cadre des cardinaux de collections discrètes et il est indiqué (à l'enseignant) qu'ultérieurement l'unité de mesure peut être celle d'autres grandeurs, mais ceci n'est pas présent dans la séquence. Les quatre séances « grand Ziglotron » constituent « *un problème nécessitant d'associer désignation chiffrée et groupement par dix* », p. XV du manuel du maître. Enfin le passage de 49 à 50 (ajout d'une unité) est mis en parallèle avec l'organisation en dizaines et unités correspondante : « [...] *l'ajout de 1 unité à 4 groupements de dix unités et 9 unités, ce qui entraîne la possibilité de réaliser un nouveau groupement de dix ; cela permet de renforcer le lien entre l'organisation de la suite écrite des nombres et les principes de la numération décimale* », p. XV du livre du maître. Finalement, un parallèle est fait avec le comptage de dix en dix.
La séquence « grand Ziglotron » proposée aux élèves dans l'unité 8 via les prescriptions dans le livre du maître et le fichier élève est la séquence clé qui permet de relier l'écriture chiffrée au signifiant autre que par la désignation parlée. Les prescriptions concernant l'introduction du manuel du maître indiquent simplement que cette dernière consiste en « *un problème nécessitant d'associer désignation chiffrée et groupement par dix* », à partir duquel « *l'essentiel du travail consiste ensuite à assurer cette capacité à associer un nombre comme 47 avec la quantité qu'il évoque réalisée sous forme de 4 groupements de dix objets et 7 objets isolés* », p. XV du manuel du maître. Une limite est donnée à ce travail puisque à la suite de cet extrait est écrit que « *Ce n'est qu'au CE1 que sera envisagé le difficile travail sur les échanges, la dizaine n'étant alors pas nécessairement évoquée par un groupement mais par un objet qui « vaut dix »* ». Nous étudions alors la séquence « grand Ziglotron » pour savoir comment est prescrite l'association écriture chiffrée et « *la quantité qu'il évoque sous*

[195] Ce travail permet de prolonger celui associant désignation écrite/désignation parlée dans un rapport signifiant/signifiant, grâce en particulier au fait que sur le fichier élève les pages sont numérotées à l'aide simultanément de l'écriture chiffrée et de l'écriture littérale : par exemple « vingt et un . 21 ».
[196] Certaines écritures chiffrées au-delà de 59 sont aussi abordées, mais la comptine numérique orale ne l'est pas au delà de cinquante-neuf.

forme de groupements de dix objets et d'objets isolés ». Des détails de cette étude sont donnés en annexe. Nous rapportons ici les conclusions. Dans le contexte des séances « Ziglotron », le lien entre la désignation parlée telle que « quarante-deux » et celle du type « 4 paquets de dix boutons et 2 boutons » est tout d'abord prescrit. La collection est présente puis ne l'est plus. Par suite, le lien entre l'écriture chiffrée telle que 42 et celle du type « 4 paquets de dix boutons et 2 boutons » est établi grâce aux deux liens déjà établis entre d'une part l'écriture chiffrée (42) et la désignation parlée (« quarante-deux ») et d'autre part la désignation parlée (« quarante-deux ») et celle du type « 4 paquets de dix boutons et 2 boutons ».
Dans la suite (unité 9) l'obtention rapide de l'écriture chiffrée du cardinal d'une (grande) collection est mise en relation avec l'organisation de la collection selon des paquets de dix. Deux stratégies sont valorisées : le dénombrement des paquets de dix et le comptage de dix en dix pour obtenir la désignation orale : « *Faire des groupements de dix objets permet d'obtenir facilement l'écriture du nombre : soit directement en s'appuyant sur la valeur des chiffres en fonction de leur position : s'il y a 6 groupements de dix objets et 3 objets isolés, le nombre d'objets s'écrit directement 63 ; soit par comptage de dix en dix, ce qui donne le nom du nombre, il faut ensuite le traduire en chiffre : si on a réalisé 6 groupements de dix objets et qu'il reste 3 objets isolés, on compte, en pointant les groupements puis les objets, dix, vingt, trente, quarante, cinquante, soixante, soixante-et-un, soixante-deux, soixante-trois*. », p. 185 du livre du maître. Par ailleurs est prescrit un lien entre les repérages initiaux des régularités de la suite chiffrée via un compteur chiffré[197] (qui permet d'obtenir l'écriture chiffrée de manière mécanique en faisant tourner des roues) et un dénombrement de collection un à un : un ajout de un à une collection fait tourner la roue des unités, quand arrive neuf, le passage à zéro sur les unités s'accompagne du passage à une unité de plus pour la deuxième roue, celle des dizaines.

<u>Période 4</u> : unité de 10 à 12, champ numérique de un à cinquante-neuf pour les désignations orales, et de 1 à 99 pour les désignations écrites.
Dans la présentation du manuel du maître, p. XV, l'écriture chiffrée est travaillée dans des problèmes de comparaisons mettant en exergue la position des chiffres « *comprendre pourquoi pour comparer deux nombres de deux chiffres il faut d'abord s'intéresser au chiffre de gauche* ». Deux possibilités sont mises en parallèle. La plus ancienne consiste à se référer à la suite des écritures chiffrées (et non à la comptine numérique), « *37 est rencontré avant 54 lorsqu'on parcourt la suite des nombres depuis son début* », elle a été introduite avant les séances « grand Ziglotron ». Elle est basée sur un repérage des régularités dans la suite des écritures chiffrées, régularités qui sont mises en exergue grâce à un tableau et au compteur chiffré[198]. Cette première possibilité est travaillée dans l'unité 10 (séances 4 et 6), l'unité 11 (séances 1, 2, 3). La deuxième possibilité envisagée par les auteurs est nouvelle. Elle consiste à traduire les écritures chiffrées en termes de « ... groupements de dix et ... » puis de se référer aux quantités ainsi désignées pour les comparer : « *37 objets c'est moins que 54 objets, puisque dans un cas il n'y a que 3 groupements de dix alors que dans l'autre il y en a 5* ». Son apprentissage est prescrit dans les séances 6 et 7 de l'unité 10, 2 et 4 de l'unité 11 et 5 de l'unité 12. Ces deux possibilités indiquées pour comparer deux écritures chiffrées dans la présentation du livre du maître sont l'enjeu des séances 1, 2 et 7 de l'unité 12 et indiquées dans la synthèse de cette même unité, p. 256 du guide du maître.
A noter en outre dans les séances 6 et 7 de l'unité 11, un travail sur l'association entre écriture chiffrée et décompositions additives : 67, 60+7, 10+10+10+10+10+10+7. Il est alors prescrit,

[197] Le compteur chiffré consiste en deux roues fonctionnant indépendamment sur les quelles sont inscrits les dix chiffres et qu'il s'agit de faire tourner pour afficher un nombre à deux chiffres.
[198] Le tableau présente les écritures chiffrées de sorte que les nombres ayant le même chiffre de droite sont dans une même colonne, le même chiffre de gauche dans une même rangée.

p. 233 du guide du maître, de faire le lien entre le nombre de dizaines lu dans la dernière écriture et le chiffre 6 de 60 et 67[199]. Finalement dans le bilan de l'unité 11, est prescrit le lien entre une écriture de type 40+3 et la désignation orale « quarante-trois » : « *La décomposition du type 10+10+10+10+3 peut être facilement mise en relation avec l'écriture chiffrée 43 (il suffit de compter les 10). Celle du type 40+3 l'est également, mais, en plus, pour les nombres à partir de 20, elle rappelle comment se dit le nombre : quarante-trois.* ».

<u>Période 5</u> : unités de 13 à 15, champ numérique de 1 à 99.
Dans la présentation du manuel du maître, est prescrit un réinvestissement des notions travaillées auparavant en ce qui concerne l'écriture chiffrée à travers l'addition posée : *Comme cela a été dit dans la partie « Nombres et numération », les connaissances acquises sur la valeur positionnelle des chiffres et la référence aux groupements par dix et aux unités permet aux élèves de commencer à comprendre le principe de la retenue dans l'addition posée. Insistons cependant sur le fait que cet apprentissage sera repris en CE1* », p. XXII du livre du maître.
Dans les séances effectivement proposées dans l'unité 13, nous relevons le même type de prescription que pour la période précédente dans le champ numérique des nombres de 60 à 79 : comptine orale de soixante à soixante-dix-neuf avec appui sur soixante (« *mot-clé* ») et association de différentes expressions (soixante-quinze, 60+15, 10+10+10+10+10+10+10+5, 75[200]). Il est mis en avant la difficulté particulière pour les nombres de soixante à soixante-dix-neuf de passer de la désignation parlée à l'écriture. Le « *mot clé* » soixante n'indique pas toujours une écriture chiffrée commençant par 6 : « *Il convient d'insister sur le fait que les nombres de 60 à79 se disent avec le même mot clé (soixante), en utilisant ensuite tous les nombres de « un » à « dix-neuf » et que, donc, lorsqu'on entend soixante, on ne sait pas encore s'il faut écrire d'abord un « 6 » ou un « 7 » : c'est la suite qui permet de le dire* », p. 264 du livre du maître (voir aussi la synthèse de l'unité 13 p. 277 du livre du maître). Les mêmes remarques sont à faire en ce qui concerne l'unité 14 qui traite des nombres de 80 à 99. En particulier, nous relevons dans la synthèse p. 298 du livre du maître : « *Pour lire et écrire les nombres de 80 à 99, il n'y a qu'un seul mot clé (quatre*-vingt*) : il faut bien regarder si c'est 8 ou 9 (ou écouter ce qui suit quatre*-vingt). ». Dans cette unité est abordée de surcroît la technique de l'addition posée en colonne avec retenue des nombres désignés par leur écriture chiffrée, via des expressions du type « *3 groupes de 10 boutons affichés, 4 boutons isolés affichés* », p. 289 du livre du maître. C'est aussi l'occasion de (re)considérer le rôle du zéro quand la somme des unités donne une dizaine entière. Voici la synthèse écrite p. 299 du livre du maître : « *Pour calculer une addition, on peut utiliser le calcul réfléchi ou bien poser l'opération en colonnes. Dans ce dernier cas, il faut commencer par les unités. S'il y en a plus de dix au total, il faut fabriquer une dizaine supplémentaire (c'est la retenue). L'explication peut être appuyée sur du matériel de numération.* ».

2.3 Les cheminements cognitifs favorisés par « Cap Maths »

Nous allons ici analyser les indicateurs relevés dans les prescriptions en termes de cheminements cognitifs favorisés chez les élèves par la progression proposée par le manuel. Le terme « favorisé » renvoie au fait que le manuel engage les élèves à faire les liens symbolisés par les flèches dans les schémas qui vont suivre, chaque élève pouvant ainsi les utiliser dans tel ou tel exercice : ceci a été explicité dans la méthodologie générale d'analyse des manuels, paragraphe 1.2 de ce chapitre et détaillé dans le chapitre 4.

[199] Rappelons qu'ici *a priori* les élèves ne connaissent pas (encore) la désignation parlée de 67.
[200] La décomposition 60+15 est mise en relation avec la désignation orale soixante-quinze.

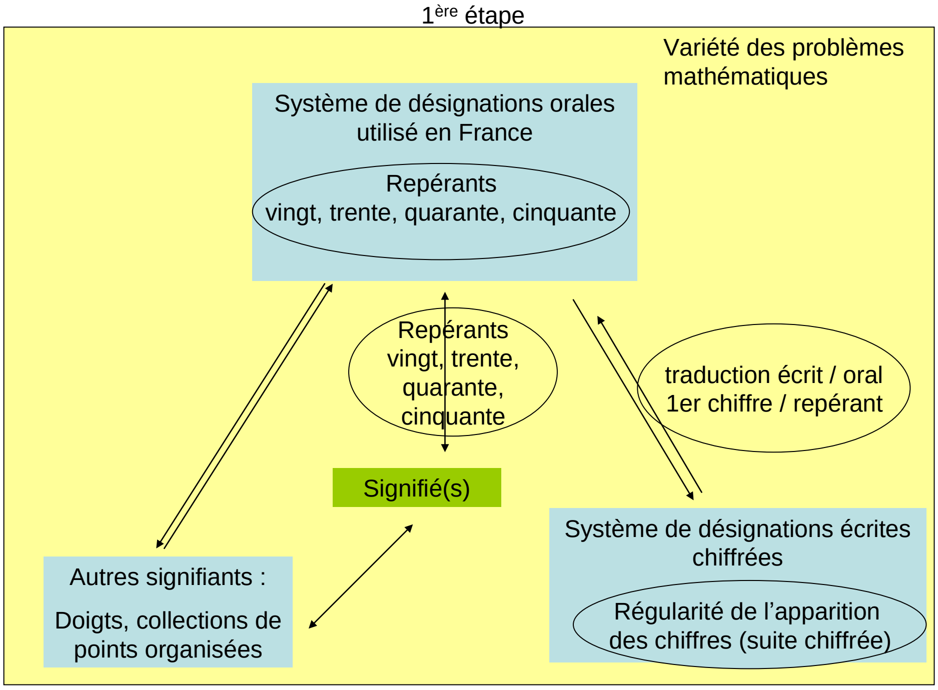
Grâces aux indicateurs, nous identifions trois étapes : tout d'abord des liens sont établis entre la numération écrite chiffrée et la numération parlée en France pour les nombres inférieurs à 59 (cinquante-neuf), ensuite, dans le même champ numérique que précédemment, la désignation parlée du cardinal d'une collection est reliée à une désignation orale annexe de type « désignation des groupements » (« … paquet(s) de dix boutons et … boutons » contextualisé dans la séquence « grand Ziglotron ») et finalement le lien entre l'écriture chiffrée et la « désignation des groupements » est justifié via la désignation orale.

Nous allons préciser ces étapes en termes de cheminements cognitifs (pour les élèves) favorisés par le manuel.
De nombreux exercices sont prescrits afin de renforcer les différents liens, en particulier après les trois étapes. Ils sont pris en compte en considérant un contexte général de problèmes posés aux élèves. Ce contexte est signalé dans les schémas par le cadre jaune intitulé « variété des problèmes mathématiques ».

1ère étape :

Des liens sont établis entre la numération écrite chiffrée et la numération parlée en France pour les nombres inférieurs à 59 (cinquante-neuf). Lorsque les désignations chiffrées sont en jeu, les cheminements favorisés font intervenir systématiquement la numération parlée en France, utilisée avec des repérants vingt, trente, quarante, cinquante. Les nombres vingt, trente, quarante nous semblent en effet moins sollicité ici en tant qu'appuis additifs. En effet, au niveau des prescriptions du manuel, les problèmes posés en début d'année concernent majoritairement le dénombrement et sollicitent la mémorisation de la comptine orale (ou les repères sur la succession des chiffres que nous avons indiqués dans le paragraphe précédent) sans que la structure additive ne soit en jeu pour des collections importantes. Un comptage de dix en dix est initié, mais sans lien avec des problèmes arithmétiques, et de plus le code 10+10 n'est pas encore utilisé.

1ère étape



Les éléments mis en relief dans les prescriptions sont indiqués dans les ovales.

2ème étape

Dans cette deuxième étape, dans le même champ numérique que précédemment (1 à 59), la désignation parlée du cardinal d'une collection est reliée à une désignation orale annexe « … paquets de dix boutons et … boutons » qui permet d'indiquer le cardinal d'une collection. Sa forme écrite traduit exactement sa forme orale (l'oral « trois paquets de dix boutons et sept » / l'écrit « 3 paquets de dix boutons et 7 »). Ce passage se fait essentiellement dans la séquence clé « grand Ziglotron » et se déroule en deux temps.

1er temps

Les deux désignations sont reliées à partir de la nécessité d'utiliser des groupements de dix[201]

Désignation parlée en France du cardinal d'une collection d'objets	⇄ Utilisation de groupements de dix (rendu nécessaire dans le contexte particulier des séances « grand Ziglotron ») ⇄	« Désignation des groupements » contextualisée

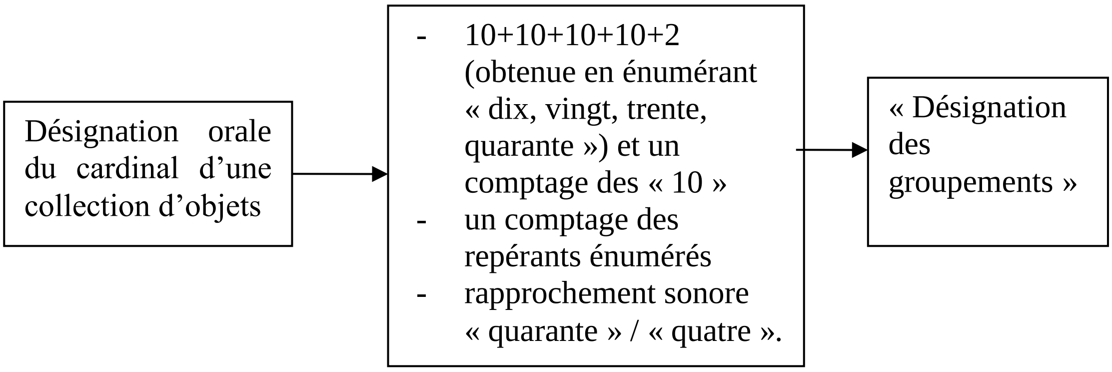
2ème temps

Les deux désignations sont reliées indépendamment de la présence de la collection (lien signifiant-signifiant). Nous avons indiqué que la façon de réaliser ce lien n'était pas explicitement précisée. Afin de retrouver les attentes des auteurs, nous allons reconsidérer la place des prescriptions de la séquence « grand Ziglotron » dans l'ensemble des séances du manuel, en particulier par rapport aux stratégies attendues auparavant. Tout d'abord, il est attendu que l'obtention du signifiant du type « … paquets de dix boutons et … boutons » via la désignation orale se fasse à l'aide de la récitation « dix, vingt, trente » qui accompagne un comptage de dix en dix. En effet la mise en commun prescrite dans la séance 3, unité 8, indique la stratégie suivante pour passer de l'écriture chiffrée 42 au signifiant du type « … paquets de dix boutons et … boutons » : « *décomposition du type : 10/10/10/10/2 ou 10+10+10+10+2= 42, avec comptage de dix en dix pour vérifier* ». Or si une telle décomposition (orale) a été précédemment en jeu dans l'année, elle ne concerne pas l'écriture chiffrée dans son aspect positionnel : ici « 10 » doit donc être compris comme la transcription écrite du « dix » de la numération parlée et non dans son aspect écriture chiffrée de position. En outre cette mise en commun se situe dans une phase orale et elle a pour but d'indiquer à l'enseignant les stratégies possibles des élèves. Nous l'interprétons alors comme témoignant de l'attente d'une stratégie engageant les désignations parlées : décomposition du type dix/ dix / dix / dix /deux ou dix + dix + dix + dix + dix + deux = quarante-deux, avec comptage de dix en dix pour vérifier, dix, vingt, trente, quarante. Ainsi, en considérant les séances passées, nous inférons que pour passer, par exemple, de dix, vingt, trente, quarante, à « quatre paquets de dix boutons deux boutons », sans utiliser le comptage de groupements sur une collection figurée ou manipulable, trois stratégies sont attendues[202] : soit une décomposition dix/ dix / dix / dix obtenue en énumérant « dix, vingt, trente, quarante » (traduite éventuellement par l'écriture additive 10+10+10+10) suivie d'un comptage des « dix/10 », soit un comptage à l'aide des doigts du nombre de mots d'appuis énumérés (dix, vingt, trente, quarante) ou soit encore un rapprochement sonore entre « quarante » et « quatre ». On obtient donc :

---

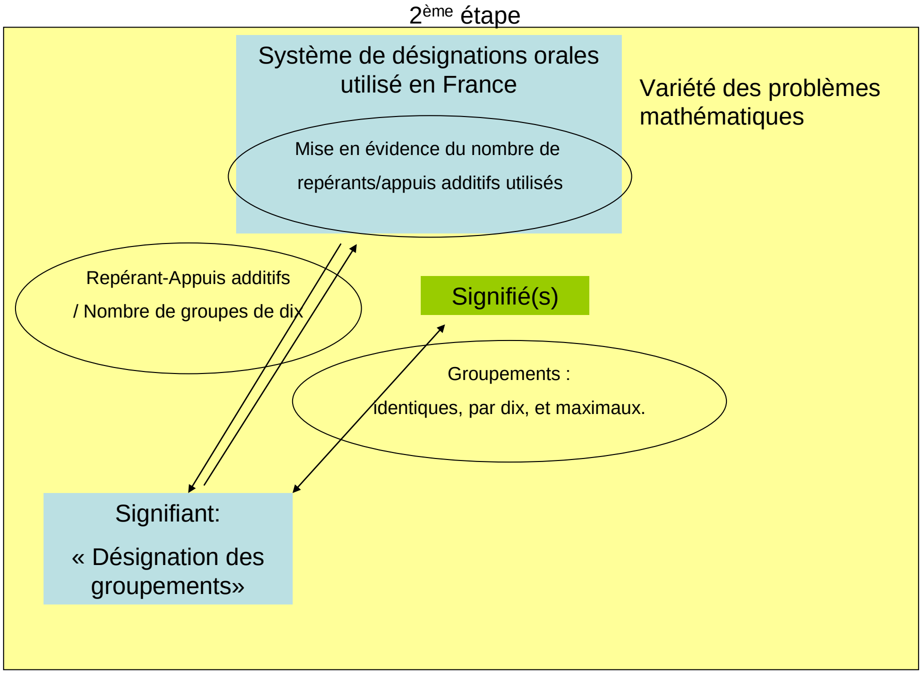
[201] Dans Cap Maths, la maximalité n'est pas questionnée en elle-même, ni le fait de choisir dix comme cardinal du groupement ou même de choisir le même cardinal pour chaque groupement. Tous ces choix sont des conséquences de contraintes matérielles.

[202] Une quatrième, utilisant directement l'écriture chiffrée est l'apprentissage visé.



En l'interprétant dans notre cadre théorique, nous obtenons le schéma suivant au niveau des cheminements cognitifs favorisés chez les élèves par le manuel :

2ème étape

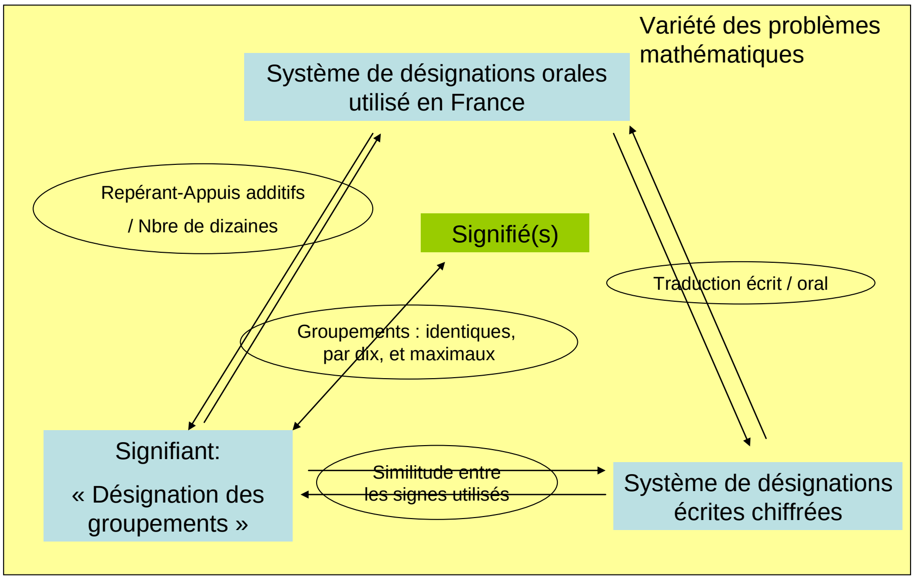


Nous n'avons pas indiqué ici le lien entre le système de désignation parlée en France et le signifié(s), car le processus qui permet de faire évoluer l'interprétation de la numération parlée vers une interprétation arithmétique multiplicative ne prend pas en compte initialement de manière explicite ce lien. Cependant, dans la séquence clé « grand Ziglotron », il nous semble probable que le cardinal de la collection initiale (figurée par des carrés) soit indiqué par les élèves (ou/et) l'enseignant par une désignation parlée en France.

3ème étape

Le lien entre l'écriture chiffrée et la « désignation des groupements » est justifié via la désignation parlée en France qui a été reliée séparément à chacune d'entre elles. L'identification des nombres en jeu dans la désignation des groupements et des chiffres de l'écriture chiffrée, par exemple « 3 paquets de dix et 7 » / 37, apparaît comme un moyen de ne pas passer par la désignation parlée « trente-sept » pour résoudre le problème.

3ème étape



Par la suite, certaines similitudes vont être questionnées (le zéro en particulier et l'ordre des chiffres) et le champ numérique étendu. Le signifiant contextualisé « désignation des groupements » peut progressivement disparaître du fait de l'emploi des mots « dizaine » (objet comptable) et « unité » et de leurs liens en jeu en particulier dans l'algorithme de l'addition posée en colonne : dix unités pour une dizaine, une dizaine pour dix unités. La encore, même si ce n'est pas indiqué par le manuel, dans la séquence clé « grand Ziglotron », il nous semble probable que le cardinal de la collection initiale (figurée par des carrés) soit indiqué par les élèves (ou/et) l'enseignant par une désignation parlée en France.

2.4 L'itinéraire cognitif proposé par « Cap Maths »

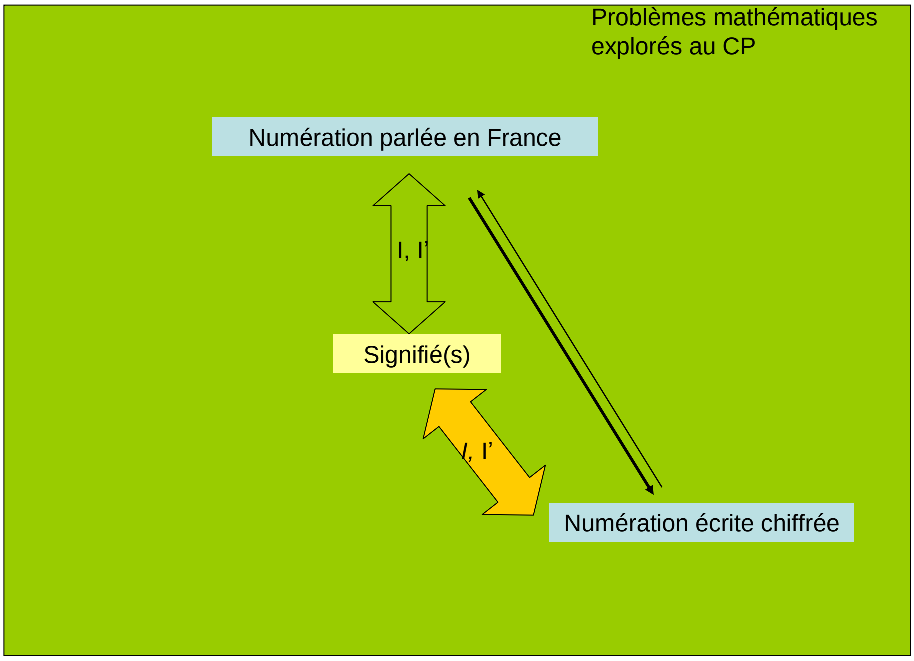
L'itinéraire proposé par ce manuel est bien un exemple d'itinéraire cognitif du premier type. Nous allons le préciser à l'aide des schémas issus du cadre théorique, schémas qui doivent se comprendre à l'aune de ce cadre. Les remarques à ce sujet ont été indiquées dans la méthodologie générale d'analyse des manuels, paragraphe 1.2 de ce chapitre et détaillées dans le chapitre 4. Nous allons ensuite le discuter.
Voici les codes que nous utilisons :
I interprétation ordinale stricte
I° interprétation ordinale avec repérant cinq
I' interprétation ordinale avec repérants dix, vingt, trente, etc.
(I')' interprétation arithmétique additive avec appuis dix, vingt, trente, etc.
I'' interprétation arithmétique multiplicative

a. Les étapes de l'itinéraire

Dans une première étape, la numération orale est interprétée en tant que numération ordinale avec repérants et, à sa suite, la numération écrite chiffrée aussi. En effet, dans le champ numérique des nombres de 1 à 59 (un à cinquante-neuf), chaque désignation chiffrée est la traduction écrite d'une désignation parlée[203]. En outre, l'organisation des signes de chacune

[203] Sur le fichier élève les pages sont numérotées à l'aide simultanément de l'écriture chiffrée et de l'écriture littérale : par exemple « vingt et un . 21 ».

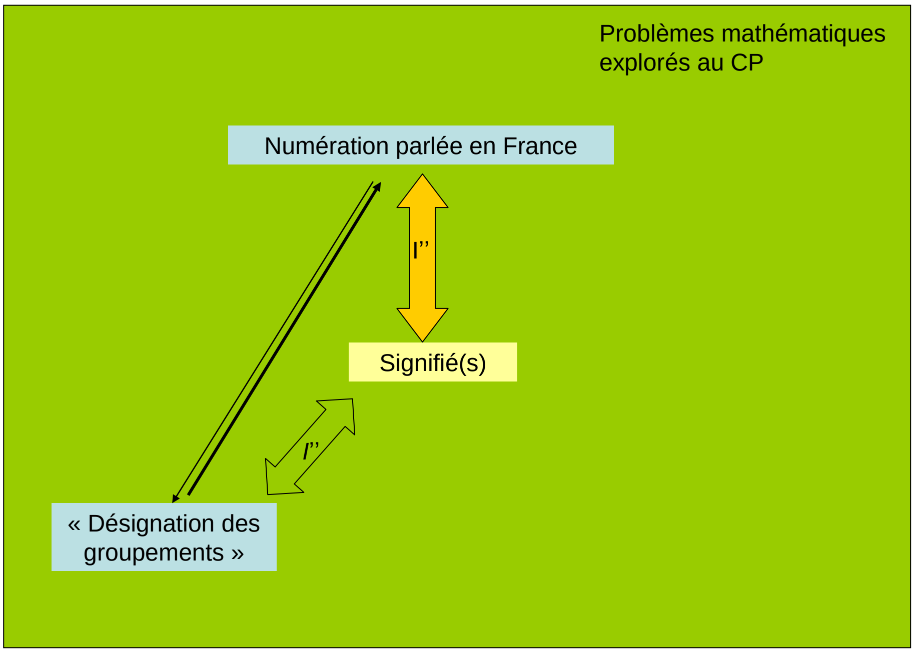
des deux numérations est mise en parallèle. En ce qui concerne les désignations parlées, la comptine comporte des « mots clés », vingt, trente, quarante, cinquante, qui sont suivis des mots un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf. En ce qui concerne les écritures chiffrées, la file numérique correspond à la comptine orale, et dans cette file l'organisation se fait comme suit : tout d'abord la suite des neuf premiers chiffres puis cette suite est reprise (en y insérant le 0) avec un 1 devant, formant ainsi les nombres de 10 à 19, puis un 2 est mis à la place du 1, puis un 3, puis un 4, puis un 5. L'apparition du 2 en tête d'un nombre écrit à deux chiffres est mise en parallèle avec l'apparition du mot vingt dans la comptine orale, celle du 3 avec celle du mot trente, celle du 4 avec celle du mot quarante, celle du 5 avec celle du mot cinquante. Plus précisément un nombre comme cinquante est écrit 50, le zéro étant une marque nécessaire alors pour faire la différence avec 5, et non un chiffre désignant un nombre (le nombre désigné par zéro n'a d'ailleurs pas été introduit). La suite chiffrée est ainsi vue comme une manière de traduire la comptine orale qui reprend donc essentiellement sa structure. Pour les nombre supérieurs à 20 (vingt) une interprétation de type ordinale avec repérants (vingt, trente, quarante, cinquante) est en jeu, pour ceux inférieurs à 20 c'est une interprétation strictement ordinale (le repérant dix n'est pas mis en avant).
En résumé, les écritures chiffrées sont d'abord vues comme une traduction écrite des désignations orales. Cette association engage à les interpréter de manière ordinale avec repérants à partir de 20 (puisque c'est le cas des désignations orales), ce qui est renforcé par le fait de mettre en parallèle les régularités de la suite numérique des écritures chiffrées et la comptine orale. Nous obtenons le schéma suivant :



Rappelons que I' fait référence à une interprétation ordinale avec repérants (pour les nombres supérieurs à 20/vingt) et I strictement ordinale (pour les nombres inférieurs à 20/vingt). Pour la numération écrite chiffrée, l'interprétation I strictement ordinale a été mise en italique car elle nous semble moins sollicitée du fait de l'exploration des régularités de la suite chiffrée, y compris pour les nombres inférieurs à 20. La double flèche colorée indique que c'est elle qui a été élaborée (ou/et renforcée) à la fin de cette première étape.

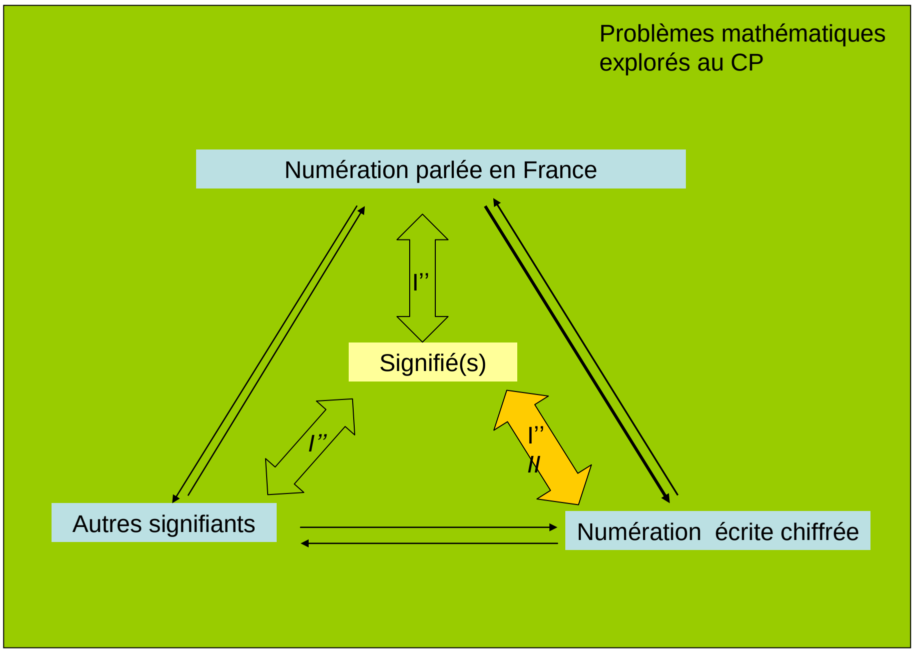
<u>Dans une deuxième étape</u>, toujours pour les nombres inférieurs à cinquante-neuf, un travail spécifique est prescrit entre les désignations parlées en France et des signifiants que nous identifions comme de type « désignation des groupements ». Nous l'analysons comme

permettant à la numération parlée en France de passer d'une interprétation ordinale avec repérants à une interprétation arithmétique multiplicative (dans un contexte particulier). Nous obtenons ainsi le schéma suivant :

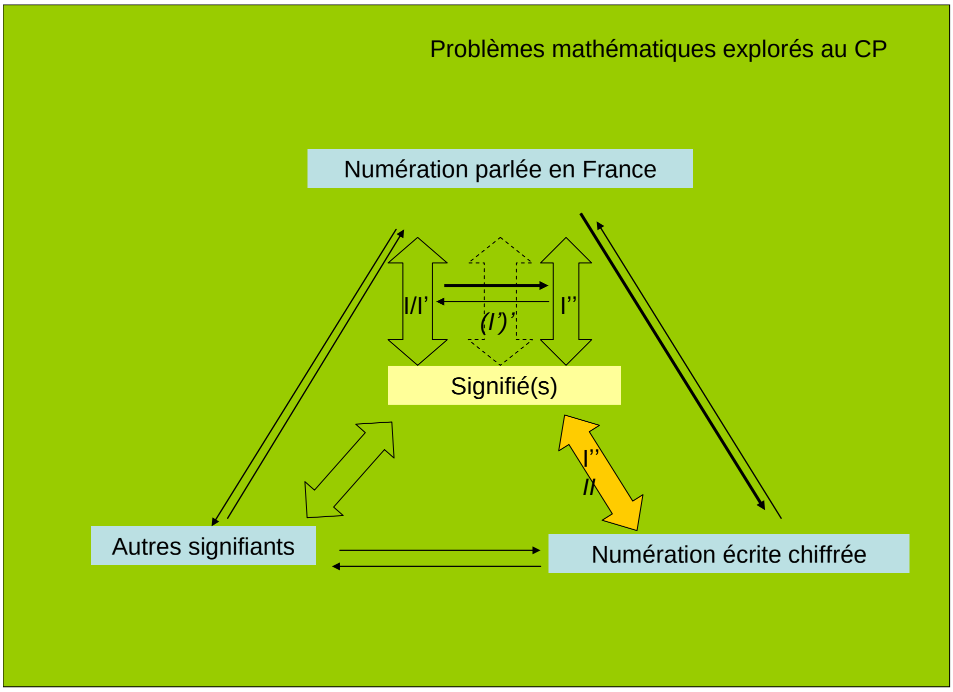


I'' fait référence à une interprétation arithmétique multiplicative de la numération. La double flèche colorée indique toujours que c'est elle qui est visée à la fin de cette deuxième étape. Dans ce schéma, pour l'interprétation des désignations des groupements, nous avons mis en italique I'' car ces signifiants ne se constituent pas en système de numération. En outre leur contextualisation dans le cadre de la séquence « grand Ziglotron » entraîne une utilisation restreinte. Les mots « dizaine » et « unité » sont introduits ultérieurement.

<u>Dans la troisième étape</u>, les désignations parlées des nombres servent à justifier le lien entre la « désignation des groupements » et l'écriture chiffrée dans le cadre de la désignation du cardinal d'une même collection. Ceci est utilisé pour interpréter le système de numération chiffré en tant que numération arithmétique multiplicative, ceci spécifiquement pour les nombres inférieurs à 59. Pour les autres nombres, il est prescrit de reporter à l'année suivante l'enseignement principal des liens entre les deux numérations. Le manuel stipule en effet à propos de ceux-ci : « *L'enseignant lit les nombres de deux chiffres chaque fois qu'ils sont rencontrés, les élèves y étant bien entendu invités, s'ils le peuvent. Quelques activités plus spécifiques sont consacrées à cet apprentissage, mais il faut être conscient du fait que ces désignations orales ne peuvent être entièrement justifiées auprès des élèves. Il convient cependant d'attirer leur attention sur le fait que, lorsqu'on entend par exemple quarante, on peut écrire immédiatement un 4 … alors que lorsqu'on entend soixante (ou quatre-vingt), on doit attendre pour savoir s'il faut écrire 6 ou 7 (ou 8 ou 9) …* », p. XVI du guide de l'enseignant. Nous avons ainsi le schéma suivant, principalement pour les nombres inférieurs à 59 :



Dans ce schéma, nous avons aussi laissé les « autres signifiants » pour souligner leur rôle « relai » qui va être utilisé durablement, en particulier pour l'interprétation des nombres supérieurs à 59 dans la numération écrite chiffrée. La double flèche colorée indique encore que c'est elle qui a été élaborée à la fin de cette troisième étape. Les flèches en trait épais mettent en exergue le rôle essentiel de la numération parlée en France dans ce passage.
Après la séquence clé « grand Ziglotron » et à la fin de celle-ci, un certain nombre de particularités du fonctionnement du système de numération chiffrée est spécifié : le rôle du zéro, l'ordre des chiffres, puis, dans les opérations, les échanges une dizaine pour dix unités, dix unités pour une dizaine. Ceci va dans le sens de l'interprétation de référence II du système de numération chiffrée. Nous obtenons le schéma de synthèse suivant :



Tous les aspects de l'interprétation de référence de la numération écrite chiffrée « II » ne sont pas pour autant prescrits. Ils ne vont intervenir que d'une manière complémentaire à une interprétation arithmétique multiplicative. C'est pourquoi nous l'indiquons en italique à côté de « I'' » relatif à une numération arithmétique multiplicative. Nous avons en outre laissé ici aussi les « autres signifiants » pour souligner leur rôle « relai » durable[204], sachant que dans cet itinéraire cognitif d'enseignement, c'est l'évolution de l'interprétation de la numération parlée en France qui a été le premier élément moteur de celle de la numération écrite chiffrée, essentiellement pour les nombres inférieurs à 59. De plus, nous avons aussi signalé par la double flèche *(I')'* l'existence de l'interprétation arithmétique additive. Celle-ci n'est pas explicitement en jeu dans l'itinéraire prescrit, mais elle est susceptible d'intervenir dans les emplois de la numération parlée en France, notamment dans les stratégies de calcul mental, c'est pourquoi cette double flèche est en pointillés.
Les flèches en trait épais mettent en relief le rôle de la numération parlée en France dans l'itinéraire proposé par le manuel (de type 1).

b. Discussion

Une utilisation ultérieure des écritures chiffrée qui peut inverser le rôle de des deux numérations dans l'itinéraire

La situation à la quelle mène cet itinéraire est plus complexe que ne laisse apparaître cette dernière schématisation synthétique. Ainsi, il est important de signaler que par la suite ce sont les écritures chiffrées qui sont susceptibles de « porter » le plus souvent une interprétation arithmétique multiplicative « I'' » et/ou une interprétation de référence « II ». Par exemple, pour résoudre un problème d'addition posée en colonne avec des écritures chiffrées, c'est cette dernière interprétation qui est prescrite. Cependant du fait des liens établis entre les deux numérations, ces écritures chiffrées sont susceptibles d'être lues à l'aide de la numération parlée en France et par conséquent celle-ci est interprétée dans ce contexte précis comme numération arithmétique multiplicative « I'' » voire de référence « II ». D'une certaine manière le rôle entre les deux numérations est renversé par rapport à leur position initiale prescrite par la progression proposée par le manuel. Mais, il est aussi possible que la numération écrite chiffrée soit interprétée en tant que numération arithmétique avec appuis additifs « (I')' », par exemple dans des problèmes de calcul mental donnés via l'écriture chiffrée ou encore dans les additions posées « en chiffre » effectuées lors de certaines stratégies de calcul mental.

Une interprétation des écritures chiffrée à moduler selon les nombres en jeu

Il en est aussi de même pour la possible interprétation ordinale I de la numération écrite chiffrée en ce qui concerne principalement les nombres inférieurs à 20, en particulier du fait que cette interprétation a précédé l'interprétation I''. Ce dernier point n'est pas repris dans le schéma de synthèse précédent afin de mettre en exergue l'itinéraire cognitif d'enseignement proposé par le manuel, ayant pour but de faire évoluer l'interprétation de la numération écrite chiffrée.

L'écart entre l'interprétation arithmétique multiplicative et celle de référence

Par ailleurs, dans cet itinéraire, des choix ont été faits sur les aspects de l'interprétation de l'écriture chiffrée enjeu d'apprentissage et sur les moments dans lesquels ils vont intervenir. Ainsi, toutes les interprétations se construisent au fur et à mesure et sont (au moins initialement) partielles dans le sens où les prescriptions ne font pas référence à toutes les propriétés indiquées dans la première partie de la thèse. Certaines de ces propriétés sont travaillées ultérieurement à l'introduction de telle ou telle interprétation, certaines ne sont pas

[204] Et essentiel pour les nombres supérieurs à 59.

évoquées dans le manuel de CP « Cap maths », l'étude de certaines autres est renvoyée aux années futures. Ainsi, si la position des chiffres et le rôle du zéro[205]sont abordés, il n'est pas prescrit explicitement de revenir sur la maximalité des groupements de dix dans l'organisation d'une collection, ni le fait de choisir dix comme cardinal du groupement ou même de choisir le même cardinal pour chaque groupement. Tous ces choix sont des conséquences de contraintes matérielles dans la séquence clé. Ils ne sont pas re-questionnés après cette séquence, mais sont légitimés de fait, puisqu'ils ont permis une interprétation *a posteriori* pertinente (car fonctionnelle) de l'écriture chiffrée. L'objectivation par les élèves de cette légitimation n'est cependant pas prescrite par le manuel. En outre, la notion de base qui est propre à un type d'échelle de numération (ce qui se traduit sur une collection par un choix d'organisation utilisant les mêmes type de groupements et par un procédé spécifique de passage aux groupements d'ordre supérieur), le choix de dix pour base, la graphie des chiffres et enfin les différents choix possibles pour coder l'organisation d'une collection (par exemple XXXII ou 3X 2I, au lieu de 32), ne sont pas non plus prescrits.

3. Le manuel « J'apprends les maths avec Tchou »

Comme pour le manuel précédent, après avoir précisé certains points méthodologiques (§ 3.1) nous décrivons les prescriptions du manuel (§ 3.2) à l'aide des indicateurs dégagés précédemment puis les analysons en termes de cheminements cognitifs favorisés (chez les élèves) par le manuel (§ 3.3) afin de dégager des étapes dans l'itinéraire cognitif d'enseignement proposé par le manuel (§ 3.4). Pour faciliter la lecture, les séances clés sont détaillées en annexe.

3.1 Présentation générale et spécificités méthodologiques

Le manuel étudié est la version 2008 de « J'apprends les maths avec Tchou » aux éditions Hatier. Une autre version de « J'apprends les maths » existe, c'est « J'apprends les maths avec Picbille ». Dans cette dernière il n'est pas fait le choix de passer explicitement par une numération annexe « régulière », contrairement à la version du manuel « avec Tchou ». C'est cette dernière qui emprunte donc un itinéraire cognitif de type 2. C'est pourquoi nous n'étudions pas la version « avec Picbille ».

Un fichier de 159 pages est à la disposition de chaque élève, un guide du maître de 208 pages est à destination de l'enseignant et du matériel divers est fourni, détachable à la fin du fichier élève ou photocopiable à partir du guide du maître (support à des activités complémentaires). Par ailleurs du matériel est proposé à l'achat (par exemple une version collective des « boîtes de Tchou ») et certains supports (complémentaires) sont disponibles en ligne sur un site dédié au manuel. Nous allons choisir de ne pas considérer toutes ces options, du fait que les indications relevées dans le livre du maître et le fichier élève vont nous permettre de faire l'analyse visée.

La programmation des séances est divisée en cinq périodes qui se succèdent.

- La 1ère période est signalée par des marges rouges sur le fichier élève, elle comporte 30 pages numérotées de 8 à 37, la séance p. 37 étant une séance bilan. Au total il y a 15 séances doubles, c'est-à-dire concernant une double page.

[205] Essentiellement par le fait que ni la permutation des deux chiffres ni l'absence du zéro ne désignent le nombre initial (les différentes écritures chiffrées étant connues des élèves via la file numérique et mises en parallèle avec la comptine numérique, ce qui a permis de les différencier auparavant).

- La 2ème période est signalée par des marges jaunes sur le fichier élève, elle comporte 36 doubles pages numérotées de 38 à 73, la séance p. 73 étant une séance bilan. Au total il y a 18 séances doubles.
- La 3ème période est signalée par des marges vertes sur le fichier élève, elle comporte 26 pages numérotées de 74 à 99, la séance p. 99 étant une séance bilan. Au total il y a 11 séances doubles et une quadruple (pages numérotées de 80 à 83).
- La 4ème période est signalée par des pages bleues sur le fichier élève, elle comporte 24 pages numérotées de 100 à 123, la séance p. 123 étant une séance bilan. Au total il y a 12 séances doubles.
- La 5ème période est signalée par des marges violettes sur le fichier élève, elle comporte 28 pages numérotées de 124 à 152, la séance numérotée 152 étant une séance bilan. Au total il y a 14 séances doubles.

D'après le livre du maître, p. 47 il est prévu une séance par jour en moyenne. Un descriptif de chaque séance est donné dans le livre du maître avec des recommandations sur le déroulement, les productions attendues des élèves et les notions importantes à mettre en relief. En général ces prescriptions concernent deux séances sur une même double page. Ainsi, la plupart du temps, à cette description de chaque double séance, correspond une double page sur le fichier élève qui est support à une partie de la séance et sur laquelle les exercices proposés sont directement réalisables par les élèves. Les consignes en direction des élèves sont souvent indiquées sur le fichier (mais elles doivent aussi être stipulées par l'enseignant), d'autres viennent uniquement du livre du maître mais peuvent avoir un lien avec le fichier.

Nous pouvons prendre des informations dans le texte de présentation et dans le descriptif de chaque séance du livre du maître ainsi que dans le fichier élève. Cependant dans ce dernier, les textes reprennent les intentions des auteurs données dans le livre du maître. Seules les consignes sont reprises dans une formulation en direction des élèves, comme par exemple « *Calcule en imaginant les nombres comme Perrine ou comme Tchou* », p.125. La large présentation de 43 pages du livre du maître, p. 5 à 47, contient non seulement les prescriptions des auteurs sur les choix faits, en particulier sur la progression proposée sur la numération, mais en outre des explications sur ceux-ci, en particulier en référence à des articles de chercheurs, que les auteurs qualifient du terme générique de « *pédagogues* ». Ensuite, dans le descriptif de chaque séance (double), des rappels (en référence à la présentation) sont faits régulièrement sur les objectifs généraux concernant un ensemble de séances. En outre, le champ numérique y est stipulé et sont indiqués différents exercices types dont la fonction (qui est indiquée explicitement) permet de préciser la progression. De surcroît, les différentes « *représentations* » du nombre annoncées dans la présentation (que nous analyserons ultérieurement en tant que signifiants) sont indiquées au fur et à mesure.

En conséquence, d'un point de vue méthodologique, nous allons dans un premier temps relever les prescriptions sur l'enseignement de la numération chiffrée à partir des écrits de la présentation du livre du maître (p. 5 à 47) dans lesquels sont exposées les intentions des auteurs. Nous regardons au fur et à mesure de l'avancée dans l'année, le champ numérique considéré, les propriétés de chaque numération travaillées, les articulations entre les deux numérations et les séances clés marquant des étapes. Ces indicateurs sont ensuite précisés grâce aux prescriptions données sur les déroulements de chaque séance. Nous allons considérer en particulier les objectifs déclarés pour chaque séance et le champ numérique abordé précisément. En ce qui concerne les spécificités des exercices proposés, nous ne les considérons que lorsque les indicateurs relevés précédemment nous semblent insuffisants.

3.2 Prescriptions relevées

a. Recommandations générales des auteurs en direction des enseignants

Elles sont relevées dans la présentation au livre du maître et concernent la « démarche pédagogique ». Les citations qui suivent sont extraites de ces pages et indiquées en italique dans notre texte.

L'apprentissage se fait à l'aide de questions posées à l'élève : « *De façon générale, le fait qu'une connaissance apparaisse comme une « réponse à une question ou à un problème » aide à la compréhension et à l'appropriation de cette connaissance* », p. 5. Les problèmes posés suivent une progression : « *les 3 dimensions du progrès : la mentalisation des actions d'ajout, de retrait, de groupement ... ; la symbolisation de ces actions et la construction de catégories de situations ; l'acquisition de principes arithmétiques tels que la commutativité de l'addition.* », p. 5. L'un des objectifs est, dès le début de l'année, l'apprentissage du calcul mental, ce qui concerne donc aussi la numération, puisque c'est la numération parlée en France qui va être sollicitée dans le calcul mental. Il s'agit alors pour les auteurs de « *dépasser* » le comptage : « *Ce n'est pas à force de compter que les enfants apprennent à calculer. Certains enfants peuvent s'enfermer très longtemps dans le comptage un à un. L'apprentissage du comptage est incontournable mais il ne suffit pas. [...] Nous avons choisi un autre mode d'apprentissage où l'enfant apprend d'abord à représenter les quantités à l'aide des repères 5 et 10. Il utilise ensuite des stratégies de « calcul réfléchi » telles que « le passage de la dizaine » (9+7=9+1+6) et le « retour au cinq » (8+5=5+3+5), en réalisant d'abord les actions correspondantes avec des collections organisées (c'est le calcul sur des objets), puis en simulant mentalement ces mêmes actions.* », p. 22. Mis à part le calcul mental, la notion de groupement, principalement de 2, 5 et 10, est aussi transversale, puisqu'elle va concerner une approche de situations multiplicatives et une aide à prendre les groupes de dix comme unité de comptage : « *Ces choix permettent d'enseigner des connaissances générales sans pour autant introduire le symbolisme arithmétique de façon trop précoce*. », puis en référence aux problèmes concernant les groupes de deux, comptage des groupes et des unités restantes, nous relevons : « *Or, pour comprendre un nombre comme 40, il faut également coordonner deux dénombrements : celui des 4 groupes de dix et celui des quarante « unités simples ». La situation est en tout point similaire à la précédente, sauf que le groupe de dix a remplacé la paire. Pour comprendre 47, il faut de plus gérer l'ajout mental de 7 unités « isolées » (parce que non groupées par 10)* ». *Il n'est pas raisonnable de penser qu'il serait plus facile de gérer les groupes de 10 que les groupes de 2 ou 5. En revanche, il est tout à fait raisonnable de penser qu'un travail sur les groupes de 2 et 5 aide à comprendre le groupement par 10, c'est-à-dire ... la numération décimale* ».

b. Prescriptions en ce qui concerne la numération

Les p. 29 à 40 de la présentation du livre du maître sont consacrées à la progression proposée sur la numération. Les citations qui suivent sont extraites de ces pages et indiquées en italique dans notre texte.

La numération y est définie comme « *le moyen inventé par l'humanité pour pouvoir désigner verbalement, tant à l'oral qu'à l'écrit, n'importe quel nombre, aussi grand soit-il.* ». Il y est différencié une numération constituant « *une suite de mots connue par cœur (comme c'est le cas avec les lettres de l'alphabet)* » des « *numérations modernes* » qui, elles, utilisent « *deux grands principes : un principe de « changement d'unité de compte » (quand une collection est nombreuse, ça va plus vite de compter des mille ou des cents que de compter des unités simples) et un principe d'écriture que nous examinerons dans un second temps* ». Ce principe de « *changement d'unité de compte* » est précisé : « *C'est ainsi que le problème de la numération est essentiellement un problème de changement d'unités : pour former une* *collection de 32 objets, par exemple, on peut soit les compter 1 à 1, soit encore prendre le « dix » comme « grande unité » du comptage et dire « un groupe de dix, deux groupes de dix, trois groupes de dix, 30 et encore deux, c'est 32 ». Aider les enfants en numération, c'est avant tout leur apprendre qu'on peut « résumer » un comptage de 1 en 1 par un* ***comptage des groupes de dix.*** ». Le « *changement d'unité de compte* » est mis en parallèle avec la numération parlée dans d'autres langues : « *Or dans certaines langues comme le coréen, le chinois ou le japonais, on a le bonheur de compter des « dix » avant de compter des « cents ». Ainsi, dans ces langues, 20 se dit « deux dix », 21 se dit « deux dix un » [...].* ». Par ailleurs, pour les auteurs du manuel, le qualificatif de numération décimale est attribué à une numération s'appuyant (conventionnellement) sur les groupes de dix, « [...] *comprendre le groupement par 10, c'est-à-dire ... la numération décimale* » : cela concerne alors la numération parlée en France (qualifiée de « comme nous »), la numération écrite chiffrée usuelle et une numération « régulière » « à l'asiatique », un, deux, ..., neuf, dix, dix un, dix deux, ..., dix neuf, deux dix, deux dix un, qui sont les nombres dits « comme Tchou ». Deux formes de comptages sont considérés : de dix en dix qui « *utilise les mots « vingt », trente » ...* », et le comptage des groupes de dix « *un groupe de dix, deux groupes de dix, trois groupes de dix* ». Il est prescrit de les utiliser l'un et l'autre puisque « *Comme le comptage de dix en dix privilégie la prise en compte des unités simples et celui des groupes de dix celui de la dizaine comme « grande unité », les deux formes de comptage s'avèrent complémentaires d'un point de vue pédagogique [...]* ». Au comptage de dix en dix est associé la représentation « comme Perrine » (les dix unités sont encore visibles dans les groupes de dix points) et à celui des dizaines la représentation « comme Tchou » (avec les « grandes boîtes de Tchou » fermées, les dix unités que comporte une grande boîte ne sont plus visibles).

L'enseignement de la numération est prescrit en trois phases que nous allons décrire à l'aide de ce que les auteurs ont écrit p. 32, 33 et 34 du livre du maître.
La première phase consiste tout d'abord en l'apprentissage des mots d'une numération « régulière »[206] qui est à percevoir comme une autre façon que « comme nous » (en référence à la numération parlée en France) de dire les nombres. Les écritures chiffrées sont mises en correspondance avec cette numération « régulière », l'association étant ici « *d'ordre grapho-pnonologique*[207] *et non d'ordre conceptuel : il est normal qu'à ce moment de la progression les élèves ne sachent pas que « 4 dix et 2, c'est 4 fois 10 et encore 2 », ni que 42 est égal à cette même décomposition* ». Cette première phase se déroule entre les séances p. 26 et 37 (fin de la première période). La deuxième phase, durant la période 2, a pour but de mettre en correspondance les nombres « comme nous » et les écritures chiffrées, l'association étant encore ici « *d'ordre grapho-pnonologique et non d'ordre conceptuel* ». Cette association concerne les nombres commençant par dix, vingt, trente et quarante, donc supérieurs à dix-sept et strictement inférieurs à cinquante : « *Les élèves apprennent d'abord à écrire les nombres dont l'oralisation « comme nous » commence par dix (dix-huit par exemple), par vingt (vingt-quatre), par trente (trente-deux), par quarante (quarante-cinq). Il s'agit d'apprendre que, quand l'oralisation d'un nombre « comme nous » commence par dix, son écriture commence par « 1 », quand elle commence par « vingt », son écriture commence par « 2 », etc.* ». Le premier temps de la phase suivante commence à la séance quadruple 71-72-

[206] C'est la numération orale « *régulière* » ou encore « *comme Tchou* » qui a été signalée ci-avant. Les nombres sont désignés de la manière suivante : un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, dix, dix et un, dix et deux, ..., dix et neuf, deux dix, deux dix et un, deux dix et deux, ..., deux dix et neuf, trois dix, trois dix et un, etc. jusqu'à neuf dix et neuf.
[207] Ainsi « grapho-phonologique » désigne, comme son nom l'indique, des liens formels basés sur les chiffres et les sons : par exemple pour 34 et trente-quatre, le 3 (trois) peut être relié au son « tr » de trente, le 4 (quatre) étant le deuxième mot entendu de trente-quatre. D'autres exemples sont donnés ultérieurement.

73-74 qui débute la période 3, « *puis de manière systématique à la page 80 folio élève, une évolution majeure se produit : l'enseignant favorise l'interprétation des nombres comme Tchou en termes de changement d'unité de compte. Les élèves qui ne l'auraient pas découvert par eux-mêmes apprennent que « 4 dix et 2 » unités, lorsqu'on s'exprime comme Tchou, peuvent être organisées en 4 groupes de dix alors que 2 unités restent isolées* ». De ce fait, les auteurs indiquent que l'association entre l'écriture chiffrée et les nombres « comme Tchou » « *change de nature : elle devient conceptuelle [...].* ». Le deuxième temps de cette dernière phase consiste à changer la nature de l'association entre l'écriture chiffrée et les nombres « comme nous » : « *grâce à l'écriture 42, qui est commune aux « nombres comme nous » et à « ceux comme Tchou », grâce au comptage « comme nous » de collections organisées en « dix » et « uns », les élèves transfèrent aux « nombres comme nous » ce qu'ils viennent de découvrir concernant les « nombres comme Tchou. [...] Précisons comment l'écriture commune favorise ce transfert. A partir de « quarante-deux », les élèves savent produire l'écriture 42, ils savent également lire cette écriture « comme Tchou » : « 4 dix et 2 ». Comme à ce moment cette façon de dire les nombres « comme Tchou » a été interprétée par l'élève (4 dix et 2, c'est 4 fois dix et encore 2), la désignation orale de départ, « quarante-deux » donne elle-même accès, via l'écriture 42, au modèle conceptuel de ce nombre : « quarante-deux, c'est 4 fois dix et encore 2 ».* ». En ce qui concerne les nombres dont « *les désignations orales sont irrégulières* », c'est-à-dire pour les auteurs du manuel les nombres de onze à seize et de soixante-dix à quatre-vingt-dix-neuf, il est précisé : « *Pour écrire ces nombres, la question qu'il faut se poser est la suivante : « C'est combien de dix et combien de uns ? ». La première partie de la question donne le chiffre des dizaines, et la seconde le chiffre des unités. Avoir répondu à cette question, c'est disposer de l'écriture chiffrée. Or dans le cadre de la progression Tchou, cette interrogation revient à se demander : « Comment se dit ce nombre comme Tchou ? ».* ».

Ces prescriptions donnent donc les indications sur les orientations de l'enseignement de la numération préconisé par le manuel, indications qui sont globales, car par exemple le champ numérique spécifique n'est pas toujours détaillé. Pour chaque période, nous allons alors les mettre en parallèle avec les précisions apportées dans les déroulements des séances proposées au fur et à mesure.

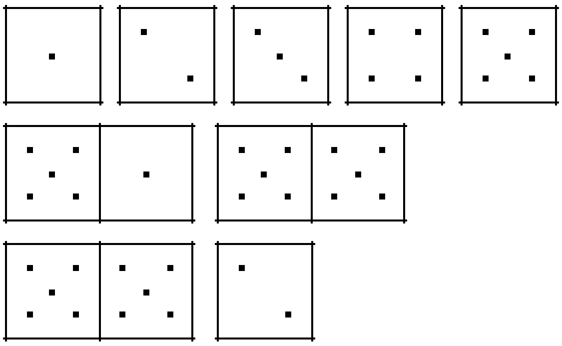
Nous allons tout d'abord décrire deux éléments importants qui ponctuent la progression : les « représentations » utilisées et les exercices types dont nous donnons la fonction indiquée par les auteurs. Ensuite nous allons considérer les séances au fur et à mesure de leur apparition dans l'année.

Pour les « représentations »[208], nous indiquons entre parenthèses la page où elles sont décrites dans le livre du maître puis le numéro de la séance au cours de laquelle elles interviennent la première fois.

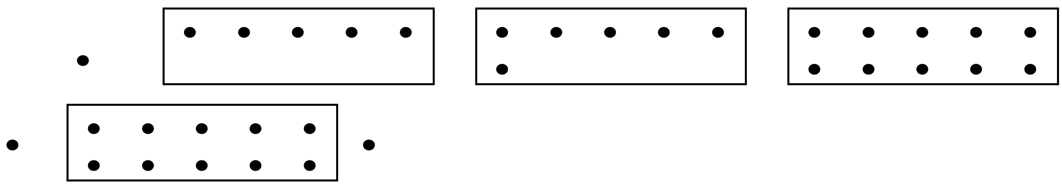
- Les « mots-nombres » (p. 52 ; séance p. 10), sont les noms des nombres dans la numération parlée en France, cette numération est qualifiée de numération « comme nous ». Exemples : cinq, seize, vingt-trois.
- Les écritures chiffrées. Exemples : 5, 16 et 23.
- Les configurations des doigts de la main (p. 52 ; séance p. 10), qui sont parfois accompagnées d'un dessin figurant des doigts levés sur une ou plusieurs mains. Ils sont levés successivement du pouce vers l'auriculaire pour désigner les nombres de un à cinq, et ainsi de suite pour les nombres supérieurs en utilisant une autre main. Exemples voir p. 10-11, fichier élève.

[208] Nous utilisons le mot des auteurs. En décrivant ces désignations nous n'indiquons pas ici le rôle (potentiel) dans les itinéraires, ni les interprétations qui leur sont attachées au niveau des prescriptions. Ce sera un enjeu du deuxième temps de notre analyse.

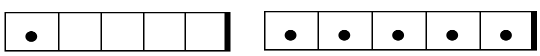
- Les « nombres comme Dédé » (p. 52 ; séance p. 10) sont des points disposés en constellation usuelle du dé, jusqu'à cinq, les constellations se juxtaposant pour les nombres au-delà. Exemples voir p. 10-11 et 45, fichier élève. Voici ce qui l'en est pour les nombres 1, 2, 3, 4, 5 sur la première ligne 6, 10 sur la deuxième puis 12.

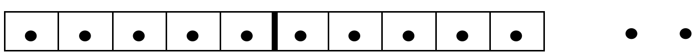


- Les « nombres comme Perrine » (p. 52 ; séance p. 10) sont des points dont la configuration est autre que « comme Dédé » mais est « *susceptible d'être reconnue sans passer par un comptage* ». Pour des « grands » nombres ils sont alignés par cinq, jusqu'à une double rangée de cinq pour constituer un groupe de dix points (qui est ensuite isolé des autres points en l'encerclant d'un trait), le processus recommençant pour constituer successivement des groupes de dix points. Exemples voir p. 10-11 et 88, fichier élève. Voici ce qui l'en est pour les nombres 1, 5, 6, 10 sur la première ligne puis 12 sur la deuxième.



- Les « boîtes de Tchou » (p. 58 ; séance p. 16) apparaissent d'abord sous la forme d'une boîte de cinq emplacements alignés (avec couvercle refermable), puis d'une paire de boites accolées (en ligne), puis d'une succession de paires de boites (couvercles fermés). Exemples voir p. 16-17 et 88, fichier élève. Voici ce qui l'en est pour les nombres 1, et 5 sur la première ligne puis 12 sur la deuxième.





Une fois la boîte « fermée », ce dernier devient :

- Les sommes, du type 2+3, sont avant tout mises en relation avec des problèmes arithmétiques et donc utilisées avec le signe égal (« *l'écriture 2+3 = ... veut dire, dans ce cas qu'il y a déjà 2 billes dans la boite, qu'on va y ajouter 3 autres billes* », p. 60 du livre du maître), mais aussi en relation avec d'autres représentations. C'est le cas quand il s’agit de compléter une boite de cinq de Tchou comportant déjà deux jetons, séance p. 21, ou encore en parallèle de l’écriture chiffrée, des nombres « *comme Dédé* » et « *comme Perrine* » dans la « maison » du quatre et celle du cinq, séance p. 33, dans laquelle « *les élèves sont amenés à recenser exhaustivement les additions qui ont 4 et 5 pour résultat* », p. 74 du livre du maître.

-
- Les écritures littérales (p. 88 ; séance p. 46) apparaissent à la période 2. Exemples : cinq, seize, vingt-trois.
- La monnaie (p. 100 ; séance p. 58) est utilisée principalement comme support à des problèmes arithmétiques.
- Des expressions diverses contenant le mot « groupe(s) » (p. 116 ; séance p. 74). Exemples : « 1 groupe de dix et encore 6 » ou « 1 groupe de dix et 6 points isolés » ou « 1 groupe de dix et encore 6 uns » ; « 2 groupes de dix et encore 3 » ou « 2 groupes de dix et 3 points isolés » ou « 2 groupes de dix et encore 3 uns ».

En ce qui concerne les exercices « types », nous donnons entre parenthèses la page où ils sont décrits dans le livre du maître puis les numéros de page des séances dans lesquelles ils interviennent. Ils sont classés ici dans l’ordre où ils apparaissent dans la progression sur l’année.

- *Dessins de dés* (p. 54 ; séances pages 12, 14, 15) : lien « comme nous »/« comme Dédé » ou lien « doigts »/« comme Dédé ».
- *Furet sur les doigts* (p. 57 ; séances pages 15, 16, 18, 24, 40, 43, 44, 46, 62, 63, 66) : lien « doigts »/« comme nous » jusqu’à la séance p. 24 et ensuite lien « doigts »/« comme nous »/« comme Tchou ». Champ numérique : nombres inférieurs à 5 jusqu’à la séance p. 24, inférieurs à 10 jusqu’à la séance p. 43, puis inférieurs à 16 pour les autres.
- *File numérique* (p. 57 ; séances pages 15, 17, 19, 21, 25) : travail sur l’écriture de la suite des nombres écrits en chiffres.
- *Lecture en Furet* (p. 57 ; séances (15), (17)) : lien grapho-phonologique « comme nous »/« écriture chiffrée ».
- *Dictée de doigts* (p. 58 ; séances pages 16, 18, 22, 40) : lien « doigts »/« écriture chiffrée ». Champ numérique : nombres inférieurs à 5 jusqu’à la séance p. 22 puis nombres inférieurs à 10.
- *Cartons éclairs « comme Dédé »* (p. 59 ; séances pages 17, 48, 49, 54, 55, 58, 59, 71, 73, 76, 89, 90, 92) : le lien « comme Dédé »/« écriture chiffrée » utilise le groupement de dix représenté par un « double dé » à partir de la séance 48. Pour des nombres inférieurs à 10 jusqu’à la séance 49, inférieurs à 16 jusqu’à la séance 73, inférieurs à 20 jusqu’à la séance 92.
- *Dictée de nombres* (p. 58 ; séances pages 16, 18, 24, 77, 78, 79, 80, 98) : lien grapho-phonologique « comme nous »/« écriture chiffrée » est ajoutée une deuxième dictée à partir de la séance p. 77 utilisant « ... groupe(s) de dix et encore ... ».
- *Furet « comme nous »* (p. 68 ; séances pages 26-27, 28) : mémorisation de la comptine numérique parlée en France.
- *Furet « comme Tchou »* (p. 69 ; séances pages 26-27, 28) : mémorisation de la comptine numérique « régulière ».
- *Jeu du compteur* (p. 69 ; séances pages 26-27, 28,) : lien grapho-phonologique « comme Tchou »/« écriture chiffrée ».
- *Dictée et lecture comme Tchou (*p. 71 ; séances pages 29, 33, 36, 37) : lien grapho-phonologique « comme Tchou »/« écriture chiffrée ».
- *Dictée et lecture comme Nous (*p. 80 ; séances pages 38, 42, 43, 50, 60) : lien grapho-phonologique « comme Nous »/« écriture chiffrée ».

- *Furet de la comptine* (p. 113 ; séances pages 71, 72) : mémorisation de la correspondance « comme Nous »/« comme Tchou ». Jusqu'à 16 pour les séances 71 et 72.
- *Compteur des nombres « comme Perrine »* (p. 116 ; séances p. 73-74) : lien « écriture chiffrée »/« comme nous »/« comme Tchou » à l'aide d'organisation de collection en groupe(s) de dix (comme Perrine) et des termes « ... groupe(s) de dix et ... unités ».
- *Compteur des nombres sur les doigts* (p. 116 ; séances p. 73-74) : lien « écriture chiffrée »/ « doigts » permettant de relier un nombre dit « comme nous » comme trente-quatre à « 3 groupes de dix doigts et encore 4 doigts », « 34 doigts levés », « 30 doigts levés et encore 4 doigts ».
- *Furet de Perrine en reculant* (p. 118 ; séances pages 76, 77, 78) : correspondance « comme Nous »/« organisation des points comme Perrine »/« ...groupe(s) de dix et ... points isolés ».
- *File numérique de Tchou* (p. 122 ; séances p. 80-83, 88-89, 90-91) : correspondance « boites de Tchou »/« écriture chiffrée », les grandes boites de Tchou (deux boîtes de cinq emplacements accolées en ligne) sont mises en file pour obtenir une file numérique « vide » (les emplacements).
- *Furet de Tchou en reculant* (p. 124 ; séances pages 84, 86) : correspondance « comme Nous »/« organisation des points comme Perrine »/« ...groupe(s) de dix et ... points isolés »/« comme Tchou ».
- *Jeu de la planche comme Tchou* (p. 192 ; séances pages 84, 85, 88, 89, 90, 92, 94, 96) : correspondance « comme nous »/« écriture chiffrée »/« grandes boîtes de Tchou »/« ... groupe(s) de dix et ... uns »/« comme Tchou ».

PERIODE 1 (rouge) : séances p. 8 à 37

Toutes les « *représentations* » interviennent durant cette période. Cependant, les « boîtes de Tchou » sont principalement un support pour poser des problèmes arithmétiques (compléter une boîte par exemple) et uniquement dans le champ numérique des nombres inférieurs à cinq. C'est durant cette première période qu'est prescrite la première phase de la progression sur la numération, c'est-à-dire celle ayant pour but la correspondance « grapho-phonologique » entre la numération régulière « comme Tchou » et les écritures chiffrées. Cette phase ne débute qu'à la séance p. 26, donc dans un deuxième moment de la période. C'est pourquoi nous la découpons en deux moments.

1er moment de la 1ère période : les liens entre les différentes « *représentations* » et avec les collections d'objets, séances pages 8 à 24.
Il s'agit de « *constituer un système de traduction entre différentes représentations des cinq premiers nombres* », p. 52 du livre du maître, rubrique « *objectifs* ». Cet objectif est poursuivi durant ce premier moment (et même au-delà), mais ici ne commence pas encore la première phase sur la numération telle qu'elle est décrite dans la présentation du livre du maître. Les exercices « types » sont révélateurs de ces « traductions », mais il en existe aussi d'autres :

- lien représentation/collection d'objets, séance p. 13 (doigts, poissons à dessiner), mais aussi séance p. 10 (chaque signifiant peut être en cause) ou séance p. 20 (écriture chiffrée/ collection de fruits) dans un problème arithmétique,
- liens entre trois représentations simultanées, séance p. 17 : « boites »/« doigts »/« Comme Dédé »,
- liens non traités dans un des exercices « types » listés, séance p. 18 : « boites »/« écriture chiffrée» ;

Il existe aussi d'autres exercices traitant des liens déjà en jeu dans les exercices types comme dans la séance p. 19 qui aborde le lien « comme nous »/« écriture chiffrée ». A noter, séance p. 24 l'introduction du signe écrit 0 (prononcé zéro) pour désigner le fait de ne rien ajouter

dans un problème arithmétique : « *On introduit aussi, à cette occasion*[209]*, le cas de l'ajout de 0, ce qui permet de traiter le zéro en tant que nombre, bien avant de l'interpréter dans le cadre de l'étude de la numération décimale de position* », p. 66 du livre du maître.
Champs numériques :

- Ecriture chiffrée/numération parlée en France : oral vers écrit pour les nombres jusqu'à **dix** (dictée de nombres), écrit vers oral pour les nombres jusqu'à **20** (lecture de nombres, séance p. 20),
- écriture chiffrée seule, observation de la logique des écritures pour les nombres jusqu'à **20**. « *On explicite dès ce moment que l'écriture de ces nombres commence toujours par le chiffre « 1 », et qu'à droite on retrouve la suite « 1 », « 2 », « 3 » ... Cette régularité est seulement observée, les enfants n'ont pas encore les outils intellectuels pour la comprendre. Cet objectif sera visé à partir de la période jaune (page 44).* », p. 62 du livre du maître à propos de la suite des écritures chiffrées des nombres de 11 à 19,
- numération parlée en France (« comme nous ») seule, **vingt et au-delà** : « *L'usage de cette file offre aussi la possibilité de consolider la connaissance de la comptine numérique pour ceux qui la connaissent jusqu'à 20 et de l'étendre pour les autres* », rubrique « objectifs », p. 56 du livre du maître.
- champ numérique des nombres **inférieurs à dix ou cinq** pour les autres « *représentations* ».

2ème moment de la première période (première phase de la progression sur la numération) : l'apprentissage des mots d'une numération « régulière », séances p. 26 à 37.
« *Dans la Présentation, on précise que la mise en relation de la comptine régulière, des écritures chiffrées et de la comptine traditionnelle se réalise en 3 phases. Ici commence la première phase.* », p. 68 du livre du maître.
La comptine régulière « comme Tchou » est introduite en parallèle de la suite écrite chiffrée et de la comptine usuelle dans la séance p. 26-27. Dès cette séance est prescrit un travail séparé sur chacune des comptines orales (Furet *« comme Tchou »* et « *comme nous* ») et un lien entre les nombres « *comme Tchou* » et les écritures chiffrées (Jeu du compteur). En particulier, « *On vise donc à ce que les élèves remarquent que, pour écrire tous les nombres qui commencent par « dix », on commence par écrire un « 1 », que pour écrire tous les nombres qui commencent par « deux dix », on commence par écrire un « 2 », etc.[...] tandis que pour le second chiffre, on retrouve toujours la suite 1, 2, 3, 4, 5, 6 ... qui correspond à la partie de la locution qui suit « dix et », « deux dix et » ...[...]Pour le zéro, on pourra faire expliciter que, quand on le note, on n'entend rien d'autre après « dix», « deux dix », « trois dix ».* », p. 69 du livre du maître. Ceci est repris durant ce premier temps de la première phase de la progression sur la numération, avec de surcroît un prolongement du travail entre les différentes « représentations » du premier moment de la première période, par exemple l'association nombres « *comme Perrine* » et écriture chiffrée, séance p. 29. Par ailleurs, il n'est pas prescrit de travailler la suite numérique des écritures chiffrées de manière autonome.
Champs numériques :

- Ecriture chiffrée/ numération régulière « *comme Tchou* » : parlé vers écrit et vice-versa pour les nombres jusqu'à **au moins 41 (quatre dix et un)**, séances p. 26-27, 32, 36,
- écriture chiffrée/numération parlée en France « *comme nous* » : non prescrite explicitement mais de fait en jeu **pour les nombres inférieurs à dix**.

[209] Il s'agit d'un problème arithmétique.

- <u>écriture chiffrée seule</u> : régularités jusqu'à **au moins 41** « *Après le nombre qui s'écrit avec un 1 et un 3, vient celui qui s'écrit avec un 1 et un 4* », p. 69 du livre du maître, séance p. 27.
- <u>numération parlée en France (« comme nous ») seule</u>, jusqu'à **au moins quarante et un** : « *Ce jeu vise à une bonne mémorisation de la comptine numérique traditionnelle. On peut aller jusqu'à « quarante », voire dépasser ce nombre* », à propos du jeu du « *Furet comme nous* », p. 68 du livre du maître, séance p. 26.
- <u>Numération régulière « comme Tchou » seule,</u> le champ numérique n'est pas toujours spécifié, il est d'au moins « deux dix et cinq » dans la séance p. 26-27, et du fait des exercices liées à la numération écrite chiffrée, il est attendu **au moins quatre dix et un**,
- champ numérique des nombres **inférieurs à dix ou cinq** pour les <u>autres « représentations ».</u>

<u>**PERIODE 2 (jaune)** : séances p. 38 à 73</u>

C'est durant cette période qu'est prescrite la deuxième phase de la progression sur la numération, c'est-à-dire celle ayant pour but la correspondance « grapho-phonologique » entre la numération usuelle parlée en France et les écritures chiffrées : « *Ici commence aussi la $2^{ème}$ phase de la progression en numération. Les élèves ont appris la comptine régulière et ont mis en relation cet algorithme verbal avec celui des écritures chiffrées. Au cours de cette séance, les élèves vont également mettre en relation l'oralisation des nombres dans la comptine traditionnelle avec les écritures chiffrées : pour écrire un nombre qui commence par « vingt », on écrit d'abord un « 2 » ; pour écrire un nombre qui commence par « trente », on écrit d'abord un « 3 », etc. Le problème des nombres entre « dix » et « seize » est spécifique du fait d'une relation grapho-phonologique plus opaque (il recevra un traitement spécifique à partir de la séquence page 44 du folio élève).* », p. 80 du livre du maître, à propos de la séance p. 38.
Cette période comporte donc une étude particulière des nombres de onze à seize. Le lien entre la numération parlée usuelle et les écritures chiffrées ne reste pas uniquement « grapho-phonologique » puisque entrent en jeu des groupements de dix, les « *grandes boîtes de Tchou* » et la numération « *comme Tchou* ». Ceci anticipe ainsi, pour ces nombres, la $3^{ème}$ phase de la progression sur la numération. Par ailleurs de nouvelles « *représentations* » interviennent, ainsi que la notion de groupement. C'est pourquoi nous allons indiquer un découpage tenant compte de ces ajouts.

<u>Le lien « comme nous »/« écriture chiffrée</u> » pour les nombres entre **dix-sept (17) et cinquante-neuf (59)**, séances p. 38 à 60
Ce lien d'ordre « grapho-phonologique » est travaillé essentiellement à l'aide de l'exercice « *dictée et lecture comme nous* » : séances p. 38, 42, 43, 50, 60. La description de cet exercice page 80 du livre du maître précise la teneur de ce lien : « *On commence par faire lire « comme nous » tous les nombres de la file numérique à partir de 1 en observant qu'entre 11 et 16 les nombres ne commencent pas par dix (il n'y a donc pas de flèche), que les nombres signalés par une flèche jaune commencent par « vingt » et non par « deux dix », etc. Puis on fait lire « comme nous » dans l'ordre croissant des nombres entourés en gris. La dictée porte sur des nombres fléchés et donc plus grands que 16.* ».

Le lien « *comme nous* »/« *comme Tchou* »/écritures chiffrées pour les nombres de **onze (dix et un, 11) à dix-neuf (dix et neuf, 19)**, séances p. 44 à 73
Nous lisons p. 86 du livre du maître : « *L'apprentissage des nombres de onze à vingt est une étape cruciale du CP : les enfants qui n'apprennent pas les décompositions du type « douze, c'est dix et encore deux » risquent d'avoir des difficultés durables avec ces nombres et, au-delà, avec la compréhension de la numération décimale* ». Le lien entre les nombres « *comme Tchou* » et « *comme nous* » se fait via diverses « *représentations* » : « *doigts, groupes de 10 « comme Dédé », boites de Tchou, groupes de 10 « comme Perrine », billets de 10 euros, groupes de dix quelconques [...].* », p. 86 du livre du maître. En particulier dans la séance p.38, la grande boîte de Tchou comportant dix emplacements est introduite, c'est-à-dire celle composée de deux « petites » boîtes de Tchou (de cinq emplacements) à la file. Nous allons décrire plus précisément le processus qui concerne d'une part les nombres de onze à seize et d'autre part dix-sept, dix-huit et dix-neuf.
Pour les nombres de onze à seize, le processus commence par la séance clé p. 44 : « *Tchou n'est pas présent dans la séquence mais il est important de l'évoquer : s'il dit le nombre après dix, « dix et un », c'est parce que « c'est dix et encore un ». L'usage du mot encore vise à rendre plus explicite le fait que le mot « et » dans « dix et un » a une signification d'ajout. A partir de cette séance, on met en relation l'écriture chiffrée des nombres après 10 avec leur décomposition : si douze s'écrit « 12 » en chiffres, c'est parce que c'est « dix et encore deux » et parce que dans l'écriture « 10 » on a remplacé le 0 par un 2.* », p. 86 du livre du maître. Plus précisément, tout d'abord dans cette séance p. 44, un lien est fait entre « *comme nous* »/« *comme Tchou* » en utilisant les doigts **pour les nombres de onze à treize**. Puis l'écriture chiffrée de chacun des nombres de 11 à 13 est lue « « *comme nous » et est reliée aux doigts puis les élèves sont invités à observer l'écriture « 11 » sur leur fichier et à essayer de comprendre comment elle a été obtenue. Le chiffre « 1 » orange*[210] *est mis en relation avec le fait qu'il a fallu ajouter un doigt aux 10 précédents. On rappelle également que Tchou, lui, dirait : « dix et un ».* ». Le travail est repris pour les nombres 12 et 13. C'est ainsi que les écritures chiffrées des nombres dit « *comme nous* » **onze, douze, treize** sont explicités via les doigts, leur nom « *comme Tchou* » et le matériel Montessori[211]. La séance finit par un lien entre « doigts »/« *comme Tchou* »/« *comme nous* » pour les nombres de **onze à quinze**. Ces liens sont ensuite repris régulièrement **pour les nombre de onze à dix-neuf** jusqu'à la fin de la période, séance p. 73. A signaler l'emploi de groupements de dix « comme Dédé », c'est-à-dire deux constellations cinq du dé, qui interviennent de surcroît séances p. 52, 54, 55, 57, 58, 59. Finalement, une chanson sert à mémoriser l'association entre « *comme nous* » et « *comme Tchou* » séance p. 71.
Pour les nombres de dix-sept à dix-neuf, la même séquence est reprise. Ainsi, la séance de la p. 44 est prescrite p. 49, avec en outre le fait que « *les décompositions s'entendent* », p. 91 du livre du maître. Ensuite, c'est la séance p. 67 qui reprend le lien écriture chiffrée/« *comme nous* »/« *comme Tchou* »/« *groupements de dix comme Dédé* ».

Le lien « comme/nous »/« écriture chiffrée »/« écriture littérale » : séance p. 46 pour les nombres de un à cinq, séance p. 69 pour **les nombres jusqu'à dix**, séances p. 46 à 69 (séquence qui se poursuit en période 3, 4 et 5).

Les groupements, séances 52 à 70 :
Ces groupements sont tout d'abord introduits par des représentations « *comme Dédé* », c'est-à-dire deux constellations du dé de cinq points : « *Page 52, on introduit un nouveau mode de*

[210] Il s'agit de manier le matériel de numération Montessori, constitué d'un carton jaune sur lequel est inscrit « 10 » auquel on superpose sur le « 0 » un carton orange sur lequel est marqué un des chiffres de 1 à 9.
[211] Cf. note ci-dessus.

représentation des nombres au-delà de 10 qui conduit les élèves à dessiner des collections organisées. Ce mode de représentation continue à privilégier la configuration de 5 du dé, mais il permet aussi d'utiliser le groupement de 10. En effet, le « double cinq » incite à ne plus recompter un à un les objets de la collection, mais à amorcer un éventuel comptage au dessus de 10 : « dix, onze, douze » (cette façon s'appelle un surcomptage au-dessus de 10) ou, mieux, à utiliser directement une décomposition : « quatorze, c'est dix et encore quatre ». Encore une fois, il est important d'évoquer la façon dont Tchou dit ces nombres car cela facilite l'accès aux décompositions. Les élèves progressent ainsi dans la structuration des nombres après 10 et avancent vers la compréhension de la numération de position. », p. 94 du livre du maître.

Dans les séances p. 64, 68 et 70, d'autres groupements vont être utilisés, surtout de 2, 3 et 5 : « *L'enseignant s'exprime en disant tantôt 3 groupes de 2, tantôt 3 fois 2. La signification du mot « fois » est explicitée : « 4 fois 2, c'est 1 fois, 2 fois, 3 fois, 4 fois 2 », en pointant les groupes correspondants. [...]. Cette séquence prépare aussi la découverte de la numération à base 10. Dans « J'apprends les maths », en effet, l'expression « groupes de dix » est la plus souvent utilisée pour désigner les dizaines. Dans les séquences pages 96, 98 et 122 folio élèves, le groupement par 10 sera étudié en même temps que ceux par 2 et 5 et les élèves découvriront qu'il conduit à des calculs particulièrement simples : il est plus facile de calculer 5 fois 10 que 5 fois 2 !* », p. 106 du livre du maître. Ainsi les groupements vont non seulement être utilisés pour l'apprentissage de la numération décimale (en mettant en valeur le groupe de dix pour dire ou écrire un nombre via une désignation à l'aide de ces groupements) mais aussi pour amorcer conjointement un travail sur la multiplication.

<u>Une nouvelle « *représentation* » : la monnaie</u>, à partir de la séance p. 58

Elle est utilisée surtout en tant que support pour des exercices arithmétiques : « *Comprendre la monnaie est un objectif à part entière et cela suffirait à justifier que les élèves soient confrontés assez tôt dans l'année à cet objet social. Mais la monnaie a aussi des caractéristiques qui en font un moyen pédagogique remarquable pour l'apprentissage du calcul.* », p. 100 du livre du maître.

<u>**PERIODE 3 (verte)** : séances p. 74 à 99</u>

<u>Le lien « *comme nous* »/« *comme Tchou* »/écritures chiffrées</u> pour les nombres **de vingt à au moins quarante**, séance p. 74-75

La séance clé p. 74-75, concerne les liens autres que « *grapho-phonologiques* » entre les différentes désignations du nombre, écriture chiffrée, « *comme nous* » et *« comme Tchou* ». Dans cette séance se réalise la 3ème phase de la progression annoncée par les auteurs du manuel pour les nombres de vingt à au moins quarante, à travers trois exercices successifs : « *Compteur des nombres comme Perrine* », « *Compteur des nombres sur les doigts* » et « *Dictée de groupes de dix et de uns isolés* ». Les objectifs généraux sont repris dans les prescriptions relatives aux séances en indiquant une manière pratique de les atteindre. Il s'agit de relier les désignations écrites, les désignations parlées usuelles et les désignations « *comme Tchou* » à de nouvelles désignations : « ... groupe de dix et ... points isolés » et « ... groupe de dix et ... encore ... » dans un contexte de désignation d'un nombre de points organisés « *comme Perrine* » puis d'un nombre de doigts (organisés de fait avec les mains). Ceci est inféré de la lecture des objectifs des séances p. 74-75 : « *[...] pour former une collection de « 2 dix et 3 » objets, on peut compter 1 en 1 jusqu'à ce nombre, mais on peut aussi dénombrer des groupes de dix parce que « 2 dix et 3 », c'est « 2 groupes de dix et encore 3 uns ». [...] Dans un tel contexte, le fait que vingt-trois correspond à 2 groupes de dix et encore 3, par exemple, apparaît explicitement sur le dessin de la collection-témoin et cela conduit à réfléchir l'écriture, « 23 », de ce nombre : le premier chiffre dit combien il y a de groupes de dix, le second combien il y a de points « isolés ». Dans cette expression le mot « isolé »*

signifie « qui n'est pas groupé par dix ». Cette troisième façon de dire 23, (2 groupes de dix et encore 3) permet aux élèves de réfléchir les deux précédentes (comme nous et comme Tchou). C'est seulement lors de cette séquence que certains élèves découvrent que « vingt », par exemple, signifie 2 groupes de dix. ». Nous allons résumer la description des trois exercices de cette séance clé p. 74-75 et leurs objectifs, les détails sont donnés en annexe.
En ce qui concerne le « *Compteur des nombres comme Perrine* » et le « *Compteur des nombres sur les doigts* », il est indiqué dans les objectifs : « *L'activité qui permet le mieux de comprendre le rôle du groupement par dix dans notre façon de penser, de dire et d'écrire les nombres est certainement celle du « compteur des nombres ». L'enseignant engendre une suite de collections-témoins de points en ajoutant successivement une nouvelle unité et les élèves doivent produire la suite des écritures et des désignations orales correspondantes.[...]Dans cette séquence, l'activité du compteur est menée successivement avec des groupes de dix de Perrine et avec des doigts.* ». Dans le « *Compteur des nombres comme Perrine* », les élèves doivent écrire le nombre de points qui est signalé par l'enseignant en termes de groupes de dix et points isolés, puis ils doivent l'exprimer « *comme Tchou* » et « *comme nous* ». Dans le « *Compteur des nombres sur les doigts* », les élèves doivent colorier sur des représentations de mains le nombre de doigts indiqué par une écriture chiffrée donnée à l'aide du matériel Montessori (ce nombre est aussi prononcé). Ils sont ensuite interrogés sur la correspondance entre les chiffres de l'écriture et leur production (association entre le nombre de groupes de dix doigts et les doigts qui restent et les chiffres). Le but étant « *[...] la coordination des différents points de vue. Trente-quatre, par exemple, c'est : 34 doigts levés ; 3 groupes de dix doigts levés et encore 4 doigts ; 30 doigts levés et encore 4 doigts.* ».
Le dernier exercice « *Dictée de groupes de dix et de « uns » isolés* » consiste à demander aux élèves de traduire par écrit une désignation de la forme « 3 groupes de dix et trois points isolés », puis de les interroger sur la façon dont ils se disent « *comme nous* » et « *comme Tchou* ».
<u>Renforcement des liens précédents</u>, pour les **nombres jusqu'à 69** (soixante-neuf), séances p.76 à 99
Ce renforcement se fait :

- en diversifiant les contextes et représentations : les grandes boites de Tchou (en file ou non) séance p. 80-83, les paquets de dix gâteaux, bonbons ou images, séance p. 94,
- en y associant des désignations employant le terme « *groupe de dix* » dans les exercices (y compris du type de ceux déjà vus). Par exemple séance p.76 dans l'exercice *« cartons éclairs comme Dédé* » ou séance p. 77 dans la « dictée de nombres ». Il peut aussi s'agir de complexifier certains exercices : « *Dans les consignes, il est précisé que ces activités s'effectuent en avançant sur la suite des nombres parce que dans les activités de haut de pages des séquences suivantes, les élèves l'effectueront en reculant* », p. 116 livre du maître à propos de la séance p. 74-75,
- en comparant les organisations de collections : non organisé/« *grandes boîtes de Tchou* », séance p. 85, « *comme Perrine* »/ « *grandes boîtes de Tchou* », séances p. 86, 87, 88. Ce qui conduit les élèves à former eux mêmes des groupements par dix pour dénombrer, séances p. 84 et 95, ou encore à les utiliser pour calculer, séance p. 96,
- et finalement en étendant le champ numérique abordé qui devient celui des nombres jusqu'à 69 (soixante-neuf) à la séance p. 88.

<u>**PERIODE 4 (bleue)**: séances p. 100 à 123.</u>

Il s'agit d'un <u>renforcement</u> de ce qui a déjà été fait précédemment pour **les nombres inférieurs à 69** (soixante-neuf). Ainsi par exemple dans la séance p. 117, le lien écriture chiffrée/« *comme nous* » est ré-examiné grâce simultanément à des repères « *grapho-phonologiques* » et aux nombres « *comme Tchou* » (liés aux grandes boîtes de Tchou). A

noter qu'ici l'écriture littérale est introduite et participe à renforcer les liens : « *Dès que la plupart des élèves adoptent le fonctionnement par analogie, on peut alors faire comparer les deux planches*[212] *et faire dégager ce qu'elles ont en commun. [..] On les parcourt verticalement et on remarque les analogies orthographiques :* ***tr****ente et* ***tr****ois,* ***qua****rante et* ***qua****tre,* ***cinq****uante et* ***cinq****,* ***s****o****ix****ante et* ***six*** *: le suffixe « ante » dit que ce sont 3, 4, 5, 6 groupes de dix.* », p. 157 du livre du maître.
En outre les écritures chiffrées sont sollicitées pour des calculs en ligne (17+35, séance p. 100), celles-ci devant se faire par des techniques de calcul mental : « *Avant d'enseigner l'addition en colonnes de deux nombres à deux chiffres en fin d'année (pages 144-145 folios élèves), il est crucial d'enseigner le calcul mental de telles additions. En effet, à force d'entraînement, il serait possible d'amener certains élèves à savoir calculer 35+23 en colonnes alors qu'ils n'ont pas encore compris que le chiffre « 3 » de 35 n'a pas la même valeur que le chiffre « 3 » de 23. Ces élèves obtiendraient le même résultat indépendamment des quantités en jeu dans le calcul : certains n'apprendraient jamais à se représenter ces quantités.* », p. 140 du livre du maître. Ces techniques sont précisées : « *Le calcul mental de 32+23, lui, conduit à calculer d'abord « trente + vingt » ou « trente-deux + vingt » (il est naturel de commencer par ce qui influence le plus le résultat, c'est-à-dire les groupes de dix).* », p. 140 du livre du maître. Les représentations sollicités sont précisées : « *Durant cette période bleue, les élèves trouvent le résultat des additions en dessinant les représentations analogiques et organisées en groupe de 10 que sont les nombres « comme Perrine » ou les nombres « comme Tchou » et en formant les éventuels nouveaux groupes de 10 avec les points qu'ils ont dessinés.* », p. 140 du livre du maître.

<u>PERIODE 5 (violette)</u> : séances p. 124 à 152.

Il s'agit d'un <u>renforcement</u> de ce qui a déjà été fait précédemment et d'une extension du champ numérique aux **nombres inférieurs à 100** (cent). Cette extension se fait en deux étapes. Tout d'abord elle concerne les nombres entre 70 et 79 dans la séance p. 126-127. Il est stipulé p. 166 du livre du maître que « *pour savoir comment s'écrit un nombre qui commence par soixante », il faut d'abord s'interroger sur le nombre de groupe de dix qu'il contient : est-ce 6 ou 7* ». Pour trouver ce nombre, une méthode est indiquée : « *Une façon de le découvrir consiste à mettre en relation les oralisations du type « soixante-treize » et le nombre de groupes de dix : « soixante et treize » c'est « soixante et treize », c'est-à-dire 7 groupes de dix (les 6 de soixante et le dix de treize) et 3 unités isolées* », p. 166 du livre du maître. Celle-ci est reliée aux nombres « comme Tchou ».
Ensuite sont abordés les nombres entre 80 et 100 dans la séance p. 134-135, la méthode étant du même ordre que celle décrite ci-dessus puisqu'on essaye de tirer parti d'une signification de la désignation des nombres dans la numération parlée en France (quatre-vingts est reliés à 8 groupes de dix organisés en 4 groupes de 2 dix).
Ici encore l'écriture littérale participe à renforcer les liens.
Par ailleurs, les écritures chiffrées sont sollicitées pour des calculs en colonnes. Le rôle des différentes représentations est précisé : « *Dans la période suivante (violette)*[213]*, ils raisonnent directement sur les écritures chiffrées et n'utilisent les points que pour vérifier.* », p. 140 du livre du maître.

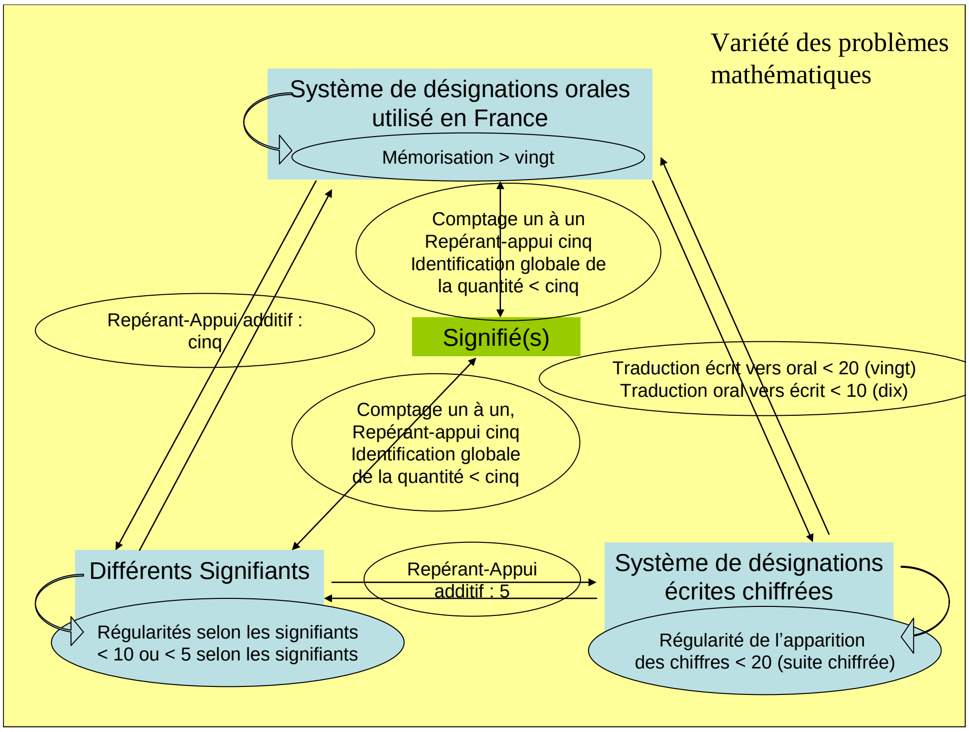
[212] Il s'agit de « *la planche des nombres comme Tchou* », p. 154 et 155 du fichier élève, sur laquelle sont représentés les nombres jusqu'à cent sous forme des grandes boites de Tchou associées à l'écriture chiffrée, et de « *la planche des nombres écrits en lettres* » sur laquelle sont représentés les nombres jusqu'à cent, l'écriture littérale étant associée à l'écriture chiffrée.
[213] C'est-à-dire la période 5 étudiée ici, puisque cet extrait est issu d'objectifs de séances de la période 4.

3.3 Les cheminements cognitifs favorisés par « J'apprends les Maths ».

Dans les indicateurs, nous retrouvons les trois phases annoncées par les auteurs des manuels dans la présentation : lier par des considérations « *grapho-phonologiques* » les nombres « *comme Tchou* » et l'écriture chiffrée, puis l'écriture chiffrée et les nombres « *comme nous* », et enfin relier les deux numérations orales via la numération écrite chiffrée. Dans cette dernière phase, le lien entre la numération parlée en France et la numération « régulière » a tout d'abord évolué pour devenir « *conceptuel* », ce qui entraîne ainsi de considérer par exemple « *quarante-deux* » comme « *4 fois dix et encore deux* ». Cependant nous notons des variations sur la manière de procéder pour les nombres entre dix et vingt, les nombres entre vingt et soixante-neuf et enfin les nombres entre soixante-dix et cent. Nous allons traduire ces prescriptions en termes de cheminements cognitifs favorisés chez les élèves afin d'en tirer des informations sur l'itinéraire cognitif d'enseignement proposé par le manuel.
Nous allons indiquer les étapes importantes cette fois-ci d'après notre cadre théorique et non d'après ce qui est annoncé par les auteurs, sachant que de nombreux exercices sont prescrits afin de renforcer les différents liens, en particulier ici dans le domaine arithmétique. Nous ne détaillons pas le rôle spécifique de ces exercices et les englobons dans un contexte de problèmes posés aux élèves signalé dans nos schémas par le cadre jaune intitulé « variété des problèmes mathématiques ».

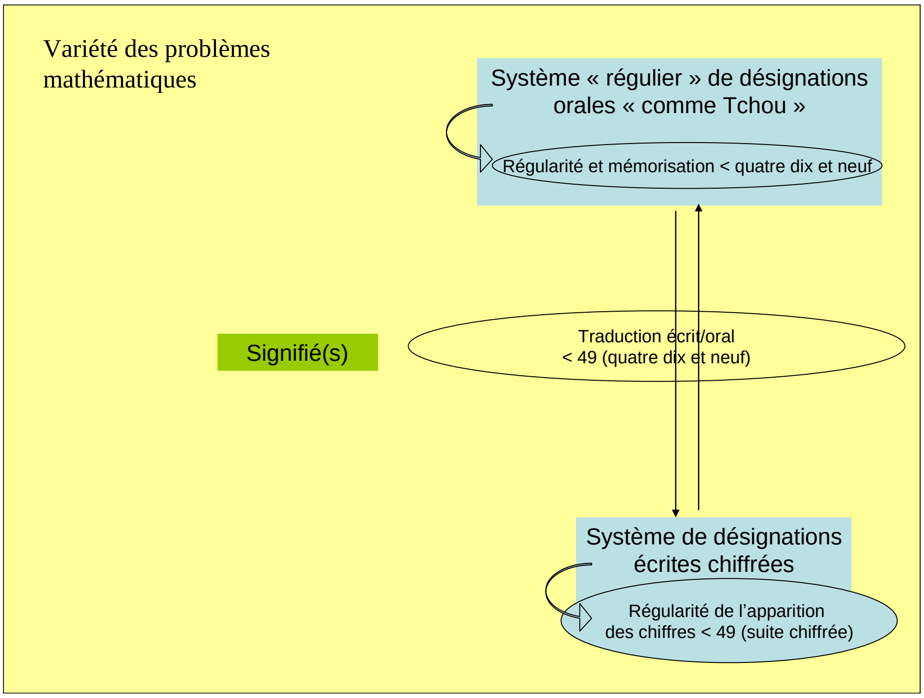
1ère étape :

Dans cette première étape des liens sont établis entre la numération écrite chiffrée et celle parlée en France. Le champ numérique abordé dépend des signifiants en jeu, il est indiqué dans le schéma suivant. Les éléments mis en relief dans les prescriptions sont précisés dans les ovales.



2ème étape : 1ère phase de la progression prescrite.

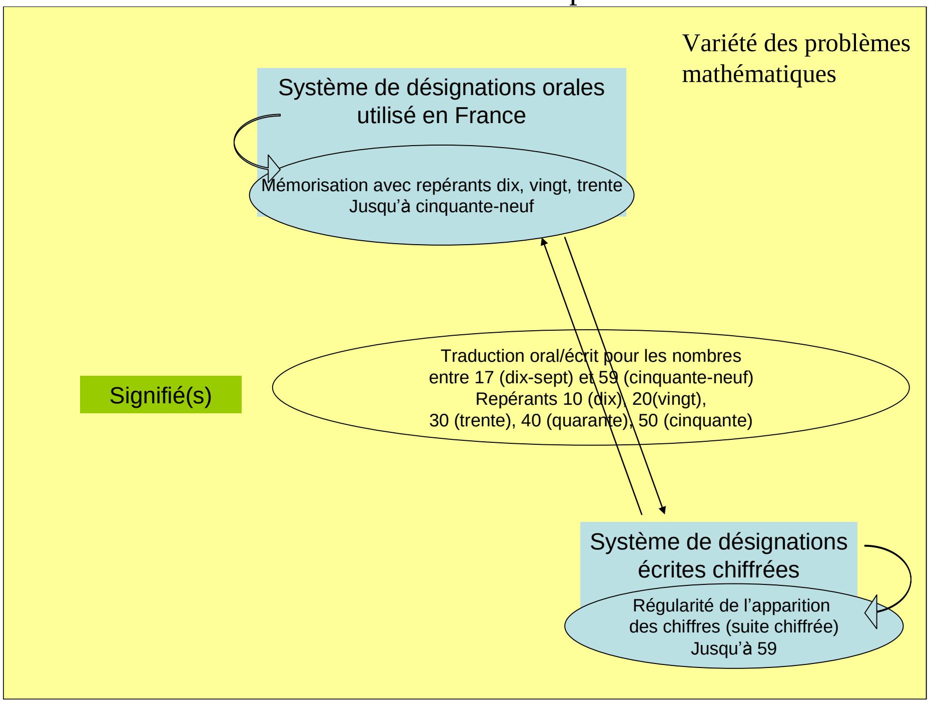
Il s'agit de relier l'écriture chiffrée à la numération orale « *régulière* » « comme Tchou » pour les nombres inférieurs à 49/« quatre dix et neuf ».



Les prescriptions d'un lien de type « *grapho-phonologique* » et non « *conceptuel* » se traduisent dans notre interprétation par l'absence de notification de relations signifié(s)/signifiant, le contexte numérique étant essentiellement évoqué par les signifiants. Autrement dit dans cette étape les désignations ne sont pas mises en relation explicitement avec le cardinal de collections.

3ème étape : 2ème phase de la progression prescrite

Il s'agit de relier l'écriture chiffrée à la numération orale parlée en France « *comme nous* ».

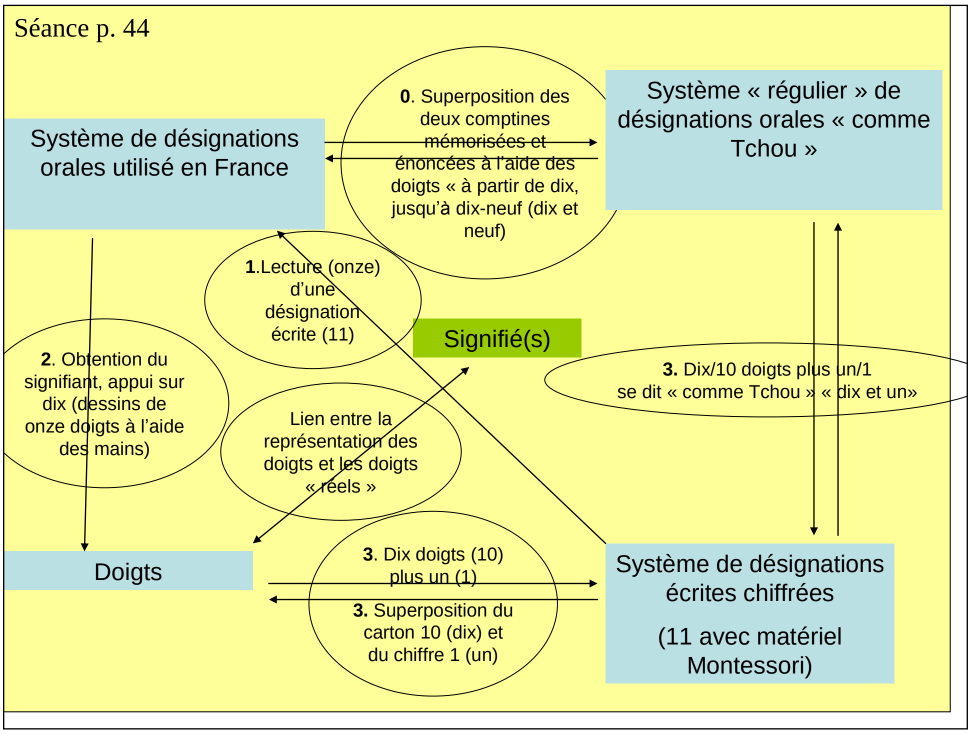


Ici encore, les prescriptions d'un lien de type « *grapho-phonologique* » et non « *conceptuel* » se traduisent dans notre interprétation par l'absence de notification de relation signifié(s)/signifiant, le contexte numérique étant évoqué par les signifiants. Autrement dit dans cette étape les désignations ne sont pas mises en relation explicitement avec le cardinal de collections.

<u>4ème étape : 3ème phase de la progression prescrite, cas des nombres de 10 (dix) à 19 (dix-neuf)</u>

Ici la numération orale « *régulière* » « *comme Tchou* » est reliée à la numération parlée en France « *comme nous* » via l'écriture chiffrée, pour les nombres de dix à dix-neuf (dix et neuf).

Nous donnons le cheminement cognitif prescrit <u>dans la séance clé p. 44</u> qui montre comment est établi ce lien entre les deux numérations, tout en prenant en compte l'existence des cheminements cognitifs prescrits précédemment. Il est illustré avec le nombre 11/onze/dix et un, le processus étant le même pour les nombres de 11/onze/dix un à 16/seize/dix deux. Pour les nombres de dix-sept à vingt, la compréhension de l'écriture chiffrée est en plus étayée par le fait que la décomposition avec appui sur dix s'entend quand on prononce le nombre.

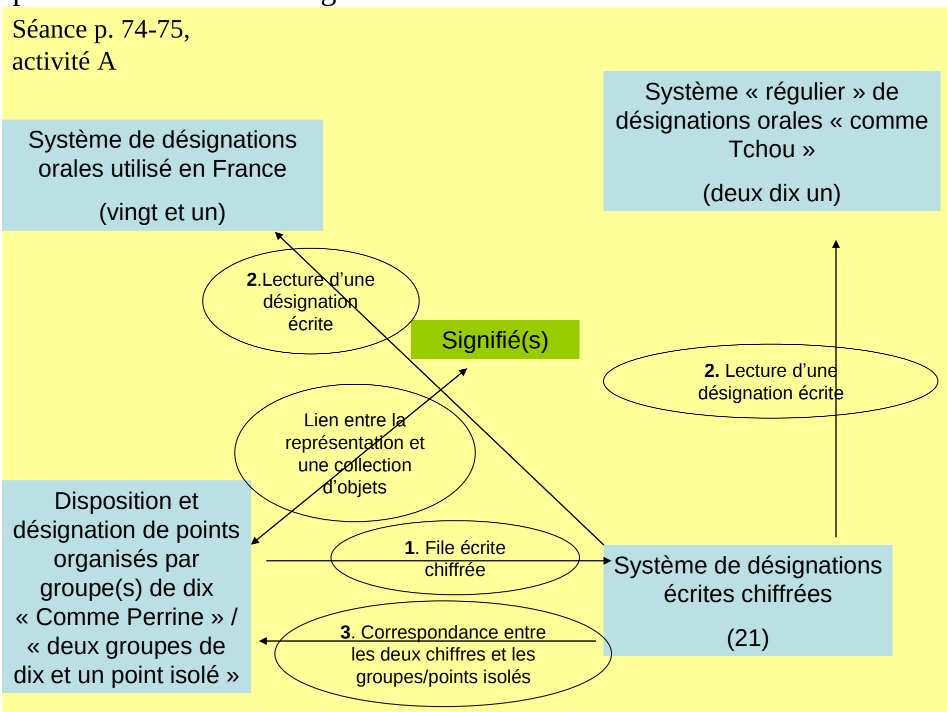


Le lien numéroté 0, se fait de manière autonome au début de la séance. La première question posée est de dessiner un nombre de doigts indiqué par une écriture chiffrée « 11 » qui est lue (les flèches numérotées 1 et 2). La deuxième est d'expliquer l'écriture chiffrée « 11 », ceci correspond aux flèches numérotées 3 dans le schéma ci-dessus. La réponse attendue est un parallèle entre les chiffres de l'écriture et le fait qu'il faut ajouter un (1) à dix doigts (10), la superposition des cartes dans le matériel Montessori (le chiffre 1 sur le 0 du carton 10) et la désignation « *comme Tchou* » « dix (10) et un (1) ». Pour les nombres de dix-sept à dix-neuf, le lien « *grapho-phonologique* » est de plus convoqué : dans dix-sept, on entend dix (10) et sept (7).

Le fait que les nouvelles relations prescrites ne soient plus seulement d'ordre « *grapho-phonologique* » se traduit par la présence d'un lien signifié(s)/signifiant, puisque dans la séance les doigts sont levés un à un[214].

5ème étape : 3ème phase de la progression prescrite, cas des nombres de 20 (vingt) à 69 (soixante-neuf)

Il s'agit comme dans l'étape précédente de relier la numération orale « régulière » « comme Tchou » à la numération orale parlée en France « comme nous » via l'écriture chiffrée, mais cette fois-ci pour les nombres de vingt à soixante-neuf.



La séance clé p. 74-75 est ici illustrée avec le nombre « 21 »/« vingt-et-un »/« deux dix et un »/« deux groupes de dix et un point isolé », le processus étant le même pour les nombres inférieurs à 41.

Le lien numéroté 1 indique que la désignation écrite chiffrée de la représentation « *comme Perrine* » est obtenue grâce à cette suite numérique, puisque ces désignations sont constituées au fur et à mesure à partir d'un groupe de dix en ajoutant un à un des points. Ceci justifie par ailleurs la flèche entre signifiant et signifié(s). Les flèches numérotées 2, correspondent à la deuxième question posée aux élèves. Il s'agit de nommer le nombre écrit en chiffres dans la numération parlée en France et dans la numération « *régulière* », ces liens « *grapho-phonologiques* » ayant été l'enjeu de la phase précédente. La dernière (flèche 3 dans le schéma ci-dessus) est d'expliquer l'écriture chiffrée, la réponse attendue est un parallèle entre les deux chiffres de l'écriture et le fait de voir les dispositions de points « *comme Perrine* » et de les dire en termes de « ... *groupe de dix et ... points isolés* » (les chiffres se retrouvent dans cette désignation).

Le travail pour les nombres jusqu'à soixante-neuf est fait dans les séances suivantes, en prenant appui sur cette séance clé p.74-75 et sur des liens « grapho-phonologiques » pour retrouver dans les nombres parlé dans la numération en France le nombre de groupes de dix et d'unités, ainsi cinquante est relié à cinq, soixante à six (on retrouve dans l'écriture littérale de soixante les lettres six).

[214] Les groupements et la monnaie sont aussi utilisés pour la période 2.

6ème étape : 3ème phase de la progression prescrite, cas des nombres de 70 (soixante-dix) à 99 (quatre-vingt-dix-neuf).

Il s'agit comme dans l'étape précédente de relier la numération orale « *régulière* » à la numération parlée en France via l'écriture chiffrée, mais cette fois-ci pour les nombres de 70 (soixante-dix) à 99 (quatre-vingt-dix-neuf).
Cette extension se fait en deux étapes, il s'agit de retrouver les groupes de dix dans le nom des nombres de la numération parlée en France. Pour les nombres entre 70 (soixante-dix) et 79 (soixante-dix-neuf) il est stipulé : « *Une façon de le découvrir consiste à mettre en relation les oralisations du type « soixante-treize » et le nombre de groupes de dix : « soixante et treize » c'est « soixante et treize », c'est-à-dire 7 groupes de dix (les 6 de soixante et le dix de treize) et 3 unités isolées* », p. 166 du livre du maître, ceci est relié aux nom des nombres de la numération « *régulière* ». Ici encore l'écriture littérale participe à renforcer les liens.

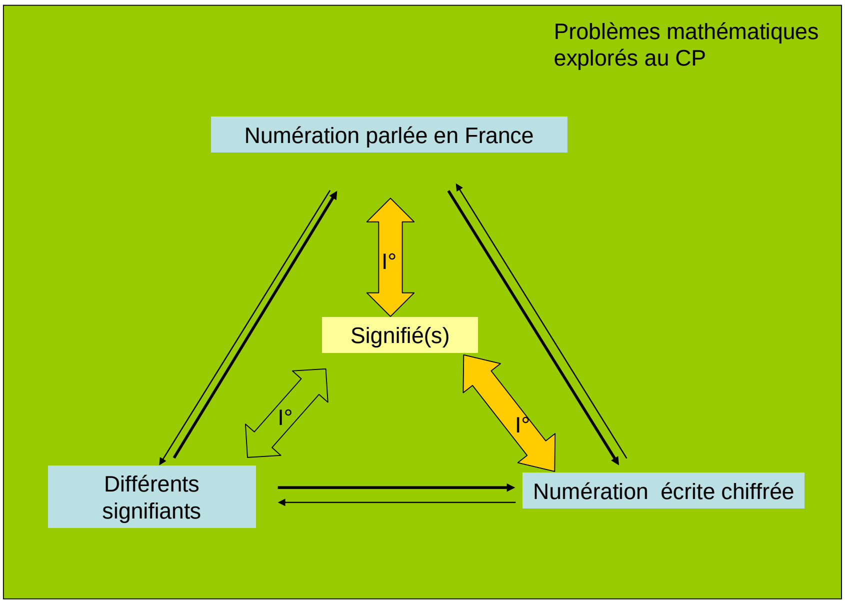
Pour les nombres entre 80 (quatre-vingts) et 100 (cent), la méthode est similaire : quatre-vingts est relié à 8 groupes de dix organisés en 4 groupes de 2 dix (séance p. 134-135).

3.4 L'itinéraire cognitif proposé par « J'apprends les maths avec Tchou »

L'itinéraire proposé par ce manuel est un exemple d'itinéraire cognitif d'enseignement du deuxième type, utilisant une numération orale annexe. Comme pour le manuel précédent, nous allons résumer le processus à l'aide des schémas issus du cadre théorique, schémas qui doivent se comprendre à l'aune de ce cadre. On peut se reporter à ce sujet à la méthodologie générale d'analyse des manuels indiquée paragraphe 1.2 de ce chapitre, ou encore au chapitre 4. Nous allons ensuite le discuter.
Voici les codes que nous utilisons :
I interprétation ordinale stricte
I° interprétation ordinale avec repérant cinq
I' interprétation ordinale avec repérant dix, vingt, trente, etc.
(I')' interprétation arithmétique additive avec appuis dix, vingt, trente, etc.
I'' interprétation arithmétique multiplicative

a. Les étapes de l'itinéraire

Dans une première étape, les écritures chiffrées sont d'abord vues comme une traduction écrite des désignations orales.

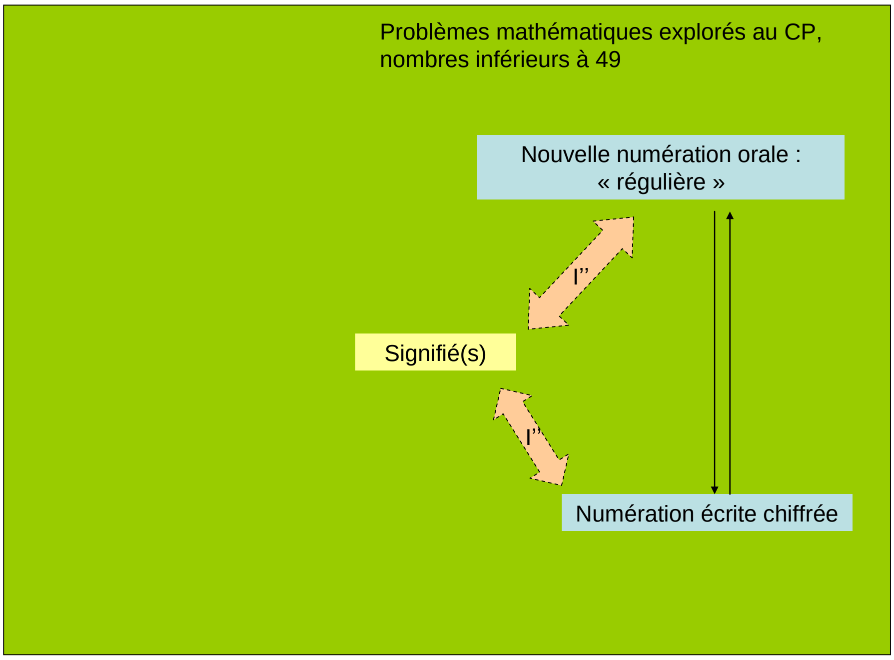


L'interprétation ordinale avec repérant cinq de la numération parlée est ainsi celle des écritures chiffrées. Ceci se voit par exemple dans l'utilisation du signifiant « main », des constellations cinq du dé (et non pas six), ou encore de la « petite boîte de Tchou » composée de cinq emplacements : un prolongement s'opère avec les repérants dix et quinze du fait en particulier d'un comptage par cinq[215]. Cette interprétation de la numération est repérée par la double flèche marquée I°. Nous n'avons pas utilisé le code I' car il signale plus particulièrement l'utilisation de repérants qui sont « entendus » dans les désignations orales : dix, vingt, trente, etc. Or cinq n'est pas « entendu ». Cependant cette interprétation I' est utilisée tout au long de l'année sans qu'elle soit particulièrement travaillée à un moment donné. Les repérants sont néanmoins sollicités pour certains liens « grapho-phonologiques » ou dans certains calculs mentaux (dans ces derniers, il est possible d'y voir aussi des appuis additifs comme nous l'avons déjà souligné).
Les « autres signifiants » ont pour rôle d'aider à la réalisation de cette première étape de l'itinéraire cognitif d'enseignement. Ils sont explicitement prescrits dans « J'apprends les maths avec Tchou ». Le champ numérique concerne les nombres au moins jusqu'à vingt en ce qui concerne une mémorisation de la comptine numérique parlée en France, et il dépend de manière plus spécifique des signifiants en jeu (voir dans le paragraphe précédent les cheminements cognitifs de la première étape).
Les doubles flèches colorées soulignent les résultats visés à la fin de cette première étape, en ce qui concerne l'itinéraire cognitif. Ainsi par exemple les boîtes de Tchou sont des signifiants relais qui n'ont pas vocation à perdurer. Les flèches en trait épais témoignent plus précisément du processus indiqué dans les cheminements cognitifs.

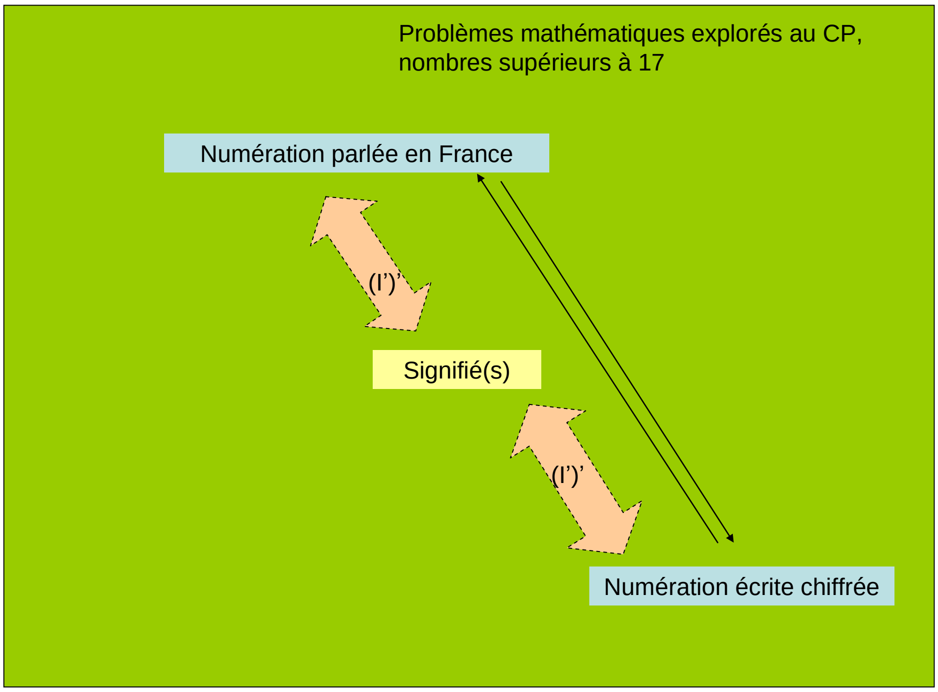
La deuxième étape établit les liens entre l'écriture chiffrée et deux types de numération parlée. La relation avec la numération parlée « *régulière* » (« *comme Tchou* ») met en jeu une interprétation de type arithmétique multiplicative (double flèche I'') et celle avec la

[215] En début d'année il nous semble que les problèmes arithmétiques ne sont pas suffisamment abordés pour en inférer que la numération est employée dans une interprétation arithmétique (additive).

numération parlée en France une interprétation de type arithmétique additive[216] (double flèche (I’)’). Chacune est reliée à l’écriture chiffrée. Nous allons utiliser deux schémas suivant les numérations en jeu et le champ numérique concerné.
D’une part, pour les nombres inférieurs à 49 :



D’autre part, pour les nombres supérieurs à 17/dix-sept et inférieurs à 59.

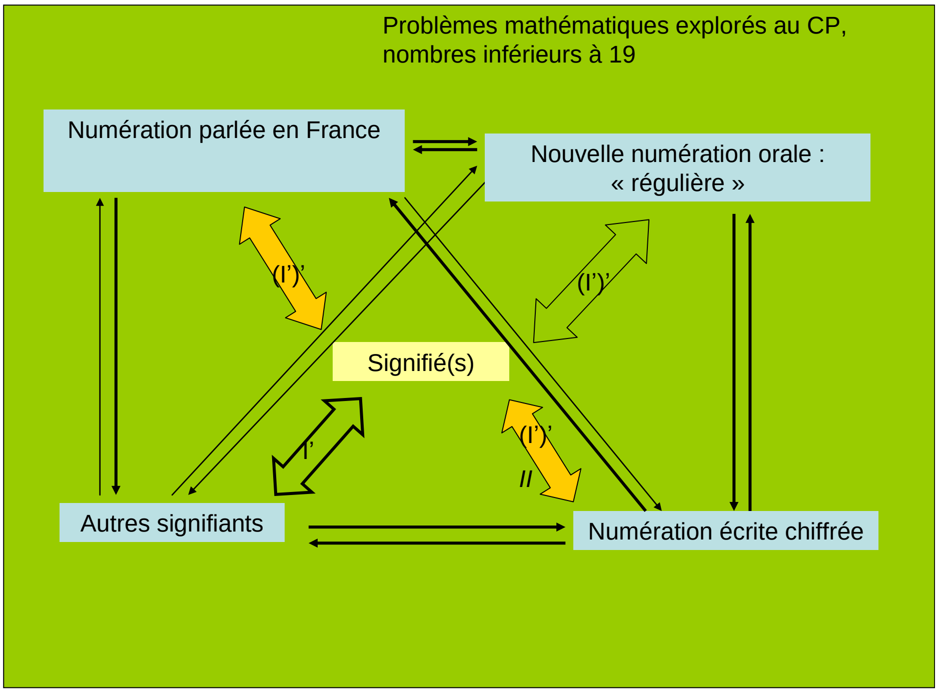


Les « autres signifiants » ne sont pas spécifiés dans les schémas. Les interprétations sont basées sur les régularités des signes successifs des numérations qui sont mises en parallèle,

[216]Nous avons choisi d’interpréter les prescriptions dans ce sens, puisqu’en particulier sont aussi prescrits en parallèle des problèmes de calcul mental qui engagent une telle interprétation arithmétique additive. En ne considérant que la relation formelle qui est prescrite, nous devrions considérer une interprétation ordinale avec repérant.

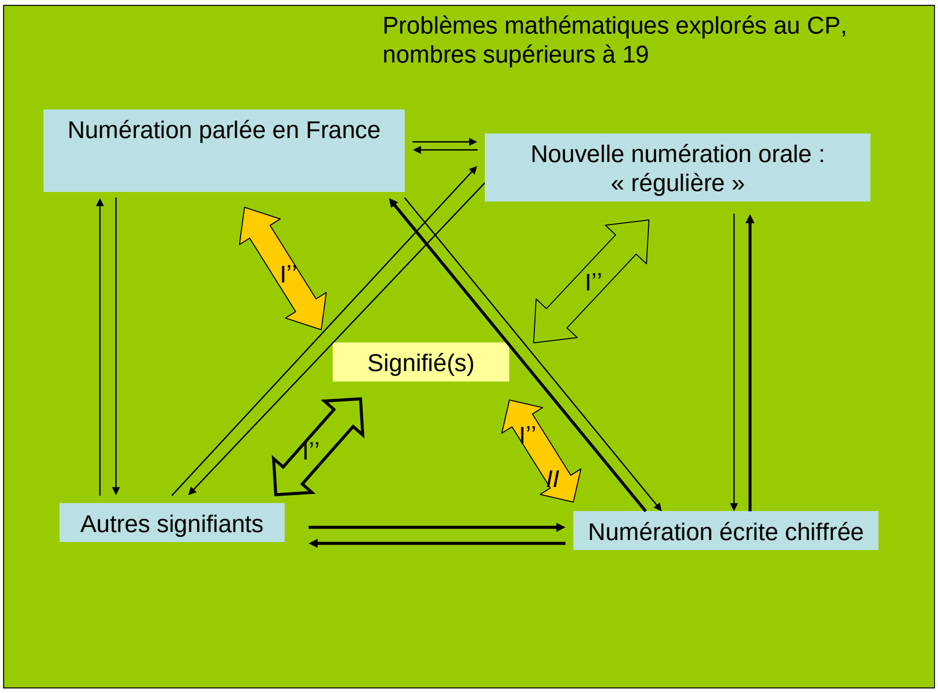
alors que le contexte numérique est essentiellement évoqué du fait de l'emploi de ces numérations. Les élèves savent cependant que les systèmes sémiotiques en jeu sont utilisés pour désigner des nombres. En outre un parallèle initial a été fait entre les trois numérations, la numération parlée en France étant une connaissance ancienne associée aux nombres. Pour indiquer que les interprétations sont avant tout formelles, nous avons mis des flèches en pointillés.
A propos de l'interprétation prescrite I'', d'essence arithmétique multiplicative, signalons que pour les nombres inférieurs à 20, le fait de dire les nombres « dix et ... » dans la nouvelle numération régulière et non pas « un dix et ... » peut engager sur une interprétation arithmétique additive[217].

<u>La troisième étape</u> va mener à l'interprétation visée par le manuel en ce qui concerne la numération écrite chiffrée. Les « autres signifiants », qui ont pour rôle d'aider à la réalisation de l'itinéraire cognitif d'enseignement, vont ici être spécifiés dans les schémas, contrairement aux précédents. Il s'agit de montrer que les prescriptions insistent sur leur participation aux renforcements des interprétations ébauchées précédemment qui, elles, étaient essentiellement basées sur des parallèles entre les representamens des systèmes de numération.
Deux cas sont à distinguer : les nombres inférieurs ou égaux à 19 et ceux supérieurs ou égaux à 20. Dans les deux schémas qui suivent, les doubles flèches colorées indiquent toujours les objectifs de l'étape, les flèches en traits épais ayant pour but de traduire ce qui a été relaté sur les cheminements cognitifs dans les séquences d'introduction.



et

[217] Les liens étant avant tout formels, il n'est pas non plus exclu que l'interprétation puisse être ordinale avec repérants, mais ce n'est pas celle qui est prescrite par les auteurs du manuel.



En ce qui concerne le premier cas, l’interprétation favorisée est arithmétique additive « (I’)’ », du fait en particulier d’un contexte de calcul mental, mais aussi d’indications explicites dans ce sens. Dans le deuxième cas c’est l’interprétation arithmétique multiplicative qui est prescrite. Dans les deux cas, nous avons voulu mettre en relief la multitude des liens entre les différents signifiants, puisque ceux-ci sont explicitement prescrits, cependant l’élaboration initiale des relations entre les trois numérations est différente selon les cas. Elle est toujours abordée par une question concernant une explication de la numération écrite chiffrée (pourquoi écrit-on ainsi un nombre ?), mais les arguments sont sensiblement différents, ce qui se perçoit dans l’utilisation de relais différents tant dans le choix des « autres signifiants » que dans le rôle joué par les deux numérations orales. Ainsi, pour les nombres entre 11 et 19, l’explication est fournie en exploitant les liens avec les doigts (dix doigts plus ...), le matériel Montessori et les nombres dits dans la numération « *comme Tchou* ». (cf. les cheminements donnés ci-avant dans la séance p. 44). Pour les nombres supérieurs à 20, l’explication est fournie en exploitant les liens avec des signifiants constitués par des organisations de points en groupes de dix (« *comme Perrine* ») auxquelles sont associés un signifiant de type « désignation de l’organisation » comme « ... groupes de dix et ... point(s) isolé(s) » mais ici obtenu par comptage (cf. les cheminements donnés ci-avant dans la séance p. 74-75). Ultérieurement ce sont les nombres dits dans la numération régulière « *comme Tchou* » associés aux « *grandes boîtes de Tchou* » qui vont plus particulièrement être prescrits et renforcer ainsi l’interprétation. Les « *grandes boîtes de Tchou* » vont jouer un rôle de matériel de numération de type « *base-ten blocks* » évoqué dans le chapitre 5 concernant l’analyse des recherches sur la numération. Comme dans « Cap Maths », tout ce qui est proposé après les séances clés est susceptible d’aller dans les sens d’une interprétation de référence « *II* », en particulier le calcul posé. C’est pourquoi nous avons mis en italique celle-ci.

b. Discussion

<u>Des interprétations communes aux numérations, mais à moduler selon le champ numérique</u>

Pour les nombres inférieurs à 19, une interprétation arithmétique additive commune à la numération parlée en France et à l’écriture chiffrée est prescrite. Cependant, pour ces nombres

est aussi prescrit le fait de dire « **un** groupe de dix et ... », même si Tchou dit « dix et un », pouvant ainsi orienter aussi vers une interprétation arithmétique multiplicative pour la numération écrite chiffrée des nombres inférieurs à 20.
Pour les nombres supérieurs à 20, est prescrite une interprétation arithmétique multiplicative commune à la numération parlée en France et à l'écriture chiffrée (via la numération « *régulière* » « *comme Tchou* »). Cependant, l'interprétation additive est aussi prescrite pour la numération parlée en France, notamment dans la résolution de problèmes de calcul mental. En conséquence, pour ces nombres supérieurs à 20, dans la numération écrite chiffrée, une interprétation arithmétique additive est aussi attendue par les auteurs du manuel, en particulier pour résoudre certains problèmes. Ceci peut se voir par exemple dans les stratégies préconisées pour les additions de deux nombres, posées avec des écritures chiffrées, mais aussi dans l'emploi des nombres « *comme Perrine* » qui sont liés à un comptage de dix en dix : « dix, vingt, trente, etc.
Ainsi, les auteurs du manuel « J'apprends les maths avec Tchou » prescrivent-ils une disponibilité de différentes interprétations suivant les problèmes, ce qui est indiqué explicitement dans la présentation du livre du maître quand, par exemple dans la comparaison entre la stratégie de comptage de dix en dix (dix, vingt, trente, ...) et celle par dix (un groupe dix, deux groupes de dix, trois groupes de dix, ...).

Des éléments des interprétations introduits progressivement

Par ailleurs, comme dans le manuel « Cap Maths », des choix ont été faits sur les aspects de l'interprétation de l'écriture chiffrée enjeu d'apprentissage et sur les moments dans lesquels ils vont intervenir. Ainsi, comme précédemment, toutes les interprétations se construisent au fur et à mesure et sont (au moins initialement) partielles dans le sens où les prescriptions ne font pas référence à toutes les propriétés indiquées dans la première partie de la thèse. Certaines de ces propriétés sont travaillées ultérieurement à l'introduction de telle ou telle interprétation, certaines ne sont pas évoquées dans le manuel de CP « J'apprends les maths », l'étude de certaines autres est renvoyée aux années futures. Il nous semble que ces choix sont étroitement liés au type d'itinéraire proposé, la numération écrite chiffrée étant associée à une numération orale « régulière ».

Deux rôles pour l'écriture chiffrée dans l'itinéraire proposé.

Pour mesurer l'écart entre l'interprétation de référence de la première partie de la thèse et celle initiée par le manuel nous tenons compte de deux caractéristiques importantes de l'itinéraire cognitif proposé. Tout d'abord, il nous semble que les auteurs du manuel conçoivent la numération décimale, celle utilisant dix comme repérant ou/et appui additif/multiplicatif, en la déclinant sous la forme de trois numérations : la numération parlée en France « *comme nous* » avec ses irrégularités, la numération régulière « *comme Tchou* » et enfin la numération écrite chiffrée. Ensuite, le principe moteur est que la numération écrite chiffrée est associée de manière essentielle à la numération régulière dans un rapport que nous analysons comme privilégiant celui de la correspondance oral/écrit, comme celui qui lie, tout au moins à l'école maternelle et en début de CP, l'écriture chiffrée et la numération parlée en France. Ceci nous semble résumé par le fait, déjà rapporté, qu'il y est différencié une numération constituant « *une suite de mots connue par cœur (comme c'est le cas avec les lettres de l'alphabet)* » des « *numérations modernes* » qui, elles, utilisent « *deux grands principes : un principe de « changement d'unité de compte » (quand une collection est nombreuse, ça va plus vite de compter des mille ou des cents que de compter des unités simples) et un principe d'écriture que nous examinerons dans un second temps »*. Le « *changement d'unité de compte* » est longuement détaillé dans le livre du maître, le principe d'écriture étant évoqué par le passage de l'oral *« comme Tchou* », à l'écriture chiffrée, par exemple de « 4 dix et 2 » à « 42 », dans un contexte mettant en jeu la désignation de type « 4 groupes de dix et 2 points isolés ». Ainsi, il nous semble que le but de l'itinéraire est d'avant tout faire évoluer l'interprétation de la numération parlée en France vers une interprétation multiplicative. L'écriture chiffrée a d'abord été un moyen pour y arriver en permettant de faire le lien entre la numération « régulière » de Tchou (interprétation multiplicative) et celle « comme nous » car elle est présentée comme la version écrite des deux numérations orales. Ensuite, un retour est fait sur cette écriture chiffrée qui est questionnée cette fois-ci en tant que version écrite de numérations interprétées de manière multiplicative. Ce qui amène à donner du sens aux chiffres. Ces derniers traduisent par écrit les coefficients de l'interprétation multiplicative.

Une stratégie mise en avant : le comptage

Les problèmes de comptage constituent le contexte le plus fréquent (en particulier dans la distinction comptage de dix en dix et comptage des groupes de dix). Le qualificatif de « désignation des groupements » n'en rend pas compte, « désignation issue d'un processus de comptage » nous semble plus précis pour qualifier dans ce contexte un signifiant du type « 4 groupes de dix et 2 points isolés ». Ceci nous renvoie à la distinction entre une numération orale qui peut être associée ou non à un comptage, et un principe de comptage « en unités » qui n'est pas nécessairement associé à un système sémiotique de désignation ayant une syntaxe propre et étudiée en elle-même (lien signifiant/signifiant). La numération parlée en France est un tel système sémiotique, que l'on peut analyser en termes de régularités et irrégularités (mais qui elle n'est pas forcément associée à un comptage). La numération régulière « comme Tchou » est associée avec le comptage mais uniquement dans un second temps (via en particulier des désignations issues d'un processus de comptage), puisque cette dernière a été introduite initialement d'une manière formelle, parallèlement aux deux autres numérations, parlée en France et écrite chiffrée. A contrario, les désignations du résultat d'un comptage employées par le manuel ne se constituent pas en une numération, puisqu'elles ne sont pas étudiées en elles-mêmes ni utilisées de manière systématique (il existe en outre des variations pour rendre compte verbalement du résultat d'un comptage, en particulier dues au contexte). Ainsi, même si sont présents et prescrits des problèmes arithmétiques (et en particulier des calculs mentaux), les séances qui concernent plus particulièrement l'itinéraire cognitif d'enseignement de la numération écrite chiffrée ont pour contexte le comptage ou des relations formelles. Ce contexte de comptage, même s'il est « en unités » ou « comme Tchou » pose la question de la place accordée à des éléments de l'interprétation de référence de la numération parlée en France

L'écart entre l'interprétation proposée par le manuel et celle de référence

Dans l'écart entre l'interprétation proposée par le manuel et celle de référence de la première partie de la thèse nous retrouvons des points similaires à ceux de « Cap Math », mais qui sont à moduler en tenant compte des deux caractéristiques signalées. Nous n'avons pas vu de questionnement spécifique sur la position des chiffres. Cette position est une conséquence logique d'une traduction de l'ordre d'énonciation de signifiants, provenant de la numération régulière introduite de manière conventionnelle ou bien d'expressions utilisant le terme de « groupes de dix ». Elle provient aussi d'une distinction entre les nombres désignés par des écritures chiffrées différentes, visible par exemple dans l'exploration de la file numérique chiffrée. Le signe « 0 » dit « zéro » est introduit pour indiquer le résultat de la comparaison entre deux collections de mêmes cardinaux. Il est ensuite associé au fait d'indiquer qu'il n'y a « rien qui reste » après certains comptages, puisqu'il est question d'expliquer sa présence dans les écritures chiffrées, comme 20 par exemple. Il n'est pas prescrit explicitement de revenir sur la maximalité des groupements de dix dans l'organisation d'une collection, ni le fait de choisir dix comme cardinal du groupement ou même de choisir le même cardinal pour chaque groupement. Tous ces choix sont des conséquences du comptage basé sur dix et

légitimé par les régularités des numérations (étudiées spécifiquement dans un premier temps). Comme dans le manuel précédent, ils sont légitimés de fait, puisqu'ils ont permis une interprétation *a posteriori* pertinente (car fonctionnelle) de l'écriture chiffrée. Il n'est pas prévu dans le manuel de revenir sur ces choix[218]. Il faut signaler cependant pour ce manuel une utilisation de groupes de cardinaux différents de dix pour compter (en particulier de deux et de cinq). Le fait de prendre toujours le même type de groupe dans un même comptage (et de ne pas mélanger par exemples les groupes de deux et de cinq) n'est pas questionné, mais le choix du type de groupe (deux, cinq ou dix) est mis en parallèle avec la numération : le comptage utilisant dix amène plus facilement à la désignation du cardinal[219]. La notion de base qui est propre à un type d'échelle de numération (ce qui se traduit sur une collection par un choix d'organisation utilisant les mêmes types de groupements et par un procédé spécifique de passage aux groupements d'ordre supérieur) n'est pas questionnée. Finalement, la graphie des chiffres et les différents choix possibles pour coder l'organisation d'une collection (par exemple XXXII ou 3X 2I, au lieu de 32), ne sont pas non plus étudiés
Signalons finalement que la numération décimale doit être comprise grâce à la suite déjà connue des écritures chiffrées, c'est-à-dire des signes vers les principes, et non l'inverse, des principes vers les signes, le titre d'un des paragraphes de la p. 36 de la présentation du livre du maître l'atteste : « *Réfléchir la suite des écritures chiffrées pour comprendre la numération décimale* ».

4. Conclusion et perspectives pour la troisième partie

Nous ne reprenons pas tous les éléments qui ont été dégagés précédemment. Dans un premier paragraphe « bilan » (§4.1), nous mettons en relief certains points qui permettent de répondre plus particulièrement aux questions que nous nous sommes posées. Ceci permet d'en dégager d'autres en ce qui concerne les déroulements en classe (§4.2), objet de la troisième partie de la thèse.

4.1 Bilan

Nous reprenons les questions initiales de manière synthétiques.
En ce qui concerne les différentes propriétés des interprétations qui interviennent, des points communs qui ont été signalés entre les deux manuels. Nous pouvons distinguer les séances clés qui amorcent le changement d'interprétation de l'écriture chiffrée de celles qui permettent de la renforcer par la suite ou de la préparer. Certains choix sont contraints par le type d'itinéraire dans lequel s'inscrit chacun des manuels, d'autres sont propres aux auteurs, des auteurs qui doivent en outre suivre les prescriptions des programmes scolaires. Ainsi différents éléments issus d'une interprétation multiplicative interviennent alors que d'autres viennent compléter l'interprétation proposée par le manuel. Nous allons ici mettre en relief les choix opérés et les mettre en perspective avec l'interprétation de référence de l'écriture chiffrée[220].

[218] Ceci est peut-être une conséquence du type d'itinéraire proposé.
[219] Il n'est néanmoins pas facile de questionner la maximalité des groupes (de dix). Elle peut aller « de soi » puisqu'il n'y a pas de raison d'arrêter un comptage de dix en dix avant la fin, d'autant qu'il est perçu comme efficace car menant à la désignation parlée en France du cardinal (voir les procédés de mise en signes du chapitre 3).
[220] Rappelons que le mot référence est employée car c'est l'interprétation que nous avons dégagées dans la première partie de la thèse et qui constitue ainsi un outil pour notre recherche. En particulier, elle n'est pas une référence institutionnelle. C'est d'une certaine manière un écart entre les propositions des manuels et l'interprétation de référence que nous estimons ici.

Dans les itinéraires cognitifs de type 1 et 2, l'écriture chiffrée est tout d'abord perçue comme la forme écrite des désignations orales, que ce soit la numération parlée en France ou une numération annexe. Le « moteur » des itinéraires est l'utilisation de ces numérations orales dans une interprétation multiplicative. Ainsi, ces écritures chiffrées sont des « objets » à décoder. La question est par exemple pourquoi un nombre dit « trente-six » est écrit « 36 » ? La réponse sollicite des éléments d'une interprétation multiplicative, c'est-à-dire va au-delà de liens formels de type trente/3 et six/6. Dans les séances clés, l'itinéraire spécifique proposé par chacun des deux manuels utilise une organisation de collection, mais aucun des deux ne questionne cette organisation. En conséquence ni la maximalité des groupements ni le fait de grouper par dix n'est en jeu, c'est-à-dire des propriétés relatives à la première partie de l'interprétant de l'interprétation de référence[221]. Ceci nous semble une conséquence du type d'itinéraire dans lequel s'inscrit le manuel plus que d'un choix spécifique des auteurs à l'intérieur de ce type. En effet, dans les désignations orales sur lesquelles il s'appuie, que ce soit l'itinéraire de type 1 ou celui de type 2, il s'agit plus de retrouver des régularités (trouver une certaine rationalité dans le système qui est employé) que de comprendre pourquoi un tel code est utilisé et comment il a été élaboré. Ainsi, ces désignations ne sont pas questionnées *a priori*.
En outre, dans les manuels, la place des chiffres ainsi que le signe « 0 » ne sont pas présentés comme des choix de mise en signes, comme nous l'avons indiqué dans la description de la deuxième partie de l'interprétation de référence. Il nous semble pourtant possible de discuter de ces choix dans l'étude du passage d'une désignation des groupements à l'écriture chiffrée. Le fait de décrypter l'écriture chiffrée et non d'élaborer le code peut expliquer que cette marge de manœuvre n'ait pas été investie.

Ce sont les problèmes de dénombrement par comptage qui sont proposés aux élèves dans « Cap Maths » dans les séances clés. Ainsi, une stratégie de type « organiser/configurer pour désigner » (paragraphe 3.1 du chapitre 4) n'est pas en jeu. Elle permettrait de distinguer l'interprétation multiplicative de l'interprétation de référence. Dans « J'apprends les maths avec Tchou », les nombres « *comme Perrine* » sont des organisations qui, lorsqu'elles sont élaborées par les élèves pour obtenir une écriture chiffrée, peuvent leur permettre de convoquer cette stratégie. Il ne nous semble pas que ce choix ait été fait car ces organisations sont utilisées le plus souvent comme un signifiant du nombre *a priori*, comme les constellations du dé, et à mettre en rapport avec d'autres signifiants. En d'autres termes leur constitution n'est pas questionnée. Ils n'apparaissent pas dans un contexte problématique, au sens de Brousseau, c'est Perrine qui les utilise et les élèves doivent comprendre leur logique. Ces choix nous semblent plus le fait des auteurs et moins du type d'itinéraire.

De manière générale, après les séances clés, relativement peu de problèmes relevant de la structure multiplicative sont proposés aux élèves. Ils permettraient d'utiliser les numérations dans une interprétation arithmétiques multiplicatives. Beaucoup plus de problèmes concernent la structure additive et mettent en jeu des dénombrements. Ceci est une prescription des programmes. Dans ce sens, le mot « arithmétique » dans « interprétation arithmétique multiplicative » ne traduit pas la réalité du CP.
Signalons cependant que lorsque des additions sont posées avec les écritures chiffrées, notamment celles nécessitants des retenues, une interprétation multiplicative est susceptible d'être convoquée indépendamment des numérations orales. Certaines propriétés utilisées pour

[221] A noter que les propriétés concernant les groupements de groupements (toujours de même cardinal) ne sont pas non plus questionnées. Ceci est impossible pour des nombres inférieurs à cent dès que dix a été fixé comme base, ce qui semble une conséquence de l'utilisation de numérations orales dont le premier appui multiplicatif est dix.

des collections, comme celles citées par Bednarz et Janvier[222], dans la mesure où elles sont transférées aux techniques opératoires, peuvent être considérées comme du ressort d'une interprétation de référence. Il nous semble néanmoins que les désignations chiffrées gardent le plus souvent leur statut de traduction écrite de l'oral, quelle que soit l'interprétation de la numération parlée qui est convoquée. Ceci peut être vu comme une conséquence du type d'itinéraire, mais cette relation est plus ou moins à l'œuvre selon les propositions des manuels. Ceci est à nuancer en particulier selon les nombres en jeu et les « autres » signifiants convoqués.

Ainsi, en ce qui concerne le champ numérique, l'interprétation favorisée pour les écritures chiffrées des nombres inférieurs à vingt, et plus encore à seize, nous semble être l'ordinale stricte. Ceci nous semble une conséquence du fait, entre autre, que le repérant « dix » n'est pas entendu dans la numération parlée en France pour les nombres de onze à seize. Ceci est sensible même pour « J'apprends les maths » qui utilise pourtant une numération annexe « régulière ». Ainsi, il nous semble que ce qui est développé pour ces nombres ce sont plutôt des habiletés de calculs (vers des résultats à mémoriser, comme ceux des tables d'addition), avec les appuis « dix » ou « cinq », liées en particulier aux doigts des mains. Ainsi l'écriture chiffrée est peu mobilisée dans ce travail, mis à part dans sa fonction de trace écrite de ce qui est dit ou/et à retenir. En conséquence, « 10 » est une écriture qui n'est pas ou peu questionnée. Une rupture ce fait aussi pour les écritures chiffrées des nombres au-delà de 69 qui fait écho aux irrégularités spécifiques à la numération parlée en France. Alors qu'un sens a été donné aux chiffres après les séances clés, les écritures chiffrées sont étudiées successivement dans une progression qui suit celle de l'apprentissage de leur lecture dans la numération parlée. Tout se passe comme s'il fallait savoir dire les écritures chiffrées dans la langue française pour les utiliser. *A priori,* elles peuvent pourtant être employées de manière autonome. Ce choix est à questionner, car il ne nous semble pas favoriser des aspects propres à l'interprétation de référence. Autrement dit, il installe l'écriture chiffrée comme la forme écrite des désignations parlées en France des nombres, sans en dégager les spécificités.

Finalement, nous notons aussi dans les manuels des utilisations diverses de signifiants « relais » suivant différents paramètres : le degré de familiarité et d'utilisation dans des contextes variés, leur « forme » (dessins, chiffres, oraux, « manipulables »), leur constitution ou non en système de numération, leur lien avec les collections (comptage ou désignation des groupements). Ils sont choisis pour aider l'élève à réaliser les différentes étapes de l'itinéraire. Certains sont communs aux deux manuels, comme les doigts des mains, les écritures additives et les « désignations des groupements ». Ils semblent provenir d'habitudes culturelles et institutionnelles favorisées par des potentialités anthropomorphiques. D'autres sont plus spécifiques à un manuel, comme les boîtes de Tchou ou les nombres comme Perrine et Dédé, ces derniers apparaissent comme des choix propres aux auteurs et non caractéristiques d'un itinéraire. Leur utilisation « à bon escient » semble constituer des aides pour l'enseignement dans la réalisation de l'itinéraire cognitif d'enseignement proposé. Cependant, des questions se posent sur ce qu'ils adviennent en classe. Ils sont en effet tous susceptibles d'être utilisés dans une interprétation ordinale (avec repérants) ou arithmétique additive, bien qu'ils doivent servir pour un passage à une interprétation multiplicative. Ceci fait le lien avec le paragraphe suivant.

---

[222] Faire des groupes, les défaire, passer à un groupement supérieur, c'est-à-dire faire des groupements de groupements, échanger un groupement d'un certain ordre en une unité de l'ordre supérieur et inversement, coder, c'est-à-dire passer d'une collection réorganisée en groupements à une représentation du nombre, décoder, découvrir les lois régissant les groupements successifs.

4.2 Vers de nouvelles questions

Dans cette deuxième partie de la thèse, grâce à la théorie des champs conceptuels, nous avons fait le lien entre les interprétations de la première partie et un sujet qui utilise les numérations. Nous avons défini la notion de cheminement cognitif au niveau de celui qui résout un problème. Dans le chapitre 4, sont indiqués ceux qui sont particulièrement à l'œuvre dans les premiers problèmes rencontrés concernant les nombres. Regarder l'enseignement de la numération du point de vue des interprétations nous a amené à la notion d'itinéraire cognitif d'enseignement qui est un reflet à ce niveau des cheminements cognitifs. Ainsi avons-nous pu construire une problématique d'enseignement en reconsidérant la « non-congruence » à partir de laquelle a été formulé notre problème initial. L'étude des recherches antérieures nous a permis de voir comment des réponses étaient apportées à cette problématique d'enseignement. Trois types d'itinéraire ont été définis dans le chapitre 5, et l'analyse de deux manuels a précisé comment ils étaient utilisés dans ce premier niveau de transposition vers la classe.

Le bilan précédent a ouvert un champ de questionnement. Le projet de la thèse est de comprendre les déroulements en classe. Ainsi, allons-nous nous intéresser aux questions qui concernent les écueils spécifiques que pose la multiplicité des interprétations possibles dans le déroulement des séances d'apprentissages dans une classe de CP.

En effet, nous avons montré que les deux manuels utilisent des séquences clés dans lesquelles les chiffres de l'écriture chiffrée sont distingués et mis en relation avec un signifiant de type « désignations des groupements ». Auparavant, pour « Cap Maths », l'écriture chiffrée est la version écrite des désignations parlées et des liens ont été faits pour permettre de « lire » ces écritures chiffrées. Par exemple le « 3 » de « 34 » est relié à « la famille des trente », c'est-à-dire à tous les nombres (à deux chiffres) commençant par « 3 », ce qui favorise une interprétation ordinale avec repérants. Dans « J'apprends les maths avec Tchou », un lien formel a été établi en outre avec les mots d'une numération « régulière ». Il reste que les mêmes signifiants sont susceptibles d'être utilisés dans une même séance *a priori* dans des interprétations différentes : des anciennes pour répondre au moins à une partie des questions posées et une nouvelle qui est enjeu d'apprentissage. En effet, dans les séances clés, « Cap Math » emploie des désignations des groupements dans un contexte de dénombrement et « J'apprends les maths avec Tchou » utilise des désignations d'une suite de collections organisées en groupements (déjà envisagées comme signifiant du nombre, les nombres « comme Perrine ») obtenues au fur et à mesure en ajoutant un. Ceci favorise les interprétations arithmétiques additives ou/et ordinales (avec repérants), alors même que l'interprétation multiplicative est visée. Au-delà de ces séquences, le fait que les mêmes signes (oraux et écrits) renvoient à des interprétations différentes pose un problème spécifique à l'enseignement de la numération, quel que soit l'itinéraire. Quand les écritures chiffrées sont dites (pour soi ou pour les autres), la désignation parlée en langue maternelle est toujours susceptible de faire référence à une interprétation ordinale. Ainsi, dans sa gestion il est possible (probable ?) que l'enseignant convoque chez les élèves des interprétations qui font potentiellement obstacle à l'apprentissage visé. Ceci est d'autant plus sensible que les signifiants « relais » que nous avons croisés dans nos analyses peuvent eux aussi être interprétés de différentes manières. La troisième partie aborde ce problème en classe. Nous allons y préciser nos questions.

TROISIEME PARTIE

Analyse de réalisations en classe

CHAPITRE VII
Compléments théoriques et méthodologiques

Introduction

Dans la première partie de la thèse, nous avons dégagé les mathématiques des numérations avec la notion d'interprétation. Dans la deuxième partie, nous nous sommes intéressé au sujet, ce qui a permis d'établir une problématique en termes d'itinéraire cognitif d'enseignement. Grâce à une analyse des recherches antérieures nous avons mis en évidence des types d'itinéraires cognitifs puis, grâce à une étude au niveau des manuels, nous avons précisé ces itinéraires pour une progression en classe. Compte tenu de l'orientation du travail, il s'agit maintenant d'apprécier le rôle que joue un ensemble de paramètres non encore étudiés dans les déroulements en classe, paramètres à mettre en relation avec les itinéraires cognitifs « effectivement » empruntés par une classe de CP.
Nous allons tout d'abord rappeler les résultats déjà obtenus pour préciser les questions que nous nous posons dans cette troisième partie (§1). Ensuite nous complétons notre cadre théorique pour permettre d'y répondre (§2). Nous terminons ce chapitre en présentant notre méthodologie (§3).

1. Position du problème étudié

1.1 Les questions

a. Rappels sur les résultats antérieurs

Les liens entre stratégies et interprétations[223]

L'écriture chiffrée est utilisée à la maternelle principalement en tant que forme écrite de la numération parlée en France, celle-ci étant perçue via une interprétation ordinale (avec repérants ou non) et éventuellement, et dans une moindre mesure, via une interprétation arithmétique additive. En CP, la numération chiffrée amorce une évolution de cette interprétation ordinale (avec repérants) vers une interprétation de référence[224]. En outre, la numération parlée en France est susceptible d'y être utilisée dans une interprétation (arithmétique) multiplicative quand elle est reliée aux écritures chiffrées interprétées ainsi. Quel que soit le type d'itinéraire envisagé, l'apprentissage visé est la disponibilité chez les élèves de différents cheminements cognitifs pour résoudre des problèmes. Ils mettent en jeu les trois (ou quatre) interprétations de la numération parlée en France ainsi que l'interprétation de référence de la numération écrite chiffrée. Comme les désignations sont susceptibles de concerner les mêmes problèmes relatifs aux nombres, des relations se créent. Pour les rappeler, reprenons l'exemple donné dans le chapitre 4 concernant la comparaison de deux collections de points figurés sur une feuille, exemple qui nous a servi à discuter de la trace de telle ou telle interprétation dans les stratégies[225]. Une première stratégie consiste en un comptage de un en un. Elle est reliée à une interprétation ordinale, avec éventuellement l'utilisation de repérants. Dans une deuxième stratégie, il s'agit d'ajouts successifs de « dix »,

[223] Les interprétations ont été élaborées dans la première partie de la thèse et sont en jeu dans les itinéraires cognitifs d'enseignement utilisés dans la deuxième partie.
[224] C'est ainsi que nous avons analysé les textes officiels, mais nous avons indiqué que tous les aspects ne sont pas nécessairement en jeu. *A minima* il s'agit que les chiffres soient distingués et associés aux notions de dizaine et d'unité, en particulier pour donner du sens aux opérations posées.
[225] La relation stratégie/interprétation a été discutée dans le chapitre 4. L'observateur, chercheur ou enseignant, ne peut pas relier d'une manière automatique l'utilisation de telle stratégie à telle interprétation, bien que la notion d'interprétation d'une numération ait été définie dans la première partie de notre thèse. C'est en particulier ce qui nous a amené à définir les notions de cheminement cognitif (potentiel) pour les élèves et d'itinéraire cognitif d'enseignement.

elle peut mettre en jeu une interprétation additive. Un comptage de dizaines peut engager des propriétés relatives à une interprétation multiplicative, et enfin un codage à l'aide de chiffres d'une certaine organisation des collections met en jeu des propriétés de l'interprétation de référence[226].

Des utilisations différentes des interprétations selon l'itinéraire cognitif d'enseignement

Les différentes interprétations que nous avons dégagées nous ont permis d'analyser les recherches et les manuels en termes d'itinéraire cognitif d'enseignement. Pour le premier itinéraire, l'évolution de l'interprétation de l'écriture chiffrée dérive de celle de la numération parlée en France en une interprétation multiplicative. Pour le deuxième, une numération régulière, c'est-à-dire dont la forme met en évidence une interprétation multiplicative, est utilisée comme relais. Dans le troisième, l'évolution de l'interprétation de l'écriture chiffrée se fait tout d'abord sans recours à un système de numération oral[227], ensuite les liens se font avec la numération parlée en France.

Le projet de la thèse

Les questions qui se posent alors sont multiples. Il pourrait s'agir de préciser encore les itinéraires cognitifs, savoir ce qu'il advient en classe pour chacun d'entre eux, ou un seul plus particulièrement. Nous pourrions nous interroger ainsi sur le décalage entre les prescriptions du manuel (prises ici comme tâche prescrite à l'enseignant) et la tâche redéfinie puis effective de l'enseignant, en considérant son activité. Nous pourrions aussi nous tourner vers les élèves en analysant les stratégies mises en place suivant les différentes étapes d'un itinéraire, ou bien encore vers les enseignants, soit en analysant la diversité des pratiques liées à l'apprentissage de la numération, soit en étudiant l'influence de ce contenu sur la pratique d'un enseignant.
Notre projet est de comprendre comment les différentes interprétations vont intervenir en classe, et d'une certaine manière, quel que soit l'itinéraire, quelle que soit la classe et quel que soit l'enseignant. Nous voulons qu'il soit possible d'en retirer des enseignements pour dégager de nouvelles pistes qu'il resterait alors à étudier. Il nous semble alors qu'un travail préparatoire doit être entrepris concernant les interprétations au niveau de la classe cette fois-ci. Ceci justifie l'orientation du paragraphe suivant.

b. Conséquences en classe : des signes identiques pour des interprétations différentes

Les mêmes désignations sont susceptibles de faire référence à des interprétations différentes à des moments différents selon les itinéraires. En particulier, l'écriture chiffrée « prend place » auprès des désignations parlées en France de différentes manières. Le problème pour l'enseignement est de convoquer en classe ces différentes interprétations à « bon escient » et au bon moment dans l'itinéraire. La difficulté que nous avons signalée est qu'un même signifiant peut renvoyer à différentes interprétations selon le « contexte » d'utilisation, mais aussi selon les connaissances des intervenants, ici l'élève (chacun d'entre eux) et l'enseignant. Ceci rend difficile le « contrôle » de l'usage des différentes interprétations, d'autant que des stratégies qui apparaissent comme identiques pour un observateur peuvent sous-tendre des interprétations différentes. Ceci dérive en particulier du fait que les élèves (et l'enseignant) utilisent la numération parlée comme un langage. Les propriétés mathématiques sous-jacentes ne sont pas explicites. Ainsi, l'écriture chiffrée garde parfois sa place ancienne par rapport à la

[226] Dans la notion de cheminement cognitif, et dans les exemples donnés dans le chapitre 4, nous avons mis en relief la complexité des stratégies potentiellement utilisables, certaines ne faisant pas nécessairement appel aux numérations (comme l'association terme à terme).
[227] Ce qui ne veut pas dire sans l'emploi d'autres signifiants, y compris oraux, mais ceux-ci ne se constituent pas en système sémiotique comme une numération.

numération parlée en France (un « simple » passage à l'écrit d'une désignation orale, par exemple « 23 » est synonyme de l'écriture littérale « vingt-trois ») et d'autres fois elle doit être utilisée dans son interprétation de référence (par exemple en termes de dizaine(s) et d'unité(s) pour une addition posée), tout au moins en distinguant les deux chiffres. Quand il s'agit de « parler » des nombres dans les situations d'apprentissage, les interactions verbales en classe convoquent nécessairement (*a minima* initialement) une interprétation ordinale (avec repérants ou non) ou arithmétique additive du nombre, qu'il soit dit ou écrit. Ceci amène un problème spécifique à la classe, celui de mener les séances d'apprentissage sur un « objet » (l'écriture chiffrée) qui est déjà nommé et dont le nom renvoie à une interprétation ancienne non congruente avec celle visée. Donnons quelques exemples à partir des manuels étudiés.

Exemple 1 : « Cap Maths »

Dans la séquence clé, « grand Ziglotron », la séance 2 (unité 8) contribue à ce que les élèves associent aux désignations parlées une décomposition en « *groupements de dix et en unités* ». Dans cette séance, les élèves doivent remplir un bon de commande dans lequel on demande tout d'abord l'écriture chiffrée puis une désignation de la quantité en termes de « *... paquets de dix boutons et ... boutons* ». La stratégie des élèves prévue par le manuel consiste à obtenir une désignation parlée pour obtenir une désignation écrite chiffrée puis ensuite une désignation de la quantité en termes de « *... paquets de dix boutons et ... boutons* ». Plusieurs problèmes se posent alors.

Premièrement, l'obtention de la désignation chiffrée est envisagée via la désignation parlée, grâce en particulier au parallèle entre les régularités de la comptine orale (vingt, trente, quarante) et celles de la suite chiffrée (cette association a été prescrite dans les séances antérieures). Ainsi, l'interprétation de l'écriture chiffrée est celle de la numération parlée en France. Cette dernière permet d'obtenir le cardinal d'une collection figurée. Les stratégies qui semblent les plus probables sont des comptages qui mettent en œuvre une interprétation ordinale (avec repérants ou non) ou/et additive, et c'est donc ainsi qu'est perçue et utilisée la numération écrite chiffrée, alors même que son interprétation doit évoluer dans cette séance.

Deuxièmement, le problème se pose de l'obtention par les élèves d'une désignation de la quantité en termes de « *... paquets de dix boutons et ... boutons* ». Le manuel ne l'indique pas. Si les élèves tentent d'utiliser la désignation parlée en France du cardinal, ils peuvent s'appuyer sur les repérants/appuis additifs et ainsi mettre en jeu un passage d'une interprétation ordinale avec repérant ou (arithmétique) additive vers une interprétation multiplicative. Ceci va dans le sens de l'itinéraire proposé par le manuel. Mais des recherches antérieures ont montré que les élèves perçoivent difficilement qu'une quantité puisse être désignée à l'aide de deux signifiants de la numération parlée en langue maternelle (et non pas un seul), DeBlois (1995).

Troisièmement, se pose le problème des justifications accessibles aux élèves. Cette justification est susceptible de mettre en jeu des interprétations anciennes. Dans les indications sur la mise en commun à faire avec les élèves, c'est d'ailleurs ainsi que le manuel le propose. La vérification de la réponse est envisagée soit par un recomptage « *revenir aux plaques et aux boutons, et compter un par un les boutons pour savoir si on arrive bien au nombre voulu* », soit dans son lien avec la désignation parlée « *dire par exemple que, « 3 plaques ça fait 30 boutons » (en le justifiant de diverses manières) « et encore 4 boutons, ça fait bien 34*[228] », soit en utilisant les chiffres de l'écriture chiffrée « *dire que c'est juste, ça se voit, parce que dans 34, on voit le 3 et le 4 ; le 3 ce sont les plaques de dix et le 4 les boutons tout seuls* ». Seule la dernière est susceptible de mettre en jeu une interprétation de référence,

[228] Le fait d'employer le mot « dire » indique que les écritures « 3 », « 30 » et « 34 » désignent les désignations orales « trois », « trente » et « trente-quatre »...

mais ce lien direct entre l'écriture chiffrée et la désignation du type « ... *paquets de dix boutons et ... boutons* »[229] est constaté *a posteriori* et il est mis sur un même plan que les autres.
Comment l'enseignant va-t-il gérer toutes les interprétations pour atteindre l'objectif de la séquence ?

Exemple 2 : « J'apprends les maths avec Tchou »

La séance clé p. 74-75 a pour but que les élèves utilisent une interprétation multiplicative de la numération écrite chiffrée, puis de la numération parlée en France. Jusqu'alors, l'interprétation prescrite des désignations parlées en France est arithmétique avec appuis additifs (surtout dans un but de calcul mental) ou ordinale avec repérant (pour dénombrer) alors que les écritures chiffrées sont une transcription écrite de ces désignations orales. Dans cette séance, l'analyse de l'itinéraire montre que les écritures chiffrées doivent être interprétées de manière multiplicative (à l'aide en particulier d'une numération annexe « régulière » à l'asiatique, celle de Tchou), ce qui entraîne de pouvoir, grâce à l'association précédente écrit/oral, interpréter ainsi la numération parlée en France.
Dans une première tâche, activité A, les élèves doivent « dire » la désignation écrite chiffrée d'une collection organisée sous la forme de groupements de dix[230]. Celle-ci est désignée par l'enseignant sous la forme de « c'est x groupes de dix et y points isolés ». Il est difficile de savoir quelle interprétation peuvent utiliser les élèves pour résoudre ce problème, mais plus encore, la justification de la bonne réponse peut faire intervenir comme précédemment des interprétations anciennes. Ceci est renforcé par le fait que les désignations « comme Tchou » et « comme Nous » sont employées après chaque question. Dans l'activité B, qui est d'une certaine manière une tâche réciproque de la première, les mêmes remarques peuvent être faites. Remarquons que dans les prescriptions du manuel, nous pouvons voir la difficulté à distinguer toutes ces interprétations quand il s'agit de communiquer. En effet, page 117 du livre du maître, est écrit : « *Pour chacun des nombres précédents, il s'agit de comprendre que le premier chiffre de leur écriture indique le nombre de groupes de dix doigts, c'est-à-dire le nombre d'enfants qui ont levé tous leurs doigts, alors que le second chiffre indique le nombre de doigts levés par l'enfant qui ne les a que partiellement levés. L'usage du matériel (superposition du chiffre des unités sur l'écriture du nombre correspondant aux dizaines complètes) favorise la coordination des différents points de vue. Trente-quatre, par exemple, c'est : 34 doigts levés ; 3 groupes de dix doigts levés et encore 4 doigts ; 30 doigts levés et encore 4 doigts.* ». Dans l'expression « *des nombres précédents* », le mot nombre renvoie à la conception abstraite du nombre (l'objet dans la terminologie de Peirce, une définition dans le cadre des Mathématiques). Le nombre est différencié d'un de ses representamens, l'écriture chiffrée. Cependant ensuite la locution « *trente-quatre* » est plus ambigüe. Il n'est pas facile de savoir *a priori* s'il s'agit de désigner encore cet « objet » nombre, ou s'il s'agit cette fois-ci de relier expressément son signifiant de la numération parlée en France avec d'autres signifiants (contextualisés dans le cadre de doigts à lever). En outre, il est écrit « *34 doigts levés* » qui se lit usuellement « *trente-quatre* », or si dans le contexte de la leçon, les auteurs attendent de n'y voir que l'écriture chiffrée, dans le contexte du déroulement en classe l'enseignant et les élèves (du fait de leurs connaissances anciennes) peuvent dire ou penser « trente-quatre », ce qui peut évoquer l'interprétation première de la numération parlée. Il n'y a pas cette ambiguïté en ce qui concerne la locution « 3 groupes de dix doigts levés et encore

[229] Il s'agit bien ici de la désignation du type « ... plaques de dix et ... unités » et non d'une des désignations possibles du même type, puisque les contraintes matérielles dans cette séance 2 entraînent que cette unique formulation est pertinente pour résoudre le problème.
[230] Les tâches que nous allons citer sont indiquées en termes d'activité dans le manuel. Elles sont consultables dans les annexes du chapitre 6.

4 doigts » puisque les nombres successivement en jeu sont strictement inférieurs à dix[231]. Mais, en ce qui concerne « *30 doigts levés et encore 4 doigts* », le representamen 30 fait-il référence à « trente » dans une interprétation ordinale ou (arithmétique) additive de la numération parlée en France ou bien à une interprétation de la numération écrite chiffrée de position (en distinguant les deux chiffres 3 et 0)[232] ? L'enseignant va lui aussi être amené à « parler » des nombres en classe, et donc à les « dire ». Que vont alors évoquer les différentes désignations ?

c. Les questions

En résumé, dans les différentes phases d'une séance, que ce soit pour indiquer la tâche, donner des aides ou valider les réponses, un enseignant est amené à communiquer, à interagir avec les élèves, et des signifiants des nombres vont être utilisés. Le langage employé peut convoquer chez l'élève des interprétations différentes. L'enseignant ne peut pas dire : « *ici j'utilise l'oral « vingt-trois » pour parler de l'écriture chiffrée « 23 » dans son interprétation de référence* ». « Vingt-trois » peut, à l'insu de l'enseignant, évoquer telle ou telle interprétation chez tel ou tel élève. Cela dépend des connaissances de l'élève, du « contexte » d'utilisation et ceci quel que soit l'itinéraire cognitif d'enseignement.
Nous formulons ainsi deux questions principales auxquelles nous voulons répondre dans cette troisième partie de la thèse.

Question 1 : Quel peut être le « jeu » des relations entre les cinq différentes interprétations susceptibles d'intervenir en classe au moment de l'introduction de l'écriture chiffrée dans son aspect positionnel ?
Question 2 : Quels sont les facteurs « contextuels » qui contribuent à leur survenue ?

La première question amène des réponses descriptives, tandis que la deuxième est plus interprétative. Le but est de recueillir des informations pour comprendre les déroulements en classe du point de vue que nous avons adopté.

Nous ne voulons pas étudier en elle-même l'utilisation que font les enseignants des manuels. Nous allons en tenir compte, mais ce n'est qu'un des facteurs qui influe sur le déroulement. En effet, au-delà, nous voulons saisir quels sont les facteurs qui influent sur la survenue de plusieurs interprétations dans une même séquence d'enseignement. Nous voulons en retirer ainsi des renseignements susceptibles d'ouvrir de nouvelles pistes. L'hypothèse que nous faisons est que ces emplois multiples peuvent constituer des obstacles pour l'apprentissage.
Le moment de la première rencontre des connaissances nouvelles est celui qui amorce le processus d'évolution de la numération écrite chiffrée vers son interprétation de référence. C'est dans ce moment que sont susceptibles d'apparaître de la manière la plus évidente les difficultés d'apprentissage et d'enseignement. Ensuite il est plus difficile de comprendre ces difficultés. En effet, les connaissances acquises au fur et à mesure, et donc leur rôle, sont plus difficiles à estimer. Les écarts entre chaque classe se creusent, rendant plus complexe de faire ressortir des analyses des éléments de réponses généralisables. C'est pourquoi nous avons choisi d'étudier les interprétations à ce moment.

[231] Ce qui ne veut pas dire qu'il n'y a pas un enjeu dans ces signes, puisque ces nombres vont devenir des chiffres dans 34. En outre nous avons signalé la difficulté conceptuelle des élèves à considérer qu'une telle désignation puisse indiquer le cardinal d'une collection.
[232] Signalons que cette « confusion » est fréquente en ce qui concerne 10/dix : « *L'enseignant dessine 10 points « comme Perrine » sur le tableau et rappelle aux élèves que c'est un groupe de dix* », p. 117 du livre du maître. L'écriture chiffrée 10 ne nous semble pas questionnée, alors que c'est le cas pour 20, 30, etc.

Précisons ce « moment » d'introduction de l'écriture chiffrée dans son aspect positionnel. L'interprétation de référence est celle que nous avons dégagée dans la première partie de la thèse dans une analyse mathématique. Ce n'est pas celle qui est forcément envisagée ou formalisée dans les recherches antérieures, dans les manuels, dans les instructions officielles ou encore par les enseignants. Ainsi nous ne pouvons pas nous y fier exclusivement pour définir ce moment de première rencontre. Un élément est cependant commun et essentiel dans l'évolution de l'interprétation des écritures chiffrées, même s'il peut revêtir des conceptions différentes d'une personne à l'autre, d'un manuel à l'autre, voire d'un programme à un autre : les chiffres doivent être distingués, et pour les nombres à deux chiffres, le premier (celui à gauche) doit renvoyer au concept de dizaine (paquets, groupements de dix) et le deuxième (celui de droite) à celui d'unité (d'objet « seul », non groupé). C'est ce savoir identifiable dans tous les manuels et dans toutes les recherches que nous considérons, et c'est la première rencontre avec ce savoir que nous étudions. Nous voulons y observer le jeu des différentes interprétations mobilisées, en particulier quand il va s'agir de nommer les écritures chiffrées.

Le sens donné dans les questions au mot « contexte » est assez général et doit être précisé. Auparavant, nous allons considérer ce que nous apportent des recherches antérieures sur les questions posées.

1.2 Les apports de recherches antérieures

Nous allons nous centrer sur les recherches qui concernent précisément les déroulements en classe de séances d'enseignement de la numération chiffrée en primaire, particulièrement au CP, du point de vue des problèmes posés par ses liens avec la numération parlée au niveau de l'enseignement. Nous n'avons trouvé que peu de travaux qui abordaient ce sujet, d'ailleurs la synthèse de Verschaffel & al. (2006) n'en mentionne aucun. Il y est pourtant indiqué l'importance du poids socioculturel dans les stratégies d'enseignement ainsi que celle des manuels scolaires. Fuson & Li (2009) signalent par ailleurs qu'elles pensent rencontrer des résistances chez les enseignants pour introduire la nouvelle façon d'aborder l'enseignement de la numération qu'elles prônent à travers le nouveau manuel « Math expression ». Ce dernier est distribué dans 49 états mais ne rencontre pas (encore) un large public. Verschaffel & al. (2006) mettent en exergue la nécessité de formations des enseignants pour prendre en compte les apports nouveaux des recherches.
Numa-Bocage, dans sa thèse (1997), relève chez les enseignants qu'elle a observés une utilisation simultanée de la numération parlée, du comptage et du groupement dans les séances d'introduction de l'écriture chiffrée dans son aspect positionnel. Les difficultés liées à l'utilisation des mots « chiffre » et « nombre » sont révélées dans l'analyse, ainsi que la faible attention que les enseignants portent aux liens entre écriture chiffrée et désignation orale, alors qu'ils interviennent nécessairement dans les séquences proposées. Tout se passe comme si elles étaient synonymes. La recherche montre par ailleurs une grande densité d'échanges oraux et très peu de passages à l'écrit. Les aides et les types d'échanges entre l'élève et le professeur sont catégorisés, mais ils ne sont pas analysés via la non-congruence.
Masselot, Numa-Bocage & Vinatier (2007) confrontent quant à elles trois axes d'analyse de la séance d'enseignement menée par une enseignante de CP sur la « *présentation de la dizaine* ». Cette séance a pour objectif d'une part de faire percevoir aux élèves la nécessité de développer une stratégie plus efficace que le dénombrement un à un, c'est-à-dire celle qui consiste à organiser une collection de trente-huit éléments dessinés en utilisant des groupements pour les dénombrer, et d'autre part à leur faire percevoir la pertinence de cette procédure[233]. Les élèves n'ont jamais encore été confrontés à une telle tâche consistant à

[233] C'est ainsi qu'est décrit l'objectif de la séance par le professeur dans l'article.

grouper par eux-mêmes, même si des boites de dix ont été reliées à des écritures du type 10+10+10+2. Les analyses des chercheurs mettent en particulier en perspective les liens entre les échanges verbaux et le contenu de la séance, dans le but de fournir à l'enseignante qui a été observée trois lectures différentes de sa pratique. Chacune des trois auteures propose son analyse. Nous allons indiquer ce qui nous semble utile à notre travail.
L'analyse de Masselot permet de dégager les composantes médiative et cognitive parmi les cinq composantes de la théorie de la double approche didactique et ergonomique de Robert & Rogalski (2002). L'importance dans la séance du lien entre le problème posé et les stratégies dont disposent les élèves est mise en relief. Les élèves peuvent en effet résoudre le problème en utilisant la comptine numérique (aspect ordinal), ce qu'ils font effectivement, alors qu'un groupement par dix est attendu par l'enseignant. Cette stratégie est alors « soufflée » par l'enseignante au fur et à mesure de l'avancement dans la séance avec de plus en plus d'insistance, via le vocabulaire employé, la redéfinition de la tâche initiale et le matériel fourni (des boites avec des billes). Ce déroulement est analysé par Masselot comme répondant à la crainte que l'enseignante a de ne pas voir apparaître les groupements. La stratégie de comptage est passée alors d'un statut d'outil pour résoudre le problème à celui d'objet d'enseignement. Masselot conclut son article par le fait que les enjeux épistémologiques dans la conduite de la séance se trouvent en tension avec les exigences de deux ordres : « *pragmatique, pour réagir in situ aux aléas de la dynamique des échanges et soutenir l'avancée de la séance. La mise en place de formes d'aides appropriées pour que les élèves collaborent au développement de la séance en est une dimension importante [...] ; relationnel, pour permettre à chacun de construire sa place dans les échanges verbaux* ».
Nous retenons que ce sont bien des enjeux de contenus, épistémologiques, qui sont analysés comme facteurs influant sur le déroulement, mais aussi que les procédures effectivement employées par les élèves (non attendues par l'enseignante) ont déclenché différentes réactions et ainsi orienté ce déroulement.
Dans des termes différents et à l'aide du cadre théorique de la didactique professionnelle (Pastré), Numa-Bocage arrive à une conclusion similaire à celle de Masselot. Elle analyse le déroulement de la séance comme « *le passage à une posture de « médiation » chargée d'un enjeu épistémologique - chercher à faire revenir l'élève sur son action « qu'est-ce que tu faisais ? » - à une posture de tutelle visant la résolution pragmatique de la tâche « on va essayer de les ranger »* ».
Enfin, Vinatier, dans le cadre d'une analyse fonctionnelle de l'intersubjectivité, indique aussi un changement de gestion de l'intersubjectivité révélant « *un effort pour ramener le déroulement de la séance vers ce qui était prévu* ». Elle met elle-aussi en avant la préparation de la séance liée aux prescriptions du fichier.

Ainsi, si la non-congruence n'est pas spécifiée en tant que telle, c'est (du côté de l'épistémologie des contenus signalée par Masselot) le fait que les élèves disposent de la numération parlée pour résoudre le problème de dénombrement posé via un manuel scolaire qui fait obstacle à l'introduction de connaissances afférant à la numération chiffrée de position et qui donc influence le déroulement de la séance.
Ainsi cette dernière recherche met en exergue l'importance de l'exercice proposé aux élèves par rapport à ses connaissances. En outre, les échanges verbaux ne parviennent pas à dénouer la situation, si ce n'est par une indication de la stratégie par l'enseignante. Ceci ne répond pas de manière précise à nos questions, puisque d'autres facteurs sont susceptibles d'être pris en compte, mais cela permet de voir que la situation (au sens de la théorie des situations didactiques) est un paramètre essentiel à considérer. En particulier, nous en tirons l'enseignement que, pour nos observations, nous devons choisir des classes dans lesquelles les problèmes proposés aux élèves ne font pas obstacle *a priori* à la connaissance visée (ce qui

semble le cas pour la classe étudiée dans la recherche de Masselot, Numa-Bocage & Vinatier) et permettent au chercheur de considérer les différents poids des facteurs en jeu.

2. Cadre théorique

Les questions posées dans le paragraphe 1.1.c vont orienter nos choix théoriques et méthodologiques. Nous allons présenter le cadre théorique adopté et justifier son intérêt pour notre recherche (§2.1). Nous sommes alors amené à le compléter par des éléments didactiques qui permettent de répondre à nos questions (§ 2.2). La méthodologie est détaillée dans le § 3.

2.1 Le cadre général de la double approche

Pour suivre le projet de la thèse, nous devons tenir compte d'un grand nombre de paramètres, nous allons utiliser le cadre général de la double approche didactique et ergonomique de Robert & Rogalski (2002). Nous rappelons brièvement les éléments principaux sur lesquels elle s'appuie (§a) puis en quoi ils nous sont utiles dans la thèse (§b).

a. Eléments généraux

<u>Les cinq composantes de la double approche</u>

La double approche de Robert et Rogalski (2002) aborde les déroulements en classe du point de vue de la didactique et de la psychologie ergonomique. Elle a été élaborée initialement comme méthodologie pour étudier les pratiques des enseignants en relation avec les apprentissages (potentiels) des élèves inférés de leur activité mathématique. Le contenu est donc central, ce qui justifie une approche proprement didactique. Cinq composantes des pratiques en classe sont utilisées, les extraits qui suivent sont de Robert (2007).

- La composante médiative et la composante cognitive sont issues de l'analyse didactique.
    - « *Nous travaillons sur des séances en classe, en général sur des vidéos et leur transcription. A partir de ces données, nous faisons une analyse des activités des élèves [...]. Nous dégageons de ces analyses les deux premières composantes des pratiques que nous appelons composante cognitive et composante médiative qui correspondent au choix des enseignants sur les contenus, sur les tâches définies à partir des énoncés des exercices, leur organisation, leur quantité, leur ordre, leur nature et sur les déroulements. Tout ce qui est décidé a priori alimente la composante cognitive et les choix correspondants en termes de déroulement s'inscrivent dans la composante médiative.* ». (Ibid., p 275)
- Du côté du métier, trois composantes sont distinguées.
    - « *D'abord une composante personnelle qui permet de pondérer ce qu'on voit en classe et de l'intégrer dans le temps long, en faisant une place aux choix de l'enseignant liés à ce temps long. Cette composante traduit aussi les représentations du professeur, les risques qu'il consent dans l'exercice de son métier, le confort dont il a besoin : un métier s'exerce longtemps et on ne peut pas faire d'effort surhumain pendant très longtemps* ».
    - « *Nous avons distingué la composante institutionnelle : elle intègre ce que les pratiques doivent aux programmes, aux horaires, ou même aux ressources comme les manuels, ou encore à l'existence et aux exigences de l'administration : ce sont les éléments qui peuvent être en partie inférés à partir des observations de classe.* ».

- « *Nous ajoutons une composante sociale qui correspond au fait que l'enseignant n'est pas tout seul, dans sa classe : les élèves, non seulement comme collectif mais aussi comme individus appartenant à des groupes sociaux, interviennent ; l'enseignant n'est pas tout seul dans son établissement : il est soumis à des exigences, des attentes, quelquefois des contraintes dont on ne peut pas faire l'impasse pour interpréter ce qui se passe en classe.* ». (Ibid, p 279 et 280).

Tâche, activité et apprentissages

L'étude des déroulements en classe se fait avec l'hypothèse qu'ils induisent des activités chez les élèves qui sont source d'apprentissages. L'activité désigne tout ce que l'on dit, pense ou fait à la suite d'une tâche à exécuter, comme répondre à une question d'un problème. Dans la double approche l'activité se perçoit dans la dialectique tâche/activité que nous avons déjà indiquée quand nous avons parlé des différents niveaux de tâche pour l'enseignant en préambule de l'introduction de l'étude des manuels. Plus précisément, Leplat (2006) considère un triplet sujet-tâche-activité *« On peut lire le triplet de la manière suivante. L'activité dépend du sujet et de la tâche, celle-ci étant définie comme un objectif à atteindre dans des conditions déterminées (techniques, organisationnelles, sociales, etc.). La tâche répond à la question : qu'est-ce qui est à faire ?, l'activité à la question : qu'est-ce qui est fait effectivement ? Analyser l'activité, c'est analyser ce triplet qui forme un système, chaque terme étant en double relation (dans les deux sens) avec chaque autre. Ainsi l'activité dépend de la tâche (prescrite), mais elle peut aussi la modifier (pour en faire la tâche redéfinie). L'activité dépend du sujet, mais elle peut aussi le modifier au sens où elle peut changer, par exemple, les compétences nécessaires à son exécution. Enfin le sujet et la tâche constituent un couplage dans lequel ces termes se codéterminent. La tâche fait appel à certaines caractéristiques du sujet qui changent quand l'activité évolue »*.

En ce qui concerne le lien avec les apprentissages nous retenons que « *Ces activités des élèves, notamment lorsqu'elles sont mathématiques, sont elles-mêmes vecteurs d'apprentissage potentiel : c'est notre point d'accès aux apprentissages visés, même s'il existe bien d'autres déterminants de ces apprentissages. Nous faisons de plus comme si les élèves (ou suffisamment d'élèves) entraient dans le jeu de l'apprentissage, en s'impliquant dans ce qui est proposé par l'enseignant ou l'enseignante en classe, ce qui peut exclure du champ de ces analyses certaines classes très difficiles* », Robert & Rogalski, 2002.

Le rôle de l'enseignant

Beaucoup de facteurs influencent l'enseignement et l'apprentissage : les facteurs institutionnels, ceux liés au métier d'enseignant, aux connaissances des élèves, à celles du professeur, ceux relatifs à des dispositions matérielles (comme le temps) et aux tâches proposées aux élèves. Tous ces facteurs n'ont pas le même poids, pas la même généricité ni la même « inertie » : le professeur va pouvoir jouer sur certains et moins sur d'autres. S'il suffisait de proposer une liste d'exercices à faire aux élèves pour enseigner et être sûr de l'apprentissage engendré, le professeur ne serait qu'un « passeur » de consignes, un organisateur de tâches. Ce n'est pas ainsi qu'est perçu l'enseignant dans la double approche. Ce dernier y est considéré comme un médiateur œuvrant dans un système dynamique et ouvert (Rogalski, 2003). En outre l'hypothèse est que l'enseignant entretient un rapport rationnel avec ce qu'il fait dans son métier. Cette hypothèse induit une cohérence dans ses actes qui légitime ainsi la recherche de déterminants et variables relativement indépendants de facteurs plus personnels : affectifs, sociaux ou psychologiques.

b. Utilisation dans la thèse

Le lien avec les questions posées

La double approche nous permet d'apporter certaines réponses à nos deux questions.
En effet, l'approche didactique est essentielle pour répondre à la première question, et la double approche nous laisse une certaine marge de manœuvre pour les outils didactiques à employer. Nous pouvons donc choisir ceux qui nous semblent les plus adaptés.
Ce qui nous est particulièrement utile dans la deuxième approche, c'est de relier l'étude didactique précédente avec une approche ergonomique qui va permettre d'aborder la deuxième question en envisageant une pluralité de paramètres, facteurs, déterminants, variables. Les enseignants y sont considérés comme des professionnels en situation de travail. Regarder ainsi leur activité permet de comprendre différemment l'enchaînement des différentes interprétations, leurs liens qui sont indiqués dans la première question. En outre, l'hypothèse de cohérence et de stabilité de la pratique des enseignants nous permet d'inférer certaines généralités des analyses en classe. Ceci légitime ainsi que l'on puisse obtenir des éléments de réponse à partir de l'étude de cas. Or la teneur de nos questions renvoie à des études de cas en classe alors que le projet de la thèse demande des réponses génériques. Nous adhérons ainsi à l'ambition de la double approche : « *Nous cherchons à comprendre comment les individus particuliers (enseignant/e/s, élèves) peuvent investir les marges de manœuvre qui leur « restent », et qui doivent donc être reconnues par nous, par delà les contraintes. Cela nous amène à travailler aussi bien du côté générique - pour délimiter ce qui est commun - que du côté individuel, pour mettre en évidence les variables entre enseignants ou enseignantes.* », Robert & Rogalski (2002). Ainsi ce cadre théorique nous offre des possibilités méthodologiques qui servent nos objectifs. Nous abordons les questions à travers l'analyse du déroulement de séances particulières en classe.

Les premiers outils d'analyse

Revenons au lien activité/apprentissage qui sous-tend la légitimité de la double approche comme l'expose Robert (2002-2003). Ce sont des éléments théoriques de la didactique qui nous permettent de le comprendre, il y aura donc lieu d'indiquer ceux qui sont retenus. Un certain nombre de ces éléments sera commun à Robert (2002-2003), Rogalski (2003) et Roditi (2005), ils vont être complétés en fonction des questions spécifiques qui se posent ici. Ils serviront à fournir des indicateurs des déroulements en classe, mais ils seront aussi utilisés pour les analyses afin de répondre aux questions propres à cette partie de la thèse. Cependant, nous restons au stade de la description des activités potentielles des élèves, décrites à l'aide d'un philtre théorique, il ne s'agira pas d'en inférer des apprentissages certains.

Nous utilisons en particulier la notion d'incident qui a été définie par Rogalski (2003) comme un décalage entre ce qui était prévu et ce qui se réalise : « *La définition la plus générique d'incident est le fait qu'il y a décalage entre ce qui est attendu de l'action et ce qui se passe effectivement. On réserve en général le terme d'incident aux cas où on évalue que ce décalage est « négatif », et met en question l'atteinte du but visé. L'incident en ce sens générique n'est donc pas l'incident de discipline, mais celui directement lié au contenu de l'enseignement en jeu.* ». Nous utilisons aussi pour caractériser les incidents observés la typologie de Roditi (2005) et de ses modes de gestion. Six catégories sont distinguées dont nous redonnons les définitions dans les termes employés par Roditi :

- Les erreurs : une erreur dans ce contexte est définie comme étant « *toute réponse non conforme à celle qui est manifestement attendue en fonction de la tâche* ».
- Les questions ou les propositions, qui constituent « *des éléments nouveaux en cours de résolution d'un problème* », et nous ajoutons aussi au cours de la phase de synthèse ou de dévolution.

- Les réponses incomplètes ou non suffisamment argumentées.
- Les élèves interrogés qui restent silencieux.
- Ce que disent les élèves quand la réponse est hors de leur portée.
- Les élèves sont en désaccord mais personne n'a tort, ceci arrive en particulier lorsque plusieurs stratégies de résolution correctes sont exposées.

Huit modes de gestion sont identifiés « *classés en fonction de l'autonomie laissée à l'élève après l'intervention du professeur* » :

- Le professeur ignore l'incident.
- Le professeur répond à la place de l'élève, il exécute la tâche.
- Le professeur récupère et enrichit une question ou une réponse, en élargissant la question, en complétant une idée, en passant du particulier au général, en contextualisant ...
- Le professeur change d'intervenant en sollicitant un autre élève ou bien temporise.
- Le professeur guide l'élève, « *de façon telle que, peut-être « malgré lui », l'élève produise la réponse attendue* ».
- Le professeur facilite l'exécution de la tâche, « *en en exécutant une partie, en indiquant la méthode à suivre, en lui rappelant un exercice analogue* ». Par rapport au guidage, le professeur n'accompagne pas l'élève pas à pas, en particulier, il ne reste pas forcément à ses côtés.
- Le professeur demande un approfondissement. Cette demande permet de « *relancer son travail sans aide supplémentaire* ».
- Le professeur reprend de façon neutre l'expression d'un élève. Ceci peut être une manière de relancer le travail de l'élève, ou dans une phase collective, d'interpeller la classe, ce peut être aussi une façon d'indiquer un jugement sur la validité de ce qui est en jeu.

Nous utilisons aussi la notion d'épisode en tant qu'unité de découpage supérieure à celle d'un incident. Selon Roditi (2005), à la suite de Hache & Robert (1997), un épisode est « *un échange d'actes pédagogiques et d'échanges entre professeurs et élèves en vue de parvenir à un but donné qui est en général la réalisation d'une tâche* ». Nous allons reprendre la notion d'épisode, en tant qu'unité de découpage (plus) fine, ceci est précisé par la suite. Nous découpons la séance le plus souvent en un « lancement » (indication de la tâche des élèves par l'enseignant), une « réalisation de la tâche des élèves » (l'enseignant prépare la phase suivante, il s'assure par exemple que les élèves puissent s'engager dans la tâche), et une « mise en commun » c'est-à-dire un moment dans lequel les élèves et l'enseignant vont être amenés publiquement (classe entière) à réfléchir sur le travail qui a été fait (discussion des stratégies, des réponses, éléments d'institutionnalisation). Le scénario est alors constitué du découpage opéré dans les déroulements observés.

Cependant nous n'avons pas pour but d'étudier les pratiques des enseignants en elles-mêmes. Ainsi, nous allons proposer un dispositif d'analyse spécifique à notre recherche, ce qui requiert de préciser les éléments didactiques que nous allons utiliser.

2.2 Les outils didactiques d'analyse : des éléments empruntés à la théorie des situations

a. Motivation du choix de la Théorie des Situations Didactiques (TSD)

Pour compléter notre analyse didactique des déroulements en classe, nous avons choisi la théorie des situations didactiques (TSD). Grâce au concept de situation, elle nous permet en particulier d'envisager de relier un ensemble d'éléments qui sont sous-jacents aux questions

posées : le rôle des élèves (leurs connaissances disponibles), celui de l'enseignant (son rôle dans la séance) et celui du problème posé aux élèves (le rôle de la spécificité du contenu mathématique en jeu). De plus la TSD peut s'articuler avec les éléments théoriques déjà retenus de la théorie des champs conceptuels et de la double approche.
En ce qui concerne la « compatibilité » de la TSD et de la théorie des champs conceptuels nous pouvons citer Flückiger (2004) ou plus directement les remarques de Vergnaud (1991) lorsqu'il explicite la nature des relations entre les situations de sa théorie et les situations de la TSD. Nous pouvons aussi citer Conne (2001). Nous retenons particulièrement le fait fondamental, commun aux deux théories, que l'apprentissage (d'un concept mathématique) se fait grâce à la résolution de problèmes. Vergnaud met l'accent sur l'ensemble des problèmes à résoudre avec les classes de problèmes propres au concept. Brousseau insiste sur le processus didactique. Tant Vergnaud que Brousseau abordent la dialectique entre l'aspect outil et l'aspect objet, ce que nous avons déjà indiqué dans le chapitre 4. Ainsi, grâce à une analyse via la TSD, nous pouvons envisager de dégager des stratégies qui nous permettent d'en inférer les différentes interprétations des numérations (dans le sens dégagé dans la première partie de la thèse, sens non psychologique) dans les déroulements observés en classe. Nous avons indiqué dans le chapitre 4 en quoi ces interprétations avaient un caractère hypothétique pour l'observateur et n'étaient pas une entité isolée, notamment avec la notion de cheminement cognitif et de champ conceptuel (variété et historicité des concepts en jeu, des problèmes à résoudre). Néanmoins, nous avons aussi souligné qu'il était possible de réduire cette incertitude en considérant les paramètres de la situation. C'est ce que nous voulons entreprendre avec l'analyse didactique dans cette troisième partie de la thèse, et c'est pourquoi nous choisissons la TSD.
En ce qui concerne la « compatibilité » entre la TSD et la double approche, Robert souligne que l'approche didactique nécessite d'utiliser des « résultats » didactiques. Ceux-ci servent à analyser les tâches des élèves et des enseignants afin d'en inférer des activités. Ceci nous semble compatible avec la TSD. En effet, l'analyse de la résolution de problèmes en situation permet de comprendre les apprentissages, ce qui est une façon d'appréhender l'activité des élèves selon une théorie didactique. Qui plus est, le rôle de l'enseignant y est bien selon nous celui d'un médiateur. Là encore la TSD permet d'analyser ce rôle d'un point de vue compatible avec la double approche.

Nous allons préciser les compatibilités en indiquant les éléments de la TSD retenus. Indiquons simplement pour terminer ce paragraphe que, d'une certaine manière, nous investissons les marges de manœuvre que la double approche offre dans les choix didactiques, et ceci est possible en utilisant la TSD.

b. Les éléments retenus

Nous allons nous intéresser plus particulièrement à certains éléments de la théorie des situations afin de les adapter à nos besoins spécifiques. Nous nous référons principalement à Brousseau (1996, 1998), Perrin & Hersant (2003) et Margolinas (1992).

Milieu et contrat didactique

Nous voulons comprendre d'une manière générale « qui est à l'initiative de quoi » par rapport à l'emploi de telle ou telle interprétation, de tel ou tel signifiant, dans une analyse a posteriori des déroulements en classe. Ceci nous amène à convoquer la notion de milieu et de jeu pour l'analyse *a priori* (Brousseau 1996, 1998) articulée avec la notion de contrat didactique reprise dans l'analyse *a posteriori*. Nous détaillons ce dernier point avec les outils élaborés par Perrin et Hersant (2003). Ceci nous permet de nous doter d'un instrument d'analyse des différents cas de figure concernant la place de l'élève et de l'enseignant par rapport au savoir.

Cinq statuts du savoir pour l'élève sont distingués :

- un savoir entièrement nouveau (avant une première rencontre),
- un savoir en cours d'apprentissage, nouveau après une première rencontre,
- un savoir en cours d'apprentissage, en cours d'institutionnalisation,
- un savoir en cours d'apprentissage, institutionnalisé à consolider,
- un savoir ancien qui n'est (en principe) plus enjeu d'apprentissage.

Notre recherche concerne un savoir *a priori* entièrement nouveau, cependant, nous l'avons vu, nous devons tenir compte de l'ensemble du processus, en particulier du fait que les désignations écrites chiffrées ont déjà été utilisées.
L'institutionnalisation, le contrat didactique et le milieu sont définis dans la lignée de la TSD. Précisons, et c'est cette définition que nous retiendrons, que le contrat didactique est ce qui règle les attentes réciproques des élèves et de l'enseignant à propos du savoir, c'est ce qui permet à ce dernier de réguler les rapports de l'élève avec le milieu. Le milieu caractérisant la situation didactique, les apprentissages se font grâce aux adaptations de l'élève dans les interactions milieu-élève(s), l'élève étant vu comme un système de connaissances qui agit sur le milieu éventuellement antagoniste. La distinction savoir/connaissance vient du fait que la connaissance permet de prendre des décisions, d'agir sur et dans une situation. Sa reconnaissance en tant que connaissance utile en fait un savoir. Un savoir peut être utilisé comme connaissance ou non. Ce point sera repris en développant les notions développées par Conne (1992) qui sont congruentes avec celles en jeu ici.
Trois niveaux de structuration du contrat sont alors abordés : le macrocontrat (à l'échelle d'un objectif d'enseignement voire plus), le mésocontrat (à l'échelle de la réalisation de la résolution d'un exercice ou d'un enchaînement d'exercices), le microcontrat (à l'échelle d'un épisode qui correspond à une unité de contenu mathématique comme une des questions d'un exercice, ou à une unité d'activité du professeur et des élèves[234]). Nous nous centrons sur les mésocontrats et microcontrats qui correspondent au niveau où se situent maintenant nos questions sur les différentes positions de l'élève et de l'enseignant par rapport au savoir.

Mésocontrats

L'évolution de l'avancée du temps didactique de la connaissance vers le savoir est modélisé pour une classe ordinaire selon la présence d'un milieu a-didactique ou non. Ainsi ce modèle proposé par Perrin-Glorian et Hersant peut être utilisé pour analyser ce qui se passe dans les classes « ordinaires ». Deux composantes, le statut du savoir et les potentialités a-didactiques de la situation, sont considérées comme se stabilisant au niveau du mésocontrat. Les types de mésocontrats didactiques se succèdent et font écho aux cinq états du statut du savoir pris dans l'ordre de leur énonciation ci-dessus : il y a donc un ordre didactique à respecter dans l'évolution du statut du savoir « le savoir en cours d'institutionnalisation » lié à un de ces contrats ne peut se dissocier des autres. Deux modalités de mésocontrats sont envisagées selon la présence ou non d'une situation a-didactique.

Dans le cas d'un milieu avec des potentialités adidactiques, les deux mésocontrats « dévolution d'une première situation » et « institutionnalisation » sont incontournables si l'enseignant installe une situation didactique conforme à celle de la TSD. Dans le cas où on n'a pas de milieu capable de rétroactions interprétables par les élèves, les deux mésocontrats « initiation » et « reconnaissance du savoir » sont ceux qui vont nous intéresser (et ce qui se passe entre les deux) car ils concernent le premier instant pour l'élève où le savoir est utilisé comme connaissance. Voici le tableau extrait de Perrin & Hersant (2003) à propos des liens entre contrat et statut du savoir en jeu :

[234] C'est donc cette définition d'épisode que nous prenons.

Avancée du temps didactique →

<table>
<tr><td rowspan="2">Statut didactique du savoir

Type de situation</td><td rowspan="2">Savoir entièrement nouveau</td><td colspan="3">Savoir en cours d'apprentissage</td><td rowspan="2">Savoir déjà institué</td></tr>
<tr><td>après une 1ère rencontre</td><td>en cours d'institution-nalisation</td><td>savoir institutionnalisé à exercer</td></tr>
<tr><td>Absence de milieu adidactique ou non utilisation de ce milieu</td><td>$\Sigma \to K$
Initiation</td><td>$\Sigma, S \to K$
Pseudo-dévolution</td><td>$K \leftrightarrow \Sigma$
Reconnaissance du savoir</td><td rowspan="4">$\Sigma \to K$
Entraînement</td><td>$\Sigma \to S$
Mobilisation du savoir</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Existence d'un milieu adidactique permettant des rétroactions interprétables par les élèves</td><td rowspan="3">$S \to K$
Dévolution d'une première situation</td><td colspan="2">$S \leftrightarrow K$
Rappel</td><td>$\Sigma \to \Sigma$
Restitution du savoir</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$K \to S$
Réinvestis-sement de connaissances</td><td>$\Sigma \to S$
Réinvestissement de savoirs</td><td>$(S \to K)$
$\Sigma \to \Sigma$
Revue de savoirs</td></tr>
<tr><td>$K \to \Sigma$
Institution-nalisation</td><td>$S \leftrightarrow \Sigma$
Reprise</td></tr>
</table>

Dévolution d'une première situation : dévolution au sens de Brousseau, c'est-à-dire le processus qui amène l'élève à prendre en charge la responsabilité du traitement de l'exercice.
Réinvestissement de connaissances : avant l'identification par les élèves de leur connaissance comme un savoir, les élèves peuvent faire fonctionner à nouveau la même connaissance. Pour ceux qui n'ont pas produit exactement la connaissance attendue lors de la première rencontre, le contrat est encore de l'ordre de la dévolution ou pseudodévolution (voir ci-après).
Rappel : dans une situation située après la première rencontre et avant l'institutionnalisation l'enseignant peut provoquer une évocation des procédures utilisées dans une situation déjà rencontrée pour permettre une nouvelle dévolution.
Institutionnalisation : le professeur érige les connaissances en savoir, c'est pour nous le premier moment de mise en forme du savoir.
Réinvestissement de savoir : le contrat est le même que dans le réinvestissement de connaissances mais le savoir est au moins partiellement institutionnalisé.
Reconnaissance du savoir : le professeur demande la formulation du savoir utilisé.
Entraînement : les élèves sont censés connaître le savoir et se l'approprier comme connaissance disponible.
Restitution du savoir : convocation du savoir ancien sous sa forme de savoir pour répondre à une question du professeur (au moment de l'évaluation entre autres).
Mobilisation du savoir : convocation du savoir ancien sous sa forme de savoir pour traiter une nouvelle situation (au moment de l'évaluation entre autres).
Revue de savoirs : convocation du savoir ancien dans une situation d'institutionnalisation ayant pour objet de créer des liens entre plusieurs situations ou plusieurs savoirs.
Reprise : modification du savoir ancien au moins dans sa formulation.

Initiation : transmission directe du savoir par ostension. Le savoir montré par l'enseignant à l'élève doit devenir une connaissance sans passer par une situation a-didactique. Ici a lieu la première mise en forme du savoir.
Pseudodévolution : Dans le cadre d'une situation suivant une première rencontre avec mésocontrat d'initiation, c'est l'occasion pour l'élève de produire une connaissance à partir du savoir dévoilé par l'enseignant.

Suivant les mésocontrats la responsabilité vis à vis du savoir est plutôt du côté de l'enseignant ou plutôt du côté des élèves : contrats de dévolution, rappels, réinvestissement, entraînement, reconnaissance, mobilisation plutôt du côté de l'élève ; initiation et institutionnalisation plutôt du côté de l'enseignant. Mais, selon Perrin & Hersant (2003), ce partage de responsabilité au niveau du méso-contrat ne peut se voir que dans l'analyse *a posteriori* car cela peut être géré tout autrement que ce que propose cette classification. C'est pourquoi est introduite la notion de micro-contrat. Elle est centrée sur cet aspect qui est la dimension exclusivement considérée par Brousseau (1996).

Microcontrats

A l'intérieur de ces mésocontrats didactiques existent des microcontrats qui établissent, à une échelle plus petite, la responsabilité prise par l'élève et l'enseignant par rapport au savoir objet de l'apprentissage, dans la production de la connaissance ainsi que dans l'évaluation et la validation des réponses des élèves. Perrin-Glorian et Hersant distinguent alors trois microcontrats dans lesquels le professeur garde toute la responsabilité :

- Le microcontrat d'information: l'enseignant apporte la connaissance sans se référer à des exemples et à l'utilisation du savoir.
- Le microcontrat d'ostension assumée : l'enseignant apporte la connaissance et montre comment l'utiliser, de plus il évalue les réponses des élèves.
- Le microcontrat d'ostension déguisée : l'enseignant apporte la connaissance et montre comment l'utiliser et il évalue les réponses des élèves mais de plus il dissimule cette responsabilité en utilisant une situation (maïeutique, effet Topaze).

Deux microcontrats dans lesquels la responsabilité est partagée entre le professeur et la classe, sachant que chaque élève va s'y investir plus ou moins :

- Le microcontrat d'adhésion : l'enseignant délègue une responsabilité à l'ensemble de la classe, il s'appuie sur certains élèves pour produire des connaissances et faire avancer son cours, tout en laissant la possibilité aux autres d'intervenir quand ils ne sont pas d'accord.
- Le microcontrat de production collective : l'enseignant délègue la responsabilité à l'ensemble de la classe de la production de connaissance et une part de la responsabilité dans la validation des réponses. La part d'adidacticité nécessaire est importante pour que ce contrat soit efficace.

Deux microcontrats dans lesquels la responsabilité est partagée entre le professeur et chaque élève de la classe lorsque les élèves travaillent individuellement ou en groupes :

- Le microcontrat de production individuelle : chaque élève assume une part de responsabilité effective dans la validation des réponses et dans la production des réponses. Chaque élève est concerné. La part d'adidacticité nécessaire est importante pour que ce contrat soit efficace.
- Le microcontrat de tutorat : l'enseignant intervient pour aider un élève ou un groupe d'élèves, sans entrer dans un microcontrat d'information ou d'ostension.

Ces microcontrats indiqués par Perrin et Hersant sont particulièrement utiles à notre recherche car ils nous donnent la possibilité d'évaluer la répartition des responsabilités sur le savoir. Les indicateurs à chercher devront donc permettre de caractériser les microcontrats successifs. Cependant la seule analyse en termes de contrat est insuffisante. D'autres paramètres jouent, en particulier la pertinence de l'obstacle rencontré par rapport au savoir visé, ce qui influe aussi sur le fait que ces micro- ou méso- contrats vont pouvoir fonctionner. Autrement dit, si les exercices proposés n'amènent pas les élèves à se confronter avec le savoir visé, les microcontrats dans lesquels les élèves ont une responsabilité par rapport au savoir ne peuvent pas être installés, malgré la volonté du professeur.

Le rôle de l'enseignant : la phase de bouclage

Nous considérons l'enseignant comme un médiateur dans un milieu ouvert, Rogalski (2003). Nous avons décidé d'analyser les déroulements à l'aide de la notion de contrats, il semble nécessaire de nous donner les moyens d'appréhender la dynamique d'enchaînement de ces contrats, et particulièrement des microcontrats.
Avec les notions de méso et micro contrats didactiques nous avons un moyen de prendre en compte les différentes possibilités quant à la répartition de la responsabilité de la construction du savoir entre professeur et élève(s). Les différents enchaînements des contrats permettent alors de structurer le processus d'apprentissage selon ces éléments théoriques. Il nous reste maintenant à choisir ou élaborer d'autres éléments théoriques qui permettent de comprendre cette structure. Nous allons l'aborder en considérant la finalité de l'enseignement : le savoir. Il s'agit alors de rendre compte des différentes options possibles quand il s'agit pour le professeur de mener en classe une phase comprenant une première mise en forme d'un nouveau savoir, que nous appellerons « phase de bouclage ».

Cette phase de bouclage utilise la notion de « boucle » connaissance/savoir. La distinction entre connaissance et savoir que nous empruntons à Conne (1992), qui traite la question de manière très générale, est congruente avec celle en jeu précédemment. Cette distinction relève de l'interaction entre un sujet et une situation. Conne (1992, p. 223), distingue alors « *Le cas où le contrôle de la relation sujet/situation se trouve du côté de la situation, ce sera de l'ordre de la connaissance, du cas où ce contrôle se trouve du côté du sujet (et de la représentation), ce sera de l'ordre du savoir* ». Plus précisément, c'est un critère d'utilité qui les distingue : « *Si les processus cognitifs relèvent de l'adaptation du sujet à la situation et de l'équilibration des structures cognitives, le savoir est de l'ordre de l'utilité des connaissances pour transformer les situations.* » (Ibid., p.223). Il poursuit: « *Lorsque le sujet reconnaît le rôle actif d'une connaissance sur la situation, pour lui, le lien inducteur de la situation sur cette connaissance devient inversible, il sait. Une connaissance ainsi identifiée est un savoir, c'est une connaissance utile, utilisable, dans ce sens qu'elle permet au sujet d'agir sur la représentation. […] Dans bien des cas savoir, c'est savoir se mettre en situation de mobiliser ses connaissances pour agir.* » (Ibid., p. 225 et 240). L'enseignement vise alors à mettre en forme la connaissance de l'élève en savoirs prédéfinis et de manière plus précise : « *Le processus d'enseignement part des savoirs à enseigner, puis il cherche à atteindre (induire) la connaissance au moyen des transformations de situations relatives à ces savoirs, et se conclut par le retour à ces savoirs de départ !* » (Ibid., p. 242). Il y a donc à ce niveau un processus savoir/connaissance/savoir qui fait écho dans l'institution scolaire à l'articulation savoirs à enseigner/organisation didactique productrice de connaissances/savoirs enseignés. Au niveau de l'enseignement d'une notion spécifique en classe, nous le traduisons en deux boucles archétypales selon la façon dont le savoir est initialement introduit. Le savoir peut être tout d'abord exposé aux élèves, il peut apparaître sous une forme savante (par un cours magistral par exemple) ou/et une forme pragmatique, c'est-à-dire « *un savoir-faire sur la situation* », (Ibid., p. 253). Par exemple l'enseignant le fait fonctionner devant les élèves, ensuite ces derniers vont le faire fonctionner dans un ou des exercices et il s'agira de le faire reconnaître par les élèves. Dans la deuxième boucle, le savoir n'est pas exposé initialement. Un travail des élèves le précède, travail à partir duquel la connaissance utilisée devra être transformée en savoir. A ce niveau de réalisation du projet d'enseignement en classe nous

nous référons à la première possibilité par l'expression « boucle savoir/connaissance/savoir » et à la deuxième par « boucle connaissance/savoir ». Le mot boucle fait à chaque fois référence au processus savoir/connaissance/savoir dans lequel s'inscrivent les deux possibilités, même si dans la deuxième le savoir n'apparaît pas initialement de manière explicite (ni formalisé). Cette distinction est un outil pour comprendre l'activité de l'enseignant en classe car elle permet d'envisager des ressources différentes quand il va s'agir de manière concrète de « *mettre en forme la connaissance de l'élève en savoirs* », puisque dans la première, à l'inverse de la seconde, il peut faire référence au savoir tel qu'il l'a introduit initialement. Les deux boucles n'excluent pas un jeu prolongé entre connaissance et savoir, il s'agit de distinguer comment est amorcé ce jeu. Cependant savoir et connaissance sont à considérer sur des temporalités différentes : « *[...] les savoirs, eux, sont toujours à utiliser, c'est-à-dire à rapporter à de prochaines situations.* » (Ibid., p. 239). En se centrant sur des séquences en classe, nous utilisons les cinq statuts différents du savoir pour l'élève selon l'avancée didactique que mettent en exergue Perrin-Glorian et Hersant (2003, p. 239). A un moment donné, le savoir est susceptible d'être mis en forme une première fois, c'est-à-dire que l'enseignant le fait apparaître de manière décontextualisée et dépersonnalisée en utilisant en particulier des formulations qui le permettent. C'est un premier élément du processus d'institutionnalisation qui se déroule sur un temps plus long. Mais dans un exercice, à la suite de la réalisation d'une tâche, avant de le relier au savoir, il est aussi possible que les élèves accèdent à une information sur la validité de leur réponse : « *J'appelle phase de conclusion la phase au cours de laquelle l'élève accède à une information sur la validité de sa réponse. Cette information doit être pertinente du point de vue du problème et du savoir. La phase de conclusion est sous la responsabilité du maître* », Margolinas (1992, p.128). Nous nous appuyons sur cette définition et sur cet article de Margolinas pour préciser ce que nous entendons dans la thèse par phase de bouclage. Ainsi, tout d'abord, pour nous, elle sous-tend la potentialité d'une phase comprenant une mise en forme d'un savoir nouveau (avant ou après une première rencontre), alors que les élèves ont déjà utilisé ce savoir sous forme de connaissances : c'est la première mise en forme dans le cas d'une boucle connaissance/savoir. Puisqu'il s'agit d'utiliser un travail des élèves, le professeur peut s'appuyer sur celui-ci en particulier quand il leur permet d'accéder à une information sur la validité de leurs réponses et procédures. Cette phase participe à l'institutionnalisation. Tôt ou tard les élèves doivent savoir si ce qu'ils disent, la façon dont ils ont procédé et les réponses avancées sont pertinents du point de vue du problème et du savoir. Sous la responsabilité de l'enseignant, deux modalités sont à envisager (Margolinas, 1992). Cela peut être une phase d'évaluation quand l'enseignant délivre un jugement de validité sans appel sur la réponse de l'élève en utilisant publiquement[235] sa relation privilégiée au savoir : le maître sait, l'élève sait que le maître sait (contrat didactique) et donc admet le jugement du maître. Cela peut être une phase de validation si l'élève lui-même décide (cela peut être grâce à des connaissances anciennes, grâce à une discussion avec ses pairs, ou encore par rétroaction du milieu) de la validité de sa réponse (toujours sous la responsabilité de l'enseignant même s'il réserve sa décision sur le moment). Ainsi, par exemple, en situation d'action, la validation de l'effet de l'action en gain-perte ou vrai-faux peut conduire à la validation de l'action et de la procédure qui a guidé l'action si le milieu est approprié. Différents microcontrats que nous avons cités utilisent ces notions d'évaluation et de validation.

[235] Margolinas (1992) définit les notions de privé et public. « *J'appelle formulation publique de A envers B relativement à Z, une formulation de A au sujet de Z qui est potentiellement portée à la connaissance de B. Le mot potentiellement indique que B n'est pas tenu de s'intéresser à la formulation publique de A.* [...] J'appelle *formulation privée de A envers B relativement à Z, une formulation de A au sujet de Z qui n'est pas portée à la connaissance de B* ». Nous adoptons cette terminologie.

En ce qui concerne le lien avec le processus d'apprentissage, nous retiendrons qu'un abandon progressif de la validation par le milieu matériel (quand il y en a un) pour être remplacé par une validation par les connaissances et savoirs des élèves, participe au processus de décontextualisation et de dépersonnalisation. Ceci peut en particulier précéder une formulation des connaissances des élèves en phase collective. Des prises d'information peuvent être utilisées par l'enseignant pour contrôler la pertinence de la mise en forme du savoir. Quand il n'y a pas de validation par un milieu matériel, pour la validation des connaissances des élèves, il reste la possibilité au professeur de se référer à ce qu'ils disent ou montrent (il peut d'ailleurs y recourir dans tous les cas). Ainsi, même si le milieu n'est pas adidactique et est constitué par exemple par un questionnement du professeur sur des problèmes évoqués, il peut y avoir validation. Cependant, l'utilisation d'un milieu objectif donne un moyen supplémentaire d'évaluer la pertinence des connaissances mobilisées par rapport au savoir visé. En outre, le passage de la validation de l'action ou/et de la procédure à l'émergence de la nouvelle connaissance est toujours hypothétique, même dans le cas d'une situation à forte potentialité adidactique. Les élèves peuvent être confrontés au fait de considérer certaines de leurs formulations comme des conjectures et ils doivent trouver eux-mêmes les moyens de les valider, ce qui entraîne des démarches de preuve, d'argumentations. Autrement dit, une certaine adidacticité du milieu assure que les élèves peuvent se lancer dans ces démarches mais ne peut pas donner la certitude que le débat utilise les preuves intellectuelles qui mènent au savoir visé. Cette incertitude peut être gérée via une ou des phases de bilan que nous comprenons comme nécessairement collectives et à propos d'un problème donné aux élèves. Le premier rôle de ces phases de bilan est de permettre la formulation publique des méthodes et stratégies des élèves, le deuxième rôle est la diffusion de ces méthodes, le troisième est de permettre à l'enseignant de se tenir prêt à préparer et à organiser une phase dans laquelle les élèves vont accéder à une information sur la validité de leur réponse dans la mesure où la phase de bilan ne mène pas à la phase de validation attendue puis à celle d'argumentation. Il aura alors à intervenir, il pourra aussi éviter de plaquer ses propres connaissances sur les représentations des élèves. Rappelons que la nature d'une phase de validation dépend des possibilités de rétroaction du milieu et des connaissances de l'élève qui peuvent lui servir de critère de validité. Mais l'enseignant n'est jamais contraint d'organiser une phase de bilan car il peut toujours imposer une phase d'évaluation : c'est lui qui conclut. Cependant, dans ce cas, la phase liée au savoir visé qui pourrait suivre (que ce soit via un mésocontrat de reconnaissance de savoir ou d'institutionnalisation) comporte une incertitude d'autant plus grande quant à la participation des élèves qu'elle ne peut pas s'engager à partir d'un débat sur la validité des réponses et procédures des élèves.

En accord avec ce qui précède, nous allons donner ce que nous entendons dans la thèse par phase de bouclage. Elle permet de s'intéresser aux formes et contenus de savoirs dans des déroulements en classe dans le moment identifié précédemment. Cet outil théorique s'avère nécessaire pour préciser l'action didactique de l'enseignant en particulier lorsqu'il tente de voir si les élèves ont reconnu l'utilité de leur connaissance (savoir pragmatique) ou non. Dans l'appellation « phase de bouclage », « bouclage » fait référence aux boucles précitées dans le rapport entre connaissance et savoir défini par Conne (1992). Le mot « phase » renvoie au fait que cette notion peut constituer un outil pour étudier les déroulements en classe. Il souligne ainsi la parenté avec la phase de conclusion développée par Margolinas (1992).

La phase de bouclage a pour vocation de transformer la connaissance en savoir dans le processus savoir/connaissance/savoir. Elle est un moyen pour le professeur de faire cette transformation après un ou une série de problèmes que les élèves ont traités. Elle a pour but de clore le (ou la série de) problème(s), c'est le premier niveau de bouclage, celui étudié par Margolinas. Nous y ajoutons le fait que ce premier niveau a pour but d'installer un moment de mise en forme du savoir (pragmatique) en jeu susceptible d'avoir un sens pour les élèves

(c'est un deuxième niveau de bouclage). Cette mise en forme n'a pas lieu nécessairement à la fin de chaque problème traité. Elle est contenue potentiellement dans la phase de bouclage et est une étape du processus d'institutionnalisation qui tend à rendre le savoir disponible aux élèves dans ses utilisations institutionnelles. Le sens est estimé soit via un problème soumis aux élèves qui précède la mise en forme (boucle connaissance/savoir), soit via un problème qui la suit (boucle savoir/connaissance/savoir). La tâche proposée aux élèves et l'activité qu'elle entraîne, notamment l'adidacticité qu'elle génère et la pertinence par rapport au savoir visé et aux savoirs anciens, conditionnent la phase de bouclage mais n'en sont pas des composantes. Quatre moments sont identifiés :
- l'accès à la validité des procédures et des réponses des élèves (avec les deux modalités évaluation et validation)[236],
- la diffusion des procédures et des réponses des élèves dans la classe,
- le débat intellectuel mettant en jeu les connaissances adéquates avec le savoir visé (dans une situation à potentialités adidactiques, il s'agit du remplacement du milieu matériel par la connaissance, susceptible d'être considérée comme un savoir),
- une mise en forme du savoir visé.
Les moments ne se succèdent pas nécessairement dans cet ordre, ni les deux niveaux de bouclage. L'appellation « moment » indique qu'il s'agit de contributions qui ne se déroulent pas forcément sur une durée d'un seul tenant. Cependant, les scénarios ne sont pas écrits à l'avance, entre autres du fait de l'incertitude inhérente aux trois premiers moments mettant en jeu les connaissances des élèves et leur interaction par rapport au milieu. Le dernier moment, celui d'une mise en forme, est particulier car c'est celui qui est visé *a priori* dans la phase de bouclage Il contient une dimension décontextualisée et dépersonnalisée liée à la nature du savoir en jeu, il engage la responsabilité du professeur. Ceci révèle la tension interne à la phase de bouclage entre les trois premiers moments et le dernier, celle entre connaissance (des élèves) et savoir (visé). Pour contribuer à la réduction de cette tension, un sous-moment peut être envisagé, celui concernant la sélection et la hiérarchisation des réponses ou procédures.

La dynamique d'une phase de bouclage, son organisation, est en lien avec certains éléments :
- les mésocontrats et microcontrats qui indiquent la répartition du partage de la responsabilité du savoir/connaissances entre les élèves (ou un élève ou un groupe) et le professeur (observables en particulier dans les aides et étayages de l'enseignant).
- le niveau de décontextualisation du savoir.
- la participation des élèves (qui ?, combien ?)
- la nature du savoir en jeu (obstacles épistémologiques, lien avec les concepts anciens)
- le niveau de connaissance des élèves (qui détermine entre autres quelles sont les connaissances anciennes liées au savoir nouveau).

3. Méthodologie

3.1 Choix des observations

a. Le choix du nombre de classes et de l'utilisation d'un manuel

Ces deux choix ne sont pas indépendants. Une analyse comparative des classes observées permet d'estimer les facteurs spécifiques provenant de la composante personnelle d'un professeur. Cependant, cette comparaison est facilitée si les classes observées suivent un

[236] C'est ce qui fait écho à ce que Margolinas appelle phase de conclusion. Les autres « moments » de la phase de bouclage, sont, nous semble-t-il, aussi envisagés dans l'article de 1992, mais ils ne sont pas présentés comme nous, puisque nous les lions à un deuxième niveau. Cette notion reste pour nous un outil théorique et elle ne comporte rien de prescriptif.

même scénario. En effet une analyse des différences entre les déroulements peut permettre de voir l'influence des éléments qui sont spécifiques à chaque classe. Or si le scénario est le même, il y a moins d'éléments qui sont spécifiques, mais il reste ce qui est du ressort de la composante personnelle de l'enseignant. Ainsi il est plus aisé d'y dégager le poids de cette composante personnelle. C'est pourquoi nous avons choisi deux classes, et deux classes qui suivent un même manuel. En outre l'utilisation d'un manuel scolaire est une pratique courante des professeurs des écoles, ce qui sert notre projet de proposition en direction des enseignants de classes « ordinaires ». Le manuel scolaire nous est aussi utile d'un point de vue méthodologique. Il nous donne en effet accès à l'ensemble des tâches données *a priori* aux élèves dans l'année scolaire, nous permettant ainsi d'inférer leurs connaissances anciennes et donc leurs stratégies probables, en particulier grâce à l'identification de l'itinéraire cognitif proposé.

b. Choix du manuel

Les manuels scolaires empruntent essentiellement deux types d'itinéraire le 1 et le 2, et plus couramment le premier (celui que propose Cap Maths). Une numération orale y sert de relais pour l'évolution de l'interprétation de la numération écrite : pour un des itinéraires c'est la numération parlée en France et pour l'autre c'est une numération « régulière ». L'interprétation convoquée pour cette numération orale est arithmétique multiplicative, les écritures chiffrées gardant leur rôle de forme écrite de la numération orale peuvent ainsi théoriquement être interprétées de la même façon[237]. Les désignations parlées en France étant nécessairement un savoir ancien des élèves, pour « dire » les nombres ou pour dénombrer, elles sont susceptibles d'intervenir dès le moment de première rencontre signalé, même si elles ne sont pas *a priori* convoquées dans l'itinéraire. En outre, tôt ou tard de nouveaux liens doivent se faire entre la numération parlée en France et la numération écrite chiffrée (disponibilité des connaissances). Dans un itinéraire de type 1, la numération parlée en France est explicitement utilisée dans le moment de première rencontre : ici se nouent simultanément les liens entre ancien et nouveau. Par un effet « loupe », choisir un itinéraire de type 1 peut alors nous permettre d'observer la complexité du jeu des interprétations qui interviennent tôt ou tard dans l'enseignement et l'apprentissage de la numération écrite chiffrée. Nous pouvons ainsi obtenir des éléments de réponse à nos questions qui ont un intérêt générique, c'est-à-dire ici quel que soit l'itinéraire cognitif d'enseignement.
Le scénario doit posséder cependant certaines potentialités, en particulier la possibilité de disposer d'un milieu capable de rétroactions permettant de faire évoluer les connaissances des élèves (en référence à la théorie des situations didactiques). Ceci permet ainsi aux élèves d'emprunter une certaine diversité de cheminements cognitifs et donc de considérer un large panel de paramètres du côté des élèves. D'après l'analyse que nous en avons déjà faite dans le chapitre 6, le choix de « Cap Maths » nous semble ainsi adapté pour répondre à nos questions. La séquence « grand Ziglotron » est celle dans laquelle les chiffres de l'écriture chiffrée sont reliés pour la première fois à la notion de dizaine et d'unité. C'est donc le moment de l'introduction de l'écriture chiffrée dans son aspect positionnel auquel font référence les questions posées et c'est donc celui qui va être choisi pour nos observations.

c. Le choix des classes et des enseignants

Comme Robert (2002-2003), ce qui nous intéresse c'est ce qui peut être appris en classe par les élèves. L'activité est source d'apprentissage (par hypothèse de la double approche), mais

[237] Nous avons signalé les points communs et les différences entre une interprétation arithmétique multiplicative envisageable pour certaines numérations parlées et l'interprétation de référence de la numération écrite chiffrée. En ce qui concerne les enjeux spécifiques au moment de la première rencontre, ces deux interprétations coïncident au niveau des connaissances en jeu dans l'apprentissage de la numération écrite chiffrée.

nous nous limitons à l'étude des déroulements en classe en liaison avec les activités des élèves et de l'enseignant pour le moment en classe qui nous intéresse, sans étudier le lien activités/apprentissages. Nous avons indiqué que cela suppose un rapport rationnel de l'enseignant avec ce qu'il fait dans son métier. C'est cette hypothèse qui légitime la recherche de déterminants et variables indépendants de facteurs plus personnels : affectifs, sociaux, psychologique. Nous n'étudions pas ces derniers facteurs, sans pour autant nier leur importance dans tel ou tel contexte. Autrement dit nous voulons considérer des déroulements dans lesquels ils sont susceptibles d'avoir un poids moindre ou, tout au moins, dans lesquels nous serons en mesure de pouvoir envisager de répondre aux questions sans les mettre au premier plan. Or ceux-ci sont susceptibles d'intervenir de manière plus importante lorsque l'enseignant est débutant ou/et dans des classes dans lesquelles le rapport au savoir des élèves nécessite une gestion spécifique, comme dans des classes « difficiles »[238]. C'est pourquoi nous choisissons des enseignants expérimentés, c'est-à-dire ayant plusieurs années d'exercice en CP et des classes non ZEP (Zone d'éducation prioritaire). Par ailleurs, nous devons aussi choisir des enseignants qui ne s'éloignent pas trop *a priori* du scénario proposé par le manuel. A la fois pour pouvoir faire une comparaison, mais aussi car ce scénario a certaines potentialités adidactiques qui sont utiles à notre analyse. Ce choix des enseignants est fait à l'aide d'entretiens préliminaires.

d. Les données

Pour chacune des deux classes de CP observées, durant l'année scolaire 2008-2009, les séances observées sont toutes les séances « grand Ziglotron », c'est-à-dire quatre séances pour chaque classe. Elles ont été filmées intégralement. Nous ne pouvons pas nécessairement avoir accès aux interprétations des élèves en regardant leurs actions ou paroles. Nous ne pouvons pas non plus les questionner pendant la séance, alors qu'après il nous semble qu'ils ne vont pas nécessairement utiliser les mêmes stratégies. En outre, les élèves de cet âge peuvent difficilement indiquer de manière verbale ce qu'ils ont fait. Nous pouvons néanmoins inférer les stratégies des élèves via une analyse des tâches dans les séances et des productions d'élèves que nous avons filmées ou recueillies[239]. Un élément essentiel pour nous est la teneur des échanges entre l'enseignante et les élèves. Nous ne pouvons pas y avoir accès avant et très difficilement après la séance. Le parti pris a donc été de suivre l'enseignant avec la caméra. Les informations que nous recueillons sont donc aussi celles qu'il a pu prendre.
Un entretien est fait après les séances avec chaque professeur afin d'éclairer leur choix et de voir leurs conceptions sur le nombre et l'enseignement de la numération (relation écrit/oral, éléments du projet, perception de la non congruence).

3.2 Méthodologie

Tout d'abord nous allons analyser les séances *a priori*, du côté de l'enseignant et du côté des élèves. Ensuite nous allons relever les indicateurs dans les déroulements. Puis nous allons les analyser en les mettant en perspective avec l'analyse *a priori*. Finalement à partir de cette analyse nous allons apporter des réponses aux deux questions posées. Nous allons donc procéder en quatre temps.

[238] Voir par exemple Butlen D., Dubut A, Masselot P., Ngono B., Peltier M-L. & Pézard M. (2003) ou Butlen D., Masselot P. & Pézard M. (2002).
[239] Rappelons aussi que notre objectif n'est pas ici d'évaluer l'apprentissage des élèves.

a. L'analyse *a priori*

Nous faisons une analyse didactique *a priori* des tâches des élèves et de celles de l'enseignant. Cette analyse se fonde sur les prescriptions du manuel qui nous permettent d'analyser les tâches avant de voir les déroulements en classe. Nous précisons la tâche, y relevons les variables didactiques et les stratégies pour les élèves. Il s'agit de dégager les stratégies *a priori* des élèves de la tâche prescrite par le manuel. Certaines de ces stratégies sont indiquées par le manuel et d'autres non. Dans le déroulement, outre le fait que l'enseignant a pris connaissance des stratégies indiquées par le manuel, certaines autres peuvent être attendues par lui, mais d'autres encore ne le sont peut-être pas et ces dernières peuvent pourtant être utilisées par les élèves. Comme nous nous centrons sur les facteurs qui peuvent influer sur le déroulement cognitif de la séance et de la séquence, nous devons indiquer toutes les stratégies qui sont susceptibles d'intervenir, en particulier celles qui peuvent créer un « incident » au sens de Rogalski. Pour ce faire, nous allons tout d'abord indiquer toutes celles envisageables pour ensuite prendre en compte certains facteurs qui réduisent les possibles : les connaissances des élèves disponibles ou mobilisables (inférées de l'étude du parcours suivi par le manuel avant cette séance, des aspects culturels de certaines connaissances non enseignées en CP mais disponibles pour au moins certains élèves et des résultats de recherches) ainsi que certaines conditions spécifiques à la séance (disposition d'un milieu capable de rétroactions permettant de faire évoluer les connaissances des élèves, possibilités matérielles offertes, particularités liées à une situation de communication entre élèves). Il s'agit donc de délimiter un ensemble de stratégies « probables » du point de vue de l'analyse entreprise dans cette recherche.
A partir de cette analyse, nous précisons alors l'enjeu de la séance au niveau cognitif et replaçons ce dernier dans l'itinéraire cognitif d'enseignement prescrit par le manuel. Cette analyse permet ensuite de déterminer les tâches des enseignants selon la composante cognitive et médiative, en mettant en perspective les indications du manuel et les contraintes institutionnelles et sociales : celles liées aux programmes, aux temps dévolus aux séances, aux spécificités de la classe, de l'établissement. Ceci nous amène à dégager une vue d'ensemble de la complexité (et pluralité) du déroulement potentiel des séances. Dans cette analyse a priori, nous ne tenons pas compte des conceptions du professeur sur la notion en jeu, sur les apprentissages ou sur l'enseignement. Nous déterminons un champ des possibles sans préjuger de l'influence de la composante personnelle de l'enseignant. Nous allons pouvoir apprécier son influence grâce aux analyses du déroulement des deux classes et des entretiens post-séance des enseignants, en inférant le projet de l'enseignant. La comparaison entre les deux classes permet finalement de mieux apprécier le rôle de cette composante personnelle dans le jeu des différentes interprétations.

b. Les indicateurs dans les déroulements

Nous faisons tout d'abord un découpage des déroulements selon le « lancement », la « réalisation de la tâche » par les élèves et la « mise en commun ». Celui-ci pourra s'analyser avec la théorie des situations via les contrats entre les élèves et l'enseignant. Ce travail est présenté en annexe pour faciliter la lecture. Ensuite, le découpage des déroulements en différents épisodes doit permettre de le mettre en rapport avec notre analyse *a priori*. Pour réaliser ce découpage, nous relevons la tâche prescrite aux élèves (par l'enseignant) et l'activité (observée) de l'enseignant et des élèves. Nous relevons les variables didactiques utilisées et la teneur des échanges entre enseignant et élève(s), tout particulièrement les incidents.
Les déroulements des séances ne seraient pas nécessairement les mêmes si les conditions de classe n'étaient pas telles qu'elles sont, par exemple si l'enseignant avait plus de temps et moins d'élèves. Cependant, puisque nous voulons prendre en compte les facteurs inhérents à une classe « ordinaire », nous allons considérer ces conditions, comme des catalyseurs, des

déclencheurs, des « loupes » qui permettent de mettre en exergue les difficultés propres à l'enseignement en classe de la numération au CP. Nous faisons cette hypothèse en accord avec la double approche, qui suppose que les pratiques des enseignants sont stables et cohérentes. Ainsi, bien qu'elles puissent être provoquées par des motifs conjoncturels (des raisons matérielles par exemple) ou liées à certaines spécificités de la classe (composante sociale par exemple), nous allons nous intéresser *a priori* à toutes les interactions qui peuvent être interprétées comme des incidents. Cependant, nous n'allons pas faire un relevé de chaque incident car notre but n'est pas de caractériser la pratique d'un enseignant comme le fait par exemple Roditi (2005). Nous allons analyser plus particulièrement certains incidents qui concernent directement la direction prise par la séance au niveau cognitif et nous les replaçons dans un contexte plus global.

Nous découpons le « lancement » en particulier selon des épisodes contenant les différentes informations sur la tâche ou les sous-tâches. Nous indiquons les éléments qui permettent de considérer si la tâche est modifiée (les aides diverses) et à l'initiative de qui. Nous sommes en particulier attentif aux stratégies et différentes formes de réponses qui interviennent, et, dans les incidents retenus, si elles sont validées et encouragées par l'enseignant, ou au contraire récusées ou ignorées.

Nous découpons la « réalisation de la tâche des élèves » selon des épisodes concernant les différentes interventions entre l'enseignant et les élèves. Comme précédemment, nous relevons les stratégies et les différentes formes de réponses en jeu. Dans les incidents retenus nous notons les éléments qui permettent de voir si elles sont validées ou évaluées, récusées ou ignorées par l'enseignant ainsi que ceux qui permettent d'en apprécier la teneur au niveau cognitif (en particulier pour identifier les propriétés relatives aux interprétations en jeu). Nous notons aussi les différentes informations prises par l'enseignant pour préparer la phase de bouclage.

Nous découpons la « mise en commun » selon des épisodes qui nous permettent de savoir sur quoi elle porte : respect des consignes, effectuation de telle ou telle sous-tâche, procédures ou résultats, validation des procédures ou des réponses, argumentations ou autre. Pour repérer ce qui est l'enjeu et le niveau d'institutionnalisation ainsi que les facteurs qui ont contribué à la forme prise par la phase de bouclage nous découpons de manière chronologique son déroulement. Pour ce faire nous relevons les enjeux des interactions en nous appuyant sur des passages significatifs de la transcription des séances, en particulier, dans des incidents, le discours de l'enseignant et celui des élèves validé/évalué par ce dernier ou au contraire ignoré ou invalidé. Nous indiquons certaines justifications de ses décisions que l'enseignant a déclarées dans les entretiens post-séance.

c. L'analyse des déroulements en classe

Nous analysons séparément chaque séance, la situation, les stratégies et la conduite de la séance par l'enseignante. Nous nous référons aux indicateurs et à l'analyse *a priori*.

Nous regardons quel a été le milieu installé. En particulier nous observons la phase de lancement pour voir quel découpage de la tâche est intervenu ou non, et quelles stratégies ont pu être indiquées ou induites (par l'enseignante, les élèves, le contexte).

Nous mettons en exergue ensuite les stratégies que nous pouvons inférer de nos observations, pendant la réalisation de la tâche, pendant la mise en commun. Nous indiquons qui en a été à l'initiative.

Finalement, nous relevons l'enchaînement des contrats et ce qui les a provoqués, en particulier les microcontrats installés.

d. Les réponses aux questions

Nous répondons aux questions une première fois à la suite de l'analyse de chacune des deux séquences. Ce sont des facteurs relatifs à la composante médiative et à la composante cognitive qui sont ici privilégiés.

Dans la conclusion, la comparaison entre les deux classes permet de répertorier les points communs, et donc ainsi de considérer les caractères spécifiques à chaque classe (en particulier les conceptions des enseignants sur le savoir et l'enseignement) puis d'obtenir des informations sur ce qui peut être considéré comme générique, en le différenciant de ce qui est spécifique. C'est ici que nous prenons plus particulièrement en compte les facteurs relatifs aux trois autres composantes de la double approche : sociale, institutionnelle et personnelle.

Cette analyse permet d'estimer le jeu des interprétations des numérations et la raison de leur survenue. Ceci concerne l'itinéraire cognitif proposé par le manuel et dans chaque classe. De manière plus générale cela concerne les difficultés de l'enseignement de la numération au CP, compte tenue de la complexité des relations entre la numération parlée en France et la numération écrite chiffrée que nous avons décrite dans les deux premières parties de la thèse.

CHAPITRE VIII
Analyse de séances en classe

Introduction

Ce chapitre est consacré à l'analyse de la réalisation dans deux classes de la séquence « Grand Ziglotron » de « Cap Maths ». Notre méthodologie a été indiquée à la fin du chapitre précédent, voici comment elle se décline dans les paragraphes du chapitre.

Dans un premier temps nous faisons une analyse *a priori*. Dans les paragraphes 1.1 à 1.4 il s'agit des tâches proposées aux élèves dans chacune des séances, puis, dans le paragraphe 1.5, de celle de l'enseignant. Pour cette analyse a priori, nous nous référons au cadre théorique de la théorie des champs conceptuels et à celui de la double approche, tels que nous les avons précisés pour notre travail aux chapitres 4 et 7.
Nous découpons la tâche en sous-tâches. Ceci nous permet de faire une analyse fine des stratégies des élèves grâce en particulier au travail fait dans le chapitre 4 sur les stratégies et cheminements cognitifs. Ainsi, nous pouvons ensuite mieux comprendre les éventuels découpages de la tâche faits par l'enseignant. En les mettant en perspective par rapport à ceux théoriquement possibles, ceux attendus par le manuel et ceux que nous analysons comme les plus probables, cela nous donne une première lecture des activités potentielles des élèves et donc des écueils éventuels. Ceci nous permet alors d'analyser la tâche de l'enseignant.

Les paragraphes 2 et 3 sont respectivement consacrés à l'analyse des séances de la classe de Mme B. et de Mme H. Pour chaque séance nous rappelons la tâche et le découpage, nous analysons la situation installée en nous centrant sur le milieu, nous relevons les stratégies des élèves et de l'enseignante et finalement nous précisons le guidage de cette dernière avec en particulier les microcontrats.
La première question demande une réponse en termes de description des interprétations en jeu. Pour faciliter la lecture, nous donnons ces réponses à la fin de l'analyse de chacune des quatre séances, ceci pour chaque classe. La deuxième question aborde l'influence relative de différents paramètres sur le jeu des interprétations décrit précédemment. Elle nécessite de prendre en compte la globalité de la séquence. Pour chaque classe, nous donnons des premiers éléments de réponses à la fin de la séquence, § 2.2 et 3.2. Ici ce sont des facteurs didactiques concernant la composante médiative et la composante cognitive qui vont être privilégiés.

Dans le paragraphe 4 nous croisons les analyses pour cette fois-ci incorporer des éléments des trois autres composantes : institutionnelle, sociale et personnelle.

Les indicateurs sont donnés en annexes. Ils sont présentés sous forme de tableaux comportant deux colonnes. Ils permettent d'indiquer le découpage de chacune des séances en épisodes et sous-épisodes ainsi que de relever la nature et le traitement des incidents, tout en décrivant les stratégies utilisées. La transcription complète des séances est donnée en parallèle, ce qui permet de voir en même temps les données et le traitement qui en a été fait. Cette transcription est extraite des vidéos. Ceci nous a permis de relever non seulement tous les échanges oraux, mais aussi d'obtenir des renseignements sur le (dé)placement des intervenants, sur leurs gestes ou sur les productions écrites au tableau. Comme nous avons suivi systématiquement l'enseignante dans ses déplacements, nous avons accès aux mêmes informations qu'elles. Ainsi, quand elle s'entretient avec un élève ou un petit groupe d'élèves, nous avons pu filmer la plupart du temps les productions des élèves et leurs gestes. En outre, les deux enseignantes proposent le plus souvent dans une « mise en commun » une validation exhaustive de ce qu'on fait les élèves. Leur production est ainsi souvent rendue publique et nous avons pu y avoir accès. Ce travail de relevé de données résulte de nos choix méthodologiques et théoriques. Il a nécessité de nombreux visionnages. Dans la présentation que nous avons adoptée, notre objectif est de rendre compte d'une pluralité d'informations et de laisser nos choix apparents. Nos analyses se réfèrent à ces tableaux de manière incontournable.

La séquence d'apprentissage comporte quatre séances qui ont toutes le même contexte. Il s'agit de faire une commande d'une certaine quantité de « boutons » figurés par des carrés sur une fiche « Ziglotron », ce dernier étant un robot d'une histoire racontée aux élèves. Cette commande permet de réparer des Ziglotrons. Voici un descriptif général des séances, elles sont détaillées au début du paragraphe concernant leur analyse *a priori* spécifique.
La séance 1 est décrite dans le guide de l'enseignant p.151. Elle requiert les fiches 34, 35 et 36 du matériel photocopiable fourni avec le manuel Cap Maths (des Ziglotrons dessinés sur une feuille de format A4 sur lesquels sont figurées les collections de référence) ainsi que des ciseaux et une feuille blanche par équipe de deux élèves. La commande se fait sans restriction sur la formulation et le type de boutons disponibles (seuls ou en plaques de dix).
La séance 2 est décrite dans le guide de l'enseignant p.152 et 153. Elle requiert les fiches 38, 39, 40 et 41 du matériel photocopiable fourni avec le manuel Cap Maths (des Ziglotrons dessinés sur une feuille A4 et un bon de commande pré-rempli à compléter) ainsi que des ciseaux et une feuille blanche par équipe de deux, avec une formulation imposée par écrit (bon de commande) et un nombre de boutons isolés limité à neuf par commande.
La séance 3 est décrite dans le guide de l'enseignant p.156 et 157. Elle requiert les fiches 37, 41 et 42 du matériel photocopiable fourni avec le manuel Cap Maths (des Ziglotrons dessinés sur une feuille A4 et un bon de commande à compléter) ainsi que des ciseaux et une feuille blanche par équipe de deux. C'est le même déroulement que celui de la séance 1, mais cette fois-ci un seul Ziglotron, commun à tous, est en jeu : chaque élève doit faire le bon de commande.
La séance 4 est décrite dans le guide de l'enseignant p.159 et 160. Elle requiert le fichier élève p. 70 exercices 2 et 3. Elle consiste principalement à compléter des bons de commande.
Nous commencerons par l'analyse a priori du scénario décrit dans le guide de l'enseignant, d'abord du point de vue des tâches proposées aux élèves puis de celui des tâches prescrites aux enseignants. Nous analyserons ensuite le déroulement dans chacune des deux classes avant de tirer quelques conclusions de la comparaison de ces déroulements.

1. Analyse *a priori*

Nous allons détailler la séance 1. Du fait de la parenté des tâches proposées successivement, l'analyse des autres séances se fera en référence à celle-ci.

1.1 Séance 1

Pour cette séance 1, nous allons découper les tâches en sous-tâches pour indiquer les stratégies *a priori*. Ce découpage en sous-tâches est un moyen de décrire ce que les élèves doivent faire pour réussir la tâche globale. Il est lié à des commodités de l'analyse : il est pratique pour décrire le déroulement. Du point de vue cognitif il faut considérer l'ensemble des différentes tâches et sous-tâches et leur articulation. Certains élèves n'ont pas la même tâche que d'autres, ils doivent avoir en tête l'ensemble au moment de la confrontation et de la discussion. Ainsi la tâche globale est censée être problématique pour les élèves alors que chacune des sous-tâches peut ne pas l'être. La tâche ne peut produire des connaissances que si on considère cet ensemble. En conséquence dans l'analyse des sous-tâches, nous essayons de tenir compte de la tâche dans son ensemble. Les sous-tâches sont donc vues comme des moments successifs d'exécution de la tâche plutôt que comme des tâches prescrites l'une après l'autre. Tous les élèves n'ont pas la même tâche à faire. La tâche I est celle des élèves « clients », la tâche I bis celle des élèves « marchands ».

a. Description des tâches

Tâche I

Il s'agit d'obtenir une collection d'objets (des carrés en papier symbolisant des boutons) dont le cardinal est donné par une collection de référence consistant en des carrés sur une feuille A4 (la fiche Ziglotron). Ensuite il s'agit de vérifier que ces deux collections ont le même cardinal. Dans le guide de l'enseignant, certains éléments sont précisés. La collection de référence est constituée de carrés dessinés répartis de manière non organisée sur la feuille A4 représentant le robot Ziglotron. La collection à obtenir après la commande n'est pas visible en même temps que la collection de référence. Aucun autre matériel n'est à la disposition des acteurs. Un seul voyage est permis pour aller chercher la collection à obtenir. Cette dernière doit avoir le même cardinal que la collection représentée. Deux types de conditionnement sont disponibles pour la collection à aller chercher : des carrés de papier, tous de même format, superposables à ceux de la collection de référence ainsi que les mêmes carrés solidaires en plaques de forme rectangulaire 1x10 ou 2x5. La tâche s'effectue par groupe de deux élèves, un seul se déplaçant pour formuler la demande. Après avoir obtenu la collection, le binôme d'élèves doit effectuer une correspondance terme à terme entre les deux collections par superposition (après un éventuel découpage des carrés obtenus lorsqu'il s'agit des plaques). Notons que plusieurs lieux de vente sont prescrits, mais leur nombre n'est pas indiqué. Les critères de choix des élèves auxquels est assignée telle ou telle tâche (vendeur, client) ne sont pas spécifiés.

Tâche I bis

Il s'agit de réaliser une ou deux collections d'objets (des carrés en papier symbolisant des boutons ou/et des plaques rectangulaires symbolisant dix boutons) dont le cardinal est donné par un signifiant oral (le message délivré par un des élèves « clients »). D'après les précisions données dans le guide de l'enseignant, cette tâche se fait en présence de l'élève qui arrive avec son message. Comme il a déjà été signalé, les interactions peuvent modifier le message initial, notamment afin que le marchand le comprenne. Ce dernier peut aussi essayer d'interpréter la commande quand celle-ci lui semble inadéquate : par exemple un message stipulant trente-sept plaques de dix peut être changé en trente-sept boutons. Notons que plusieurs lieux de vente sont prescrits, mais leur nombre n'est pas indiqué. Les critères de choix des élèves pour remplir telle ou telle tâche (vendeur, client) ne sont pas spécifiés non plus. Précisons finalement que cette tâche se répète plusieurs fois pour un « vendeur », à chaque fois qu'un élève « client » se présente. Néanmoins, elle est conditionnée par la teneur de chaque message, teneur *a priori* différente d'un message à l'autre.

b. Variables permettant de définir la tâche

Nous allons les exprimer de manière exhaustive en indiquant celles qui sont déjà fixées et celles qui ne le sont pas.

Variables fixées par la tâche déduite des prescriptions du guide de l'enseignant

- Nombre, conditionnement, forme et matériaux utilisés pour constituer la collection à aller chercher (les « boutons » réalisant la commande) : morceaux en papier blanc de forme carrée de 7mm de côté ou bien rectangles quadrillés de dix carrés de 7mm de côté agencés soit en 1x10, soit en 2x5. Le nombre disponible n'est pas explicitement indiqué mais de la tâche prescrite, de la séance 2 et des commentaires, on peut inférer que la tâche attendue nécessite que le vendeur dispose d'un grand nombre de telle ou telle forme de conditionnement.

- Nombre, disposition, forme et matériaux utilisés pour la collection de référence qui sert à élaborer le message (les emplacements des boutons à aller chercher) : carrés blancs de 7 mm de côté dessinés dans une position prototypique sur une feuille A4 et répartis de manière non organisée et non groupées à l'intérieur du contour d'une figure représentant un robot dont le corps est vu de face (fiche Ziglotron) ; trois zones sont distinguables, l'une centrale de forme rectangulaire (environ 10x12 cm) comporte la majorité des carrés, les deux autres sont des demi-disques, d'aire deux à trois fois plus petite que le rectangle, qui comportent de 3 à 5 carrés chacun ; trois versions différentes de fiches Ziglotron sont proposées comportant respectivement au total 23, 30 et 37 carrés.
- Nombre d'essais pour obtenir la collection : un seul
- Matériel disponible : une feuille de papier vierge (indiquée dans un résumé mais dont il n'est pas fait référence ultérieurement), une paire de ciseaux.
- Emplacement du lieu où se trouve la fiche Ziglotron et du lieu où se trouve la collection à rapporter : non explicitement indiqué mais il est clairement attendu que la collection de référence ne soit pas visible de l'endroit où l'élève passe commande (chez le vendeur).
- Nombre d'élèves réalisant la tâche I (client) et répartition des rôles : deux élèves ensemble pour élaborer un message oral en direction du marchand puis pour « réparer » le Ziglotron, un seul des deux (le même), pour aller délivrer le message, vérifier éventuellement la collection délivrée et la rapporter.
- Nombre d'élèves réalisant la tâche I bis (marchand) et répartition des rôles : un seul élève par lieu de vente, en présence d'un autre élève donnant le message et éventuellement d'autres élèves attendant de délivrer leur message.
- Qualité de la personne devant demander la collection de boutons (client) : élève.
- Qualité de la personne devant donner la collection de boutons (marchand) : élève.

Variables non fixées dans le manuel

Le temps : il n'y a pas d'indication de temps, cependant l'appellation « séance », l'âge des enfants et les recommandations officielles pour le cycle 2 permettent d'en déduire que la durée globale attendue n'excède pas une heure, y compris les interventions de l'enseignant. Pour le vendeur, la durée est déterminée en partie par le nombre de clients qui vont s'adresser à lui.
Autre matériel disponible et lieu : crayon, stylo, gomme à l'endroit où se trouve la fiche Ziglotron (lieu d'élaboration du message) ou/et à l'endroit où se trouve la collection à rapporter (lieu de livraison de la collection).
Nombre d'essais pour préparer la commande : non spécifié.
Nombre de répétitions de la tâche : non fixé, mais limité par la durée de la séance et le nombre d'élèves dans la classe qui peuvent se présenter avec un message.
Le choix des élèves réalisant telle ou telle tâche ainsi que les emplacements.

c. Stratégies des élèves jouant le rôle des « clients » (tâche I)

Découpage en sous-tâches [240] :

Entre parenthèses est indiqué si la tâche prescrite s'effectue seul ou à deux.

[240] Certaines sous-tâches ne sont pas explicites dans le manuel mais à envisager au vu de l'ensemble de la tâche. Ainsi la sous-tâche I.4 « vérifier l'adéquation entre ce qui est demandé et ce qui est délivré » est induite par le fait d'obtenir une égalité entre le cardinal de la collection de référence et celle demandée. Cette sous-tâche constitue une introduction d'une étape intermédiaire non explicitement demandée dans la tâche prescrite.

Sous-tâche I.1 : de l'emplacement où se trouve la collection de référence, élaborer le message à transmettre (à deux).
Sous-tâche I.2 : se souvenir du message pour l'indiquer au marchand (un seul des deux élèves de la sous-tâche I.1, mais les deux doivent s'en souvenir au moment de la vérification).
Sous-tâche I.3 : indiquer le message au « marchand » (un seul élève, le même que celui de la sous-tâche I.2)
Sous-tâche I.4 : vérifier l'adéquation entre ce qui est demandé et ce qui est donné (un seul élève, le même que celui de la sous-tâche I.2 et 1.3, sous-tâche en interaction possible avec la personne jouant le rôle du vendeur qui est lui aussi un élève).
Sous-tâche I.5 : transporter la collection obtenue (un seul élève, le même que celui de la sous-tâche I.2, 1.3 et 1.4).
Sous-tâche I.6 : vérifier que les collections ont le même cardinal en faisant une superposition des « boutons » obtenus avec ceux figurés sur leur fiche. Cette sous-tâche est accomplie par les deux élèves de la sous-tâche I.1 (dont un seul des deux est concerné par les sous-tâches 1.2 à 1.5). Elle peut nécessiter l'utilisation de ciseaux et de colle.

Les stratégies

L'emploi de telle ou telle stratégie par les élèves dépend des variables didactiques indiquées auparavant mais aussi des connaissances de celui à qui est soumise la tâche et du déroulement en classe (les aides et indications supplémentaires). Dans l'analyse *a priori*, nous ne tenons pas compte de ces aides ; dans un premier temps nous ne tenons pas compte non plus des connaissances supposées des élèves et indiquons un large éventail des stratégies possibles. Les stratégies sont classées suivant la place relative des désignations parlées en français et écrites chiffrées. Dans les exemples sont indiquées principalement des stratégies non erronées. Ensuite nous relevons celles indiquées par le manuel et nous les mettons en perspective avec les stratégies probables en considérant cette fois-ci les paramètres *a priori* de la situation (en référence à la TSD) liés en particulier aux connaissances anciennes des élèves (déterminées *a priori* d'après l'itinéraire cognitif proposé par le manuel et les résultats de certaines recherches), aux contrats et au milieu. Ce sont ces stratégies probables que nous retenons dans notre travail de recherche comme celles finalement en jeu dans la situation proposée par le manuel. Nous analysons ici la situation du côté de l'élève, ce qui nous permet ensuite de l'analyser du côté de l'enseignant. Ce travail va être entrepris sous-tâche par sous-tâche, cependant nous donnons auparavant certaines indications du manuel car elles concernent l'ensemble de la tâche des élèves et nous pourrons nous y référer pour chacune des sous-tâches. Le guide de l'enseignant indique ainsi p.151 que « *Les contraintes apportées à la situation pour les séances 1 et 2 autorisent un assez grand nombre de procédures, alors que dans la séance 3 le recours à la signification de chaque chiffre de l'écriture des nombres est favorisé* ». En outre il est indiqué que « *Cette séance préparatoire ne vise pas à mettre en évidence de façon explicite la décomposition du nombre en groupements de dix et en unités* ». A noter que les stratégies indiquées concernent avant tout la sous-tâche I.1 et qu'elles sont visibles dans les rubriques intitulées « *Résolution et mise en commun* » et « *Synthèse* », et non pas dans la « *Présentation de la situation* ». Ceci est repris dans l'analyse da la tâche enseignante ultérieurement.

Sous-tâche I.1

De l'emplacement où se trouve la collection de référence, élaborer le message à transmettre (à deux).

L'éventail des stratégies a priori

Il s'agit d'exprimer le cardinal de la collection présente avec un signifiant (désignation parlée en France, désignation écrite chiffrée[241] ou autres[242]). Plusieurs stratégies sont envisageables selon les signifiants utilisés et la façon de les obtenir, sachant qu'est attendue à la fin une désignation orale. Voici des exemples :
Stratégie 1.1.a : stratégie OF
Est pertinente si les élèves demandent uniquement des boutons et pas de plaques.
Stratégie 1.1.b : stratégie OG
Est pertinente si les élèves demandent des plaques et des boutons, et s'ils ne se trompent pas de type de groupement, la maximalité n'est cependant pas nécessaire.
Stratégie 1.1.c : stratégie EC vers OF
Est pertinente si les élèves demandent uniquement des boutons et pas de plaques.
Stratégie 1.1.d : stratégie EC vers OG
Est pertinente si les élèves demandent des plaques et des boutons, et s'ils ne se trompent pas de type de groupement, la maximalité n'est cependant pas nécessaire.
Stratégie 1.1.e : stratégie OF vers OG
Est pertinente si les élèves demandent des plaques et des boutons, et s'ils ne se trompent pas de type de groupement, la maximalité n'est cependant pas nécessaire.

Dans le cas où ils disposent d'une feuille blanche et d'un crayon, il est possible d'utiliser en outre des productions graphiques (GraC). Comme nous l'avons indiqué dans la présentation des stratégies, d'autres possibilités sont théoriquement possibles, toutes celles amenant à une désignation des groupements ou à une désignation parlée en France : par exemple OF vers EC puis vers OG plutôt que OF vers OG directement. D'autres signifiants oraux ou « relais » sont aussi envisageables.

Les stratégies indiquées par le manuel

Pour la sous-tâche I.1, il est mentionné trois stratégies pour formuler le message : aucune information prise, un comptage un par un des boutons et enfin des groupements par dix. Il est indiqué qu'elles mènent alors à deux types de formulation, un certain nombre de boutons isolés ainsi qu'un nombre de plaques et un nombre de boutons isolés (que nous avons qualifié dans la thèse de « désignation des groupements »). En se replaçant dans l'itinéraire cognitif du manuel décrit dans la deuxième partie de la thèse, les deux premières stratégies peuvent mener à utiliser une désignation parlée en France du nombre de boutons et la troisième à la désignation des groupements (… plaques et …. boutons isolés), résultant d'un comptage. La stratégie consistant à analyser la désignation parlée en France pour la transformer en une désignation OG (stratégie OF vers OG) est aussi envisagée par le manuel : « *Il est possible que certains groupes aient d'abord dénombré un à un les boutons manquants sur le Ziglotron, puis demandé des plaques de dix et des boutons isolés.* ». La stratégie menant directement à une désignation des groupements par une stratégie organiser/configurer, c'est-à-dire sans comptage ni passage par une désignation parlée en France ne nous semble pas attendue.

Les stratégies probables

En reprenant l'itinéraire cognitif et l'analyse *a priori*, nous sommes amené à confirmer la probabilité que surviennent certaines stratégies envisagées par le manuel, c'est-à-dire :
- une stratégie de type OF (c'est-à-dire menant à une désignation parlée en France, sans autre signifiant)

[241] Cette possibilité est liée au fait de disposer ou non d'une feuille et d'un crayon.
[242] Par la suite nous nous restreindrons à quelques formes pour ces autres, en particulier les désignations de groupements (amenées par des stratégies OG).

- une stratégie de type OF, suivie d'une stratégie de type OF vers OG
Cependant, il nous semble que le seul comptage un à un n'est pas nécessairement utilisé par les élèves, en particulier, certains peuvent compter de deux en deux, voire de dix en dix. Ce dernier comptage peut alors mener à élaborer une désignation de type OG « … plaques (de dix) et … boutons isolés ».
La stratégie OG envisagée par le manuel de type « compter en unités », celle consistant à entourer les éléments de la collection et à compter les groupements et les boutons seuls nous semble par contre peu probable chez la majorité des élèves. Les recherches mettent en effet en avant la difficulté pour les élèves de cet âge de concevoir les groupements comme des objets (unités) comptables et de les utiliser comme signifiant du cardinal d'une collection. En outre le milieu matériel ne nous semble pas favoriser la stratégie OG. En effet d'une part il n'est pas rappelé dans le déroulement l'utilisation possible d'un crayon, d'autant que cela peut gêner la compréhension de la contrainte concernant l'oralité du message, d'autre part les élèves ne peuvent faire appel aux différents objets à commander (plaques et boutons seuls) que de manière mentale. Il leur est donc impossible de les mettre en correspondance physique (terme à terme) avec les objets de la collection figurée dont ils disposent. Par ailleurs nous n'avons pas relevé dans le manuel de tâches antérieures mettant en avant un procédé de marquage de groupements pour dénombrer (en entourant d'un trait par exemple). En ce qui concerne la stratégie OG cette fois-ci de type « organiser pour désigner » qui n'est pas envisagée par le manuel[243], elle nous semble effectivement improbable, en partie pour des raisons évoquées précédemment, mais aussi parce que le contrat devant une telle tâche auquel les élèves sont habitués implique de compter.
Une autre difficulté peut surgir lorsque les élèves comprennent la sous-tâche I.1 comme une tâche de dénombrement déconnectée de son but, c'est-à-dire indépendante de l'obtention d'une collection qui se présente sous forme de deux conditionnements différents[244], ce qui est favorisé par le milieu matériel présent au moment de cette sous-tâche. Cette compréhension peut être en outre induite par le fait que dans une séance antérieure[245], proche dans sa forme de celle-ci, les élèves ont eu pour tâche de dénombrer, et la seule stratégie probablement alors disponible était un comptage un à un, dont la difficulté pouvait faire oublier le but de la tâche (surtout en début d'année). Ainsi, est-il probable qu'un certain nombre d'élèves ne puissent envisager de désigner le cardinal d'une collection à l'aide de deux désignations parlées (une pour les plaques, l'autre pour les boutons seuls) au lieu d'une seule comme usuellement. A noter aussi que même dans le cas de constitution de groupements de dix, rien ne peut assurer de leur maximalité.
Par ailleurs, du fait des nombres en jeu (23, 30, 37), relativement grands pour une partie des élèves, même en fin de CP, ainsi que de la forme figurée de la collection, les recherches antérieures ont montré que des erreurs propres au comptage, en particulier dans l'énumération, sont fréquentes chez les élèves de CP : ces erreurs peuvent contribuer à leur faire oublier le but de la tâche.
Signalons aussi que le fait d'être deux et de se mettre eux-mêmes d'accord sur la stratégie et le message peut être source d'interactions qui peuvent modifier la tâche. Il se peut même qu'un des deux ne s'y attèle pas (problème de dévolution).
Un autre facteur peut augmenter la probabilité que survienne une stratégie menant à un message ne mettant pas en jeu des plaques de dix. C'est le fait d'anticiper sur la phase de validation. Si les plaques doivent être découpées, pourquoi demander des plaques ? Le fait de

[243] Rappelons ici encore que la différence entre « organiser pour désigner » et « compter en unités » n'est pas visible pour un observateur.
[244] Voire plus encore si les élèves envisagent de différencier les plaques de dix sous la forme de « rectangles » 2x5 ou « bandes » 1x10.
[245] Séquence de la première unité de l'année, l'unité 1, appelée « les Ziglotrons ».

demander des plaques et des boutons facilite ainsi la tâche du vendeur, mais pas de manière évidente celle du client (sauf éventuellement pour le transport). Il nous semble difficile pour un élève de 6 à 7 ans de se décentrer afin de considérer la tâche du vendeur et d'anticiper le transport au moment où il doit dénombrer la collection figurée.
Ajoutons pour finir une méprise sur la compréhension de la tâche qui peut influer sur la stratégie et le type de formulation adoptés. D'après les résultats de certaines recherches antérieures que nous avons rapportés, il est difficile d'envisager pour les élèves de cet âge un groupement comme un type d'objet dénombrable. Ainsi, le terme plaque n'est pas pris nécessairement comme un objet comptable mais comme un conditionnement de livraison. Ainsi un message comme « trente-six plaques » peut vouloir signaler « trente-six boutons à donner sous forme de plaques ». Le fait de donner le bon nombre de plaques est alors du ressort du marchand, ensuite la vérification pourra se faire dans la sous-tâche I.4 et 1bis.2 pour le marchand (phases qui peuvent se faire en commun). Qui plus est, si l'élève « client » sous-entend « x boutons à donner sous forme de plaques uniquement », il peut alors renoncer par anticipation à une telle formulation pour les nombres trente-six et vingt-trois et non pour trente.

Sous-tâche I.2

Se souvenir du message à indiquer au marchand (un seul des deux élèves de la sous-tâche I.1 est concerné *a priori*, mais l'autre peut lui donner des conseils)

L'éventail des stratégies a priori

Stratégie 1.2.a :
Utiliser les doigts. Du fait que le nombre de carrés est bien supérieur à dix (vingt-trois, trente ou trente-sept), il n'est pas possible de faire une correspondance terme à terme entre la quantité de carrés et les doigts. Ceci requiert donc d'utiliser les deux mains de manière indépendante (unités, dizaines). Ainsi cette stratégie ne peut être efficiente que pour les nombres 23 et 30, puisque pour 37, il y a plus de cinq unités.
Exemples :
A partir d'une désignation parlée en France, retrouver le nombre de dizaines en énumérant les dizaines (dix, vingt, trente,…) et utiliser les doigts d'une main pour retenir ce nombre. Retrouver le nombre d'unités avec le deuxième mot énoncé (aucune unité s'il n'y a pas de deuxième mot énoncé) et utiliser les doigts de l'autre main pour retenir ce nombre.
A partir d'une désignation écrite, traduire chaque chiffre en nombre de doigts (à l'aide par exemple de la comptine numérique ou d'une file numérique des écritures chiffrées).
A partir d'une production graphique de type 1, attribuer un doigt d'une main à chaque plaque dessinée et un doigt de l'autre main à chaque carré dessiné par association terme à terme (il est aussi possible de repasser par une désignation écrite chiffrée ou parlée en France).
Stratégie 1.2.b :
Mémorisation d'un message oral précédé éventuellement de la traduction du message écrit (si celui-ci a été élaboré) en un message oral. Dans ce dernier cas, voir certaines stratégies décrites pour la sous-tâche I.1.

Les stratégies indiquées par le manuel

Cette sous-tâche n'est pas mentionnée dans le manuel.

Les stratégies probables

Parmi les stratégies envisagées a priori, la deuxième, la mémorisation mentale, nous semble la plus probable. En effet, nous n'avons pas trouvé de traces dans le manuel d'un entraînement spécifique et antérieur des élèves à une mémorisation à l'aide des doigts de « grands » nombres (au-delà de vingt). Signalons par ailleurs que le rôle de l'écrit comme mémoire est en jeu dans la séquence « les Ziglotrons » de l'unité 1 de début d'année. Certains élèves peuvent s'en souvenir, mais le milieu matériel présent à ce moment ne favorise pas cette stratégie. Le fait que l'élève y ait recours ou non de manière autonome va alors être fonction du contrat installé en classe et des ressources matérielles disponibles.

Sous-tâche I.3

Indiquer le message au « marchand » (un seul élève, le même que celui de la sous-tâche I.2).

L'éventail des stratégies a priori

Stratégie 1.3.a :
Donner le message tel qu'il a été formulé initialement.
Stratégie 1.3.b :
Donner le message tel qu'il a été reformulé à l'étape précédente (sous-tâche I.2) pour s'en souvenir, par exemple montrer à l'aide des doigts.
Stratégie 1.3.c :
Reformuler le message. Les stratégies dépendent du message initial et du message reformulé. Elles ont été déjà énoncées.
Exemples :
Le message initial est oral « trente-sept », celui qui est transmis est « trente-sept plaques ». Il y a contextualisation de la formulation.
Le message écrit est oral « trente-sept », celui qui est transmis est « trois plaques et sept boutons ». Il y a contextualisation de la formulation et transformation du message (ici de type OF vers OG).

Les stratégies indiquées par le manuel

Cette sous-tâche n'est pas envisagée par le manuel.

Les stratégies probables

Les stratégies que nous avons indiquées dans l'analyse a priori nous semblent toutes probables. En particulier, le milieu ayant changé pour l'élève « client » puisqu'il peut voir ou/et manipuler la collection qu'il a commandée, il est possible que le message initial soit reformulé. Ces stratégies sont donc dépendantes du message initial et de la prise en compte du nouveau milieu par l'élève.

Sous-tâche I.4

Vérifier l'adéquation entre ce qui est demandé et ce qui est donné (un seul élève, le même que celui de la sous-tâche I.2 et 1.3, ainsi que l'élève « marchand »).

L'éventail des stratégies a priori

Cette sous-tâche permet des interactions entre la personne jouant le rôle du marchand (tâche Ibis.2) qui est un élève d'après la prescription du manuel et le « client » émetteur du message. De ce fait, il est possible que le message soit reformulé plusieurs fois voire (ré)interprété. Il peut alors prendre beaucoup de formes. Du fait des différents conditionnements des carrés disponibles, les reformulations et interprétations peuvent avoir lieu à ce sujet (« tu me dis trente-sept mais tu veux trente-sept quoi ? »). Ces reformulations peuvent être du fait de l'élève client seul, de l'élève marchand seul ou des deux. Cette sous-tâche de vérification de l'adéquation entre ce qui est demandé et ce qui est donné (qui n'est pas explicitement prescrite) peut se faire alors soit en considérant le message initial, soit en considérant le message effectivement transmis (sous-tâche I.3), soit encore avec le message transformé après les interactions vendeur/client. De plus la vérification peut avoir lieu en même temps que la

délivrance de la commande ou bien après celle-ci. Le « client » et le « marchand » peuvent aussi faire la tâche simultanément.
Une première stratégie est de dénombrer la collection obtenue. Ensuite il s'agit de comparer la désignation obtenue avec celle utilisée pour passer la commande. Elles commencent donc par une des stratégies ayant pour but de dénombrer une collection, et se poursuivent par des stratégies de comparaison de signifiants : il peut s'agir de comparer deux désignations de même type de signifiant (deux désignations parlées en France par exemple) ou bien relevant de deux différents (une désignation parlée en France et une désignation sous forme de plaques de dix par exemple). Chaque stratégie initiale se décline alors en plusieurs stratégies selon les signifiants utilisés et la façon de les obtenir, ce qui décuple le nombre de possibilités.
Une deuxième stratégie est de tenter de constituer une collection dont le cardinal est exprimé dans le message à partir de celle délivrée et de voir s'il y a adéquation : à la différence de la première stratégie, le processus de dénombrement s'arrête au moment où il est possible de voir s'il y a trop ou pas assez de boutons délivrés. Dans le cas où le dénombrement amène à une désignation de même type que celle employée pour le message (une désignation parlée en France par exemple), ceci évite de comparer deux signifiants de type différent.
En résumé, les stratégies envisageables commencent par une stratégie menant à la désignation du cardinal d'une collection (OF, EF, OG), ensuite une comparaison entre deux désignations de même type doit se faire (cf. le paragraphe à ce sujet dans le chapitre 4), ce qui demande éventuellement de traduire une des deux désignations (la désignation qui vient d'être obtenue ou celle ayant servi pour la commande) nécessitant une stratégie de type OF vers OG, OG vers OF (ou une variante avec l'intermédiaire d'un autre signifiant).

Les stratégies indiquées par le manuel

Cette sous-tâche n'est pas envisagée par le manuel.

Les stratégies probables

Les stratégies que nous avons indiquées dans l'analyse a priori nous semblent toutes probables et leur probabilité sera fonction de la forme du message délivré et des connaissances anciennes des élèves. Par exemple une collection délivrée sous forme de plaques de dix incite au dénombrement utilisant des groupements par dix plus qu'une collection délivrée sous forme de boutons/carrés seuls. Par ailleurs, à la différence des stratégies de la sous-tâche I.1, les dénombrements peuvent être effectués en déplaçant les objets (des carrés de papier et/ou des rectangles de papier quadrillés en dix carrés) au lieu par exemple de noter les objets déjà dénombrés en les marquant ou les entourant à l'aide d'un crayon. En outre, comme précédemment, du fait de ce changement de milieu pour l'élève « client » (milieu matériel et du fait des interactions avec l'élève « marchand »), il est possible que le message initial soit à nouveau reformulé dans cette sous-tâche.

Sous-tâche I.5

Transporter la collection obtenue (un seul élève, le même que celui de la sous-tâche I.2, 1.3 et 1.4).

L'éventail des stratégies a priori

C'est une sous-tâche qui n'engage pas de stratégies mathématiques. Nous la signalons, car des pertes peuvent survenir. Ce qui a une incidence sur la validation. Les stratégies envisageables concernent l'utilisation d'un contenant pour le transport.

Les stratégies indiquées par le manuel

Cette sous-tâche n'est pas envisagée par le manuel.

Les stratégies probables

Certains élèves peuvent prendre des initiatives pour l'utilisation d'un contenant, suivant le contrat établi en classe et les ressources matérielles connues des élèves.

Sous-tâche I.6

Vérifier que les collections sont de même cardinal en faisant une comparaison terme à terme (superposition faite par les deux élèves, ceux de la sous-tâche I.1).

L'éventail des stratégies a priori

La stratégie est indiquée par la tâche et elle peut nécessiter un découpage lorsque des plaques ont été obtenues. Signalons dans le même esprit (c'est-à-dire sans effectuer de dénombrement), une autre stratégie possible pour valider, mais qui n'est pas celle prescrite. Elle consiste à associer terme à terme les groupements obtenus et les groupements que l'on peut faire sur la fiche Ziglotron et qui ont pu y être déjà représentés.

Les stratégies indiquées par le manuel

Cette sous-tâche est accomplie par les deux élèves, ceux de la sous-tâche I.1 dont un seul des deux est concerné par les sous-tâches 1.2 à 1.5. Le manuel indique seulement que « *Les boutons vendus en plaques doivent être découpés avant d'être placés sur le Ziglotron* ». Elle peut donc nécessiter l'utilisation de ciseaux et de colle.

Les stratégies probables

La stratégie que nous avons signalée *a priori* sur cette association terme à terme est probable : l'association terme à terme entre une collection figurée et une collection manipulable est une tâche déjà connue des élèves. Les objets manipulables et ceux figurés se superposent exactement.

Les différentes manipulations (les carrés à découper sont assez petits, l'emploi des ciseaux et de la colle n'est pas aisé pour des enfants de cet âge) peuvent cependant poser des problèmes aux élèves et les amener à « oublier » le sens de cette sous-tâche dans la tâche I, c'est-à-dire vérifier que la commande délivrée convient : ils peuvent par exemple considérer que la tâche consiste à « bien » découper et à « bien » superposer. A l'opposé, même si ce n'est pas la tâche demandée, ils peuvent avoir le souci de vérifier s'ils ont obtenu le bon nombre de boutons autrement que par la stratégie prescrite. Il leur est alors possible de valider le résultat par d'autres moyens, par exemple en recomptant les deux collections et en comparant les désignations obtenues (voir les stratégies indiquées à ce sujet) ou encore en faisant une comparaison groupe à groupe. Cette dernière nous semble cependant peu probable du fait en particulier que le marquage initial des groupes (en les entourant) est lui-même peu probable. Signalons en outre que le fait de vivre une situation où les causes d'erreurs sont multiples (et pas nécessairement mathématiques) ne permet pas facilement aux élèves de cet âge d'identifier quelle a été la cause du résultat obtenu (que ce soit un échec ou une réussite). Ce sont des points que nous reprenons dans l'étude de la tâche de l'enseignant.

d. Tâche et stratégies des élèves jouant le rôle des « marchands » (tâche Ibis)

Découpage en sous-tâches

Sous-tâche Ibis.1 : réaliser une ou deux collections d'objets (des carrés en papier symbolisant des boutons ou/et des plaques rectangulaires symbolisant dix boutons) dont le cardinal est donné par un signifiant.

Sous-tâche Ibis.2 : vérifier l'adéquation entre ce qui est demandé et ce qui est donné.

Les stratégies

Les stratégies dépendent du type de message. Nous allons nous limiter ici aux messages utilisant une désignation parlée en France ou une désignation des groupements dont la forme attendue est de type « ... plaques (ou barre ou …) (de dix) et ... (boutons) ».

Sous-tâche Ibis. 1

Réaliser une ou deux collections d’objets (des carrés en papier symbolisant des boutons ou/et des plaques rectangulaires symbolisant dix boutons) dont le cardinal est donné par un signifiant oral.

L’éventail des stratégies a priori

Que ce soit une désignation parlée en France ou une désignation des groupements, il s'agit d'élaborer une collection à partir d'une désignation parlée en France avec éventuellement un choix d’objets à faire, des plaques de dix (2x5 ou 1x10) ou des carrés/boutons seuls. Les stratégies de base sont de type OF° et OG°, avec toutes les possibilités utilisant des passages par d’autres signifiants que nous avons déjà indiquées. Signalons qu’ici les collections sont manipulables. En outre, le « vendeur » a à sa disposition deux types d'« objets » différents, plaques de dix (sous deux formes différentes) ou bouton/carré seul, et ils ne sont pas forcément indiqués dans le message.

Les stratégies indiquées par le manuel

Aucune stratégie n’est indiquée, il est stipulé que les vendeurs « *donnent exactement ce qu’on leur demande* ».

Les stratégies probables

Toutes les stratégies que nous avons signalées sont envisageables, et leur probabilité dépend en particulier de la forme du message délivré par l’élève client. Il est prescrit de ne pas réinterpréter le message, mais les connaissances anciennes et le milieu matériel (les collections sont manipulables) comme les règles du jeu (interaction possible avec le « client ») peuvent y inciter l’élève. En outre, devant une commande de type « trente-six boutons », le fait de donner trois plaques de dix et six boutons isolés peut être compris comme n’étant pas une réinterprétation. En effet, l’élève délivre effectivement trente-six boutons, donc le bon nombre, d’autant que les boutons sont visibles sur les plaques de dix, et que le vendeur sait que ceux-ci vont être découpés par la suite dans la sous-tâche I.6 du client. Par ailleurs, devant une commande de type « trente-six plaques », il est possible que le vendeur l’interprète soit en donnant trente-six boutons isolés, soit trente-six boutons avec des plaques et des boutons. Le vendeur a pu interpréter dans ce dernier cas que « trente-six plaques » signifie trente-six boutons dans un conditionnement comportant des plaques, la tâche du vendeur étant alors de fournir la commande dans ce conditionnement : comme cela a déjà été signalé auparavant, « plaque » n’est pas pris comme un objet comptable mais comme un conditionnement de livraison.

Sous-tâche Ibis. 2

Vérifier l’adéquation entre ce qui est demandé et ce qui est donné.
Cette sous-tâche a été traitée dans la sous-tâche I.4 de la tâche I.

Les stratégies indiquées par le manuel

Cette sous-tâche n’est pas indiquée par le manuel.

Les stratégies probables

Les commentaires sur cette sous-tâche sont les mêmes que ceux afférant à la sous-tâche I.4, avec les remarques faites pour la sous-tâche Ibis.2 précédente.

1.2 Séance 2

a. Tâches et variables

Tâche II

La tâche II est similaire à la tâche I. Cependant il s'agit ici d'adresser le message par écrit au marchand. Le bon de commande à compléter est le suivant :

Il faut .... boutons.
Notre commande :
.... paquets de dix boutons
.... boutons.

Dans le guide de l'enseignant, p.153 est écrit « *Il faut écrire sur le bon de commande le nombre de boutons nécessaires et, en dessous, le nombre de plaques et le nombre de boutons isolés que vous demandez* »
Dans la première partie du bon de commande, la première ligne, un signifiant du cardinal de la collection est donc demandé (écriture littérale de la désignation parlée en France ou écriture chiffrée). La deuxième partie est le message destiné au vendeur, c'est une transcription mot à mot d'une désignation de type « désignation des groupements » (OG). Le bon tout entier, complété à deux en présence de la fiche Ziglotron, est à donner au marchand.
En outre, deux variables didactiques changent. La première est que le « marchand » ne doit pas délivrer plus de neuf boutons isolés. La deuxième concerne le nombre de boutons sur les Ziglotrons. Il s'agit ici de 28, 34 ou 45 boutons.
Le dernier changement concerne la validation (dernière sous-tâche de la tâche II), elle est ici différée après une « mise en commun ».

Nous obtenons ainsi le découpage suivant :
Entre parenthèses est indiqué si la tâche prescrite s'effectue seul ou à deux.
Sous-tâche II.1 : de l'emplacement où se trouve la collection de référence, compléter le bon de commande à transmettre (à deux)
Sous-tâche II.2 : transporter le bon de commande (un seul des deux élèves de la sous-tâche I.1)
Sous-tâche II.3 : indiquer la commande voulue au marchand en donnant le bon de commande au « marchand » (un seul élève, le même que celui de la sous-tâche II.2)
Sous-tâche II.4 : vérifier l'adéquation entre ce qui est demandé et ce qui est donné (un seul élève, le même que celui des sous-tâches II.2 et 2.3, sous-tâche en interaction possible avec la personne jouant le rôle du vendeur qui est lui aussi un élève)
Sous-tâche II.5 : transporter la collection obtenue (un seul élève, le même que celui des sous-tâches II.2, 2.3 et 2.4)
Sous-tâche II.6 (différée après la mise en commun) : vérifier que les collections ont le même cardinal en faisant une superposition des « boutons » obtenus avec ceux figurés sur leur fiche. Cette sous-tâche est accomplie par les deux élèves de la sous-tâche II.1 (dont un seul des deux est concerné par les sous-tâches 2.2 à 2.5). Elle peut nécessiter l'utilisation de ciseaux et de colle.

Tâche II bis

C’est la même tâche que la tâche Ibis. La différence est que les marchands ne doivent pas délivrer plus de neuf boutons isolés par commande. Cependant, comme ils doivent répondre à plusieurs commandes, ils disposent dans leur réserve de plus de neuf boutons isolés. En outre, ils doivent se fier à la deuxième partie du bon de commande et donc y lire les informations.
Sous-tâche II bis.1 : réaliser une ou deux collections d’objets (des carrés en papier symbolisant des boutons ou/et des plaques rectangulaires symbolisant dix boutons) dont le cardinal est donné par un signifiant écrit. Un maximum de neufs boutons isolés doivent être délivrés.
Sous-tâche II bis.2 : vérifier l’adéquation entre ce qui est demandé et ce qui est donné.

b. Stratégies des élèves jouant le rôle des « clients » (tâche II)

Nous allons indiquer ce qui change par rapport à la 1ère tâche.
En ce qui concerne la **sous-tâche II.1**, l’élaboration du bon de commande, les élèves rédigent deux parties, mais en fait seule la deuxième est nécessaire pour obtenir une collection de boutons qui permet de réparer le Ziglotron. Il peut alors y avoir une incompréhension du lien et du rôle des deux parties : pourquoi donner au marchand deux indications de la quantité désirée ? Ceci peut jouer sur le choix des stratégies.
Pour la première partie, les élèves doivent dénombrer la collection. La stratégie la plus probable est une utilisation de stratégie OF vers EC consistant en un comptage puis une traduction « directe » de la désignation parlée en France en son écriture chiffrée. La variable didactique consistant à ne pouvoir commander que neuf boutons doit obliger les élèves à faire une commande comportant un nombre de groupes maximaux, ce qui doit être écrit dans la deuxième partie du bon de commande. Les différentes stratégies ont été indiquées. Il nous semble que le plus probable est qu’ils utilisent une désignation parlée du cardinal de la collection qu’ils ont nécessairement dénombrée pour obtenir la première partie du bon de commande. La stratégie indiquée par le manuel consistant à faire des groupements de dix sur la fiche nous semble moins probable, bien qu’envisageable et efficace. Celle consistant à utiliser les chiffres de l’écriture chiffrée attesterait que la connaissance visée par la séquence est (déjà) mobilisable. Comme l’étude de l’itinéraire cognitif proposé par le manuel indique que cette connaissance est nouvelle, cette stratégie ne nous semble pas probable. Par ailleurs, l’analyse des recherches antérieures du chapitre 5 montre la difficulté des élèves de cet âge à exprimer une quantité à partir d’un autre signifiant que la désignation parlée en langue maternelle (et sa version écrite que consiste alors l’écriture chiffrée). Dans le contexte de la séance, nous l’avons signalé pour la sous-tâche I.1, le terme plaque n’est pas pris nécessairement comme un objet comptable mais comme un conditionnement de livraison. Ainsi un message comme « 36 paquets de dix boutons » peut vouloir signaler « trente-six boutons à donner sous forme de paquets », ce qui peut aussi être le cas d’un message de type « 30 paquets de dix boutons, 6 boutons. ». A noter que le fait de ne pouvoir commander que neuf boutons au maximum est une contrainte matérielle qui devrait amener les élèves à un unique message (pour un même nombre) comportant deux signifiants du nombre traduit par deux chiffres : le chiffre des dizaines et celui des unités. Ceci permet de mettre en évidence une interprétation arithmétique multiplicative quand cette quantité est reliée à la désignation parlée du cardinal. Cependant nous venons d’indiquer que ceci pouvait être « contourné » par les élèves dans les exemples précédents. En outre, compte tenu de la « difficulté conceptuelle » signalée, le nombre d’essais limité à un, le milieu matériel installé au moment de la formulation ne comportant pas les conditionnements, ainsi que la validation différée ne contribuent pas à favoriser la réussite des élèves.
De plus, la tâche peut être plus ou moins facilitée si les élèves ont déjà eu dans la séance précédente à traiter dans leur tâche un nombre de la même dizaine. Ils peuvent aussi retirer

des informations de la séance précédente dans les « mises en commun ». En particulier, les repérants/appuis étant les mêmes et prononcés à l'identique pour les deux séances, vingt, trente, quarante, les élèves peuvent avoir mémorisé les associations vingt/deux, trente/trois, quarante/quatre.
La **sous-tâche II.2** n'amène pas de commentaire, tandis que la **2.3** peut être accompagnée d'échanges verbaux traduisant un message écrit en un message oral (et éventuellement le transformant), comme c'est le cas pour les séances Ziglotron que les élèves ont déjà vécues. Ce « risque » est accentué par le fait que les élèves ne sont pas nécessairement de bons lecteurs et que la forme du bon de commande comporte une difficulté pour la situation de communication. En effet, le bon comporte deux parties, concernant toutes les deux une information sur la quantité de boutons. Or seule la deuxième partie, le message en lui-même, est en direction du « marchand ». La **sous-tâche II.4**, la vérification que la commande délivrée est bien celle demandée, est rendue ici plus difficile que dans la première séance car les élèves ne sont pas censés parler. Ils peuvent néanmoins s'appuyer sur ce qui est écrit sur le bon de commande qui constitue une référence objective de ce qui est commandé. Finalement la **sous-tâche II.6** se fait après une « mise en commun », dans laquelle la validation (au moins intellectuelle) a pu être faite. Son rôle dans la séance n'est alors plus le même que dans la première séance, et va dépendre de ce que les élèves ont retenu de la mise en commun. En particulier, elle peut ne constituer qu'un « simple » achèvement de la tâche, sans enjeux mathématiques.

c. Stratégies des élèves jouant le rôle des « marchands » (tâche II bis)

Pour la sous **tâche II bis 1**, délivrer la commande, les stratégies dépendent du type de message. Si nous supposons que le message joue le même rôle qu'une désignation orale des groupements, l'analyse des stratégies que nous avons indiquées dans la séance précédente, sous-tâche Ibis.1, reste valable. Cependant, ici le vendeur a deux informations sur la quantité et il est toujours possible qu'il utilise l'ensemble des données pour interpréter ce que veut le client. Il se peut même qu'il y décèle une contradiction. En outre, la forme écrite des messages fait que les élèves peuvent s'y référer à tout moment. Finalement, il est ici possible que le vendeur distingue chacune des lignes. Il y lit alors trois nombres différents qu'il a alors à interpréter par rapport à ce que désire le vendeur[246].
La difficulté des élèves déjà signalée pour les signifiants de type « désignation des groupements » peut amener un message comme « 36 paquets de dix boutons » ou « 30 paquets de dix boutons, 6 boutons. » à être interprété par trois plaques de dix et six boutons seuls, et c'est peut-être ce qui est effectivement attendu par le client. A noter qu'aucune stratégie n'est indiquée par le manuel.
La sous-tâche Ibis. 2, vérifier l'adéquation entre ce qui est demandé et ce qui est donné n'est pas indiquée par le manuel, elle a été traitée dans la sous-tâche II.4 de la tâche II.

1.3 Séance 3

a. Tâches et variables

La tâche III est similaire aux tâches précédentes. Cependant il s'agit ici d'adresser le message par écrit à un marchand fictif puisque ce sera l'enseignant qui va le récupérer afin de le commenter dans une « mise en commun ». Il ne délivre pas de collection. Le bon de commande est cette fois-ci à compléter par chaque élève individuellement, avec une

[246] Rappelons que les élèves de CP sont des lecteurs débutants et que c'est la première fois qu'ils sont confrontés à un bon de commande écrit, qui comporte de surcroit des informations non nécessaires.

possibilité de confrontation à deux une fois celui-ci écrit. Il comporte l'écriture chiffrée indiquant la quantité à commander. C'est donc le suivant :

> Il faut 42 boutons.
> Notre commande :
> .... paquets de dix boutons
> .... boutons.

L'enseignant présente la fiche Ziglotron aux élèves, mais ils n'en disposent pas pour la réalisation de la tâche.
Dans le guide de l'enseignant, p.156 est écrit « *Vous devez compléter le bon de commande pour qu'on puisse réparer le Ziglotron. Lorsque vous aurez terminé, nous comparerons vos bons de commande et vous devrez dire comment vous avez fait pour le compléter* ».
Par la suite, une **tâche III bis** est prescrite aux élèves, elle est similaire à la tâche III. Les nombres en jeu sont cette-fois ci successivement, 16, 50, 83 et 38. Les nombres sont écrits au tableau (écriture chiffrée). Leur nom est prononcé par l'enseignant au moment de la consigne « *Je veux 16 boutons. Que dois-je commander ?* ». Les réponses sont cette fois-ci données sur l'ardoise
La tâche III ter finalement donnée consiste en une tâche réciproque à la précédente. La consigne orale est « *J'ai commandé 6 paquets de dix boutons et 3 boutons. Combien cela fait-il de boutons ?* » (les nombres sont écrits au tableau). Les élèves doivent donner leur réponse sur leur ardoise (écriture chiffrée). Les autres bons de commande proposés aux élèves sont « *3 plaques de dix et 6 boutons* » et « *4 plaques de dix et 4 boutons* ».

b. Stratégies des élèves (tâches 3, 3 bis et 3 ter)

Tâche III

La différence fondamentale par rapport à l'analyse précédente est que les élèves n'ont pas à dénombrer le nombre de boutons manquants. Les différentes fonctions des deux parties du bon de commande peuvent leur apparaître plus claires. En effet, cette fois-ci, la première partie est déjà remplie et sert à les informer du nombre de boutons. Pour la deuxième partie, les stratégies ont été indiquées précédemment. Seules celles consistant à faire des groupements sur le Ziglotron semblent bloquées. Ce qui a été dit, fait, mis en relief dans la séance précédente peut influencer l'emploi de telle ou telle stratégie. Signalons en particulier que le nombre en jeu « 42 » est prononcé à nouveau à l'aide du repérant/appui quarante, seule l'appuyant/nombrant a changé. L'association quarante/quatre a pu être mémorisée.

Tâche III bis

Les stratégies ont été indiquées précédemment, nous les précisons selon chaque nombre. A noter que la plus rapide consiste à utiliser l'écriture chiffrée, c'est celle qui est à mettre en avant dans la mise en commun précédente.
Pour le nombre 16, le repérant/appui « dix » et le comptant/appuyant « six » n'est pas entendu dans sa désignation parlée « seize ». Ceci ne favorise donc pas une utilisation de ceux-ci dans cette désignation orale. Le nombre en jeu étant relativement petit, une stratégie utilisant les doigts, compter jusqu'à seize, un deux, trois, etc. Arrivé à dix, on referme les doigts et on continue. Le fait d'avoir une fois passé dix indique qu'il faut un paquet de dix, alors que le nombre de doigts qui restent levés peut être compté, un deux, ..., six, ce qui permet d'obtenir le nombre de boutons seuls. Il est aussi possible que certains élèves aient mémorisé un résultat additif avec appui sur dix, ou aient déduit le repérant « caché » « dix » du fait que seize est un avant « dix-sept ».

Pour le nombre 50, une stratégie passant par la désignation orale est simplifiée puisqu'il n'y a pas de comptant/appuyant. Seule l'association cinquante/cinq est requise. Cependant, celle-ci n'est pas encore intervenue dans les séances précédentes. A noter en outre que le fait de ne pas avoir de boutons seuls à commander peut amener à aborder la notion conceptuelle du « zéro » en tant que nombre ou/et chiffre : doit-on dire « zéro »[247] ? C'est en particulier le cas pour ceux qui utilisent l'écriture chiffrée.
Les élèves ne connaissent pas nécessairement la désignation parlée du nombre 83. Celle-ci ne permet pas d'entendre le repérant/appui (mais on entend le comptant/appuyant « trois »). Ceci devrait contraindre les élèves soit à utiliser l'écriture chiffrée, soit à utiliser la suite des dizaines et à les compter.
Le nombre 38 est à rapprocher des nombres déjà traités dans la séance 1 (30 et 37) et la séance 2 (34), ce qui favorise l'emploi de la mémorisation de l'association trente/trois. Ici en outre un parallèle peut être fait avec le nombre précédent, 83. Les élèves qui ont perçu le lien avec l'écriture chiffrée peuvent voir l'inversion des chiffres.

Tâche III ter

C'est la première fois que cette tâche réciproque de la précédente est donnée aux élèves. Cependant il est probable que des élèves l'aient traitée, par exemple s'ils ont procédé par essais/erreurs ou pour vérifier leur réponse. Les stratégies envisageables sont de type OG vers OF, ou OG vers EC avec tous les cheminements possibles. A noter que la plus rapide consiste à faire une association des chiffres dans le bon ordre pour reconstruire l'écriture chiffrée, ce lien (dans l'autre sens) a été mis en avant dans la mise en commun précédente et éventuellement utilisé dans la tâche III bis. Nous allons relever les particularités de chaque proposition qui sont susceptibles d'influencer sur ces cheminements.
En ce qui concerne *« 6 paquets de dix boutons et 3 boutons »,* le nombre soixante-trois n'est pas nécessairement un nombre que les élèves savent associer à l'écriture chiffrée « 63 ».
« *3 plaques de dix et 6 boutons* » est à rapprocher de nombre de messages déjà traités mettant en jeu les nombres entre trente (30) et trente-huit (38).
« *4 plaques de dix et 4 boutons* » est à rapprocher des messages déjà traités mettant en jeu les nombres entre quarante-deux (42) et quarante-cinq (45). En outre ici le fait que le chiffre des unités soit le même que celui des dizaines permet que certaines stratégies erronées conduisent à une réponse exacte.

1.4 Séance 4

a. Tâches et variables didactiques

Deux tâches sont à distinguer dans cette dernière séance.
La première, la tâche IV, est celle indiquée par le manuel via l'exercice 2 p. 70. Elle est identique à la tâche III, les élèves doivent compléter trois bons de commandes, sur leur fichier.

[247] Nous avons indiqué dans le chapitre 6 ne pas avoir relevé que le manuel « Cap Math » proposait de séances spécifiques dans lequel zéro était utilisé en tant que nombre.

Il faut 36 boutons. Notre commande : .... paquets de dix boutons .... boutons.	Il faut 30 boutons. Notre commande : .... paquets de dix boutons .... boutons.

Il faut 82 boutons. Notre commande : .... paquets de dix boutons .... boutons.

La deuxième, la tâche IV bis, est celle indiquée par le manuel via l'exercice 3 p. 70. Elle est proche de la tâche III ter, les élèves doivent compléter quatre bons de commandes, sur leur fichier.

Il faut ...... boutons. Notre commande : 7 paquets de dix boutons 8 boutons.	Il faut ......boutons. Notre commande : 4 paquets de dix boutons 0 bouton.
Il faut ...... boutons. Notre commande : 1 paquet de dix boutons 5 boutons.	Il faut ......boutons. Notre commande : 3 paquets de dix boutons 7 boutons.

Les élèves n'ont aucun autre matériel à leur disposition. Le contexte vécu par les élèves précédemment est ce qui permet d'indiquer ce qui est attendu.

b. Stratégies des élèves (tâches 4 et 4 bis)

Toutes les stratégies ont été indiquées auparavant. Nous avons aussi signalé l'influence des nombres en jeu. Nous notons ici que pour chaque exercice, la disposition des bons de commande peut engager un ordre de résolution, s'ils sont considérés selon l'ordre de lecture usuel. L'ordre des réponses peut avoir alors une influence sur le choix des stratégies. En outre, ce qui a été retenu des séances précédentes par les élèves peut aussi les influencer. A noter que la répétition peut favoriser l'adoption d'une stratégie « mécanique » consistant à placer les chiffres donnés au bon endroit (et dans le bon ordre).

1.5 Analyse *a priori* de la tâche de l'enseignant

Le rôle *a priori* de l'enseignant, sans contexte précis, a été décrit de manière théorique dans le chapitre précédent. Nous allons nous y appuyer pour le décrire de manière précise dans cette séquence. Nous utilisons alors à la fois l'analyse précédente concernant les tâches des élèves ainsi que les recommandations du manuel. Nous allons ainsi mettre en perspective la tâche de l'enseignant proposée via le manuel.

Dans le chapitre 7, nous avons proposé de découper chaque séance en trois « phases » : un « lancement » (l'enseignant donne une indication de la tâche aux élèves, elle se termine au

moment où les élèves vont commencer à la réaliser), une « résolution de la tâche par les élèves » (les élèves sont confrontés à la tâche, elle se termine au moment où l'enseignant décide de l'interrompre pour débuter la « phase » suivante) et la dernière est la « mise en commun » (les élèves ne traitent plus la tâche mais vont en discuter tous ensemble, en classe, sous la direction de l'enseignant). Ce découpage est en filigrane dans les prescriptions dans le guide de l'enseignant, c'est ce que nous allons préciser par la suite. Nous allons déterminer comment le processus dialectique de dévolution/institutionnalisation peut s'y réaliser, en considérant en particulier comment l'enseignant peut mener une phase de bouclage.[248]
Auparavant, il est nécessaire de fixer l'objectif d'apprentissage principal pour l'enseignant, via ce que les élèves ont à retenir de la séance. L'analyse de la tâche de l'enseignant ne peut se faire sans prendre en compte cet objectif.

a. Le rôle de l'enseignant par rapport à l'objectif cognitif de la séquence et de chaque séance

En ce qui concerne les informations du manuel, nous allons inférer cet objectif tout particulièrement de ce qui est écrit dans la rubrique intitulée « *phase de synthèse* ».
Dans l'analyse du chapitre 6, nous avons mis en relief les cheminements cognitifs favorisés dans la séquence grand Ziglotron. Nous avons indiqué que cette séance constituait à elle seule une étape de l'itinéraire cognitif d'enseignement proposé par le manuel. Nous allons nous y appuyer en reprenant certains résultats, ce qui permet de situer la séquence dans l'itinéraire cognitif d'enseignement proposé par le manuel.

<u>Séances 1 et 2</u>

Deux désignations orales, celle parlée en France et celle en termes de paquets de dix et boutons (seuls), sont reliées. Nous avons indiqué ci-avant comment ceci était réalisé dans la tâche proposée aux élèves. Dans la 2ème séance, le milieu est susceptible de contraindre les élèves à utiliser des groupements de dix. Dans Cap Maths, la maximalité n'est pas questionnée en elle-même, ni le fait de choisir dix comme cardinal du groupement ou même de choisir le même cardinal pour chaque groupement. Tous ces choix sont des conséquences de contraintes matérielles.

Désignation parlée en France du cardinal d'une collection d'objets	⇄ Utilisation de groupements de dix (rendue nécessaire dans le contexte particulier des séances « grand Ziglotron »)	« Désignation des groupements » contextualisée

L'enseignant doit s'assurer que le lien entre les deux désignations orales est fait, c'est-à-dire que les élèves comprennent qu'elles désignent le même nombre, dans ce contexte précis.
La première séance ne contraint pas les élèves à utiliser une « désignation des groupements », elle permet de s'assurer que la tâche est comprise par les élèves, puisqu'elle n'est pas *a priori* problématique, au sens où ils peuvent utiliser des connaissances anciennes pour dénombrer les « boutons ». Compte tenu des nombres en jeu, nous avons vu dans l'analyse que pour certains élèves ceci pouvait cependant constituer une difficulté (d'énumération). Des « désignations des groupements » peuvent néanmoins survenir. L'enseignant peut les mettre en valeur de différentes façons. En particulier il peut les reprendre dans la mise en commun afin de diffuser la stratégie qui a amené ces désignations ou uniquement les valider ou

[248] En référence à notre définition donnée dans le chapitre 7.

évaluer. Il peut s'aider en utilisant des éléments du milieu matériel ou encore mobiliser des signifiants « relais » qui sont mobilisables par les élèves. Il peut aussi comparer les avantages et les inconvénients des différentes stratégies ou/et des différentes formulations des messages. Ainsi par exemple s'il veut comparer les deux types de formulation orale, il peut faire appel au point de vue du vendeur. S'il explore les stratégies, il peut indiquer que le comptage de dix en dix permet d'obtenir l'une ou l'autre des deux désignations. L'enseignant dispose ainsi d'une certaine marge de manœuvre sur ce qui est à faire ressortir de cette séance. Ces choix lui permettent d'anticiper les difficultés qui peuvent survenir dans la séance suivante et de s'assurer de la faisabilité de l'étape de l'itinéraire cognitif qui se joue dans la séquence.
Dans la deuxième séance, le milieu installé est susceptible de rendre inefficaces les stratégies OF. L'analyse de la tâche des élèves a montré que ce n'était pas forcément le cas. Les élèves « vendeurs » peuvent interpréter les messages des élèves « clients ». L'enseignant peut donc avoir à gérer ces éventuelles « réussites » qui ne permettent pas d'interpréter les désignations parlées en France de manière multiplicative. Quoi qu'il en soit, s'il installe une phase de bouclage, et c'est ce que prescrit le manuel, les productions des élèves seront validées ou/et évaluées. A nouveau l'enseignant a le choix d'explorer ou non la stratégie qui a permis ou permet de les obtenir (celle des élèves ou une qu'il peut proposer, suivant le contrat qu'il adopte). Dans le cas où il choisit de ne pas recourir à une explicitation des stratégies, si la validation se fait à partir du signifiant produit par les élèves, ici encore, l'enseignant peut convoquer à nouveau des éléments du milieu matériel ou non, des signifiants « relais » en particulier. Le manuel n'incite pas l'enseignant à explorer les stratégies. En effet la question qu'il doit poser est, en ce qui concerne les commandes, de « *vérifier leur pertinence* », p. 154. Des exemples venant des élèves sont alors donnés, pour vérifier des messages formulés en termes de plaques et de boutons :
« *revenir aux plaques et aux boutons, et compter un par un les boutons pour savoir si on arrive bien au nombre voulu ;*
Dire par exemple, « 3 plaques ça fait 30 boutons » (en le justifiant de différentes manières) « et encore 4 boutons, ça fait bien 34 » ;
Dire que c'est juste, ça se voit, parce que dans 34, on voit le 3 et le 4 ; le 3 ce sont des plaques de dix et le 4 les boutons tout seuls »
Ces exemples ne concernent donc pas *a priori* les stratégies. En conséquence, des stratégies OF vers OG qui consistent à passer de « trente-quatre » à « quatre plaques de dix et quatre boutons seuls » ne sont pas à expliciter. Elles permettent pourtant d'interpréter une désignation parlée en France de manière multiplicative. Il reste que l'enseignant peut investir une marge de manœuvre en mettant en jeu ce passage, afin d'aller dans le sens de l'étape de l'itinéraire. Il peut demander par exemple aux élèves d'expliquer comment ils ont fait ou bien indiquer lui-même une stratégie, selon le contrat qu'il met en place[249].
A noter que la séance 2 n'a pas pour but d'institutionnaliser le lien entre les chiffres de l'écriture chiffrée et les chiffres du message, cependant, en particulier selon la nature des débats et les propositions des élèves, l'enseignant a toujours le choix d'étudier ces liens.
Les validations des réponses permettent *a minima* d'amorcer dès cette 2ème séance un deuxième temps, signalé dans l'analyse entreprise dans le chapitre 6, celui dans lequel les deux désignations sont reliées indépendamment de la présence de la collection (lien signifiant-signifiant).

[249] Le « choix » du contrat est plus ou moins ouvert selon ce que les élèves produisent et disent. La situation installée *a priori* permet d'envisager d'aller dans le sens de demander aux élèves leur stratégie et de les diffuser. Cependant, leur âge peut entraîner des difficultés d'expression.

Séance 3

Dans la séance 3, les deux désignations orales, parlées en France et « désignations des groupements », sont à nouveau reliées indépendamment de la présence de la collection. Ceci est cette fois-ci encouragé par un milieu matériel réduit, les élèves n'ont plus à leur disposition la collection figurée, ils doivent utiliser la désignation parlée ou/et la désignation écrite chiffrée qui leur est donnée. Notre analyse de la tâche des élèves nous a indiqué qu'il nous semblait plus probable qu'ils utilisent la désignation parlée en France que les chiffres de l'écriture chiffrée correspondante. Ceci est en accord avec ce que nous avions indiqué dans le chapitre 6.
La « *mise en commun* » prescrite dans la séance 3, unité 8, indique la stratégie suivante pour passer de l'écriture chiffrée 42 au signifiant du type « … paquets de dix boutons et … boutons » : « *décomposition du type : 10/10/10/10/2 ou 10+10+10+10+2= 42, avec comptage de dix en dix pour vérifier* ». Nous avions indiqué que la proposition du manuel pouvait se schématiser ainsi :

Désignation orale du cardinal d'une collection d'objets →

- 10+10+10+10+2 (obtenu en énumérant « dix, vingt, trente, quarante ») et un comptage des « 10 »
- un comptage des repérants énumérés
- rapprochement sonore « quarante » / « quatre ».

→ « Désignation des groupements »

A nouveau ces prescriptions ne nous semblent pas explicites quant au traitement des stratégies des élèves. Elles indiquent en effet que c'est l'enseignant qui fait le rapprochement entre les écritures chiffrées et les désignations parlées en France, via des signifiants « relais » de type 10/10/10/10/2 ou 10+10+10+10+2. Mais il nous semble qu'une certaine marge de manœuvre est laissée à l'enseignant sur ce lien. En effet, d'après notre analyse, il est probable que les élèves, ou au moins une partie d'entre eux, constatent que le cardinal de la collection est indiqué, dans le contexte de la séance, par les désignations suivantes : « 42 », « 4 paquets de dix et 2 boutons », « quarante-deux » et « quatre paquets de dix et deux boutons ». Les deux premières sont écrites et les deux dernières orales[250]. D'après notre analyse, les décompositions du type 10/10/10/10/2 ou 10+10+10+10+2 ne seront probablement pas utilisées par les élèves.
L'enseignant a alors la possibilité de les introduire ou non. Il devra aussi choisir ce qui va être mis en relief dans la séance.
Cependant nous devons signaler ici une question qui est propre à l'itinéraire 1 (et 2 nous semble-t-il). L'étape de l'itinéraire de type 1 que propose précisément le manuel doit conduire à utiliser les désignations parlées en France dans une interprétation multiplicative du fait qu'elles permettent d'obtenir des « désignations des groupements ». Ceci met en jeu des stratégies OF vers OG pour résoudre la tâche, mais, pour les validations, plus vraisemblablement des stratégies OG vers OF. Les écritures chiffrées sont initialement la

[250] L'écriture « 4 paquets de dix et 2 boutons » et la forme orale « quatre paquets de dix et deux boutons » ne sont pas clairement distinguées par le manuel.

version écrite des désignations parlées en France. L'interprétation multiplicative de la numération parlée en France doit-elle ou peut-elle « expliquer » les chiffres de l'écriture chiffrée ? Autrement dit, puisqu'à « quarante-deux » correspond « quatre paquets de dix et deux boutons seuls », l'écriture chiffrée est une forme abrégé de cette dernière désignation. La position des chiffres indique alors s'il est question de paquets de dix ou de boutons seuls. Ceci ferait écho à des stratégies. Cependant est-ce qu'une telle possibilité peut être envisagée via les tâches proposées dans la séance ? En effet, les élèves connaissent déjà la correspondance OF/EC (celle-ci ayant plus ou moins été étayée par les régularités des signes successifs des deux systèmes). Elle est la plupart du temps utilisée dans la séquence et n'est pas questionnée. En outre une stratégie OF vers OG vers EC ne résout pas le problème qui est posé. Une autre solution est alors de faire apparaître les chiffres de l'écriture chiffrée comme un moyen de retrouver l'interprétation multiplicative de la numération parlée dégagée auparavant. Ceci fait écho cette fois-ci à des stratégies OF vers EC vers OG. Le problème posé peut alors être résolu par une telle stratégie. Cependant, cette fois-ci l'interprétation multiplicative peut ne pas être en jeu, puisque la stratégie peut être « mécanique ». Il peut en effet s'agir d'utiliser une connaissance ancienne, la traduction d'une désignation parlée en sa forme écrite, la désignation chiffrée correspondante, puis d'utiliser dans le bon ordre les chiffres pour obtenir la désignation des groupements correspondante. En outre, si les élèves réalisent la tâche via une stratégie OF vers OG, il peut être difficile de leur faire apparaître l'utilité de passer par EC, cependant dans ce cas ils sont susceptibles de mettre en jeu une interprétation multiplicative. Mais pour ceux qui sont en échec le passage algorithmique OF vers EC vers OG précité peut apparaître comme pertinent pour résoudre la tâche, sans mettre en jeu l'interprétation multiplicative. D'ailleurs un « simple » passage mécanique EC vers OG peut suffire dans le cas où l'écriture chiffrée est donnée, c'est ce que nous verrons dans la séance 4.

Séance 4

Dans cette dernière séance, l'enseignant est confronté aux choix signalés précédemment. Les élèves peuvent réussir les exercices de manière mécanique, sans que ce dernier puisse contrôler si le savoir visé est bien en jeu. Il a alors la possibilité d'aménager ou non un débat qui justifie la pertinence de cette stratégie. Mais la situation proposée par le manuel ne facilite pas nécessairement que ce débat aboutisse aux preuves intellectuelles qui peuvent être attendues. L'enseignant a aussi la possibilité d'apporter lui-même des justifications.

b. La première séance

Nous entreprenons une analyse *a priori* plus détaillée de la première séance. Nous ne faisons pas une telle analyse des autres séances. L'analyse de cette première séance permet néanmoins d'y préciser aussi les contraintes et marges de manœuvre telles que notre cadre théorique permet de les comprendre. Les séances suivantes ont en effet une structure proche de la première, avec un découpage *a priori* semblable. En outre les tâches données aux élèves sont voisines et elles ont été analysées auparavant.

Cependant les séances s'enchaînent et ainsi les déroulements sont susceptibles de s'éloigner sensiblement des prescriptions du manuel, rendant caduque une analyse *a priori* aussi fine, qui, elle, est susceptible de convenir pour la première séance.

Lancement de la séance 1

Nous allons chercher les informations du manuel concernant le processus de dévolution dans la phase de lancement dans le paragraphe intitulé « *présentation de la situation* » par le manuel. Il y est prescrit une contextualisation de la séance par une histoire racontée qui se réfère à une tâche similaire (les Ziglotrons, sur laquelle il n'est pas donné ici plus de

précisions[251]) et des indications complémentaires pour la nouvelle tâche. Ces indications portent sur les variables didactiques et un découpage en sous-tâches. Les variables didactiques concernent le matériel utilisé par les vendeurs (plaques de dix boutons et boutons), l'indication d'un nombre de boutons plus important (« *ils ont aussi beaucoup plus de boutons* ») et le fait de limiter le nombre de voyages à un. En ce qui concerne le déroulement, certaines sous-tâches sont indiquées ou/et précisées. Pour la sous-tâche I.3, il s'agit de l'évocation de la forme possible des messages (ils sont oraux et les exemples donnés sont « *12 boutons* », « *15 plaques* », « *8 plaques et 11 boutons* ») et de l'indication de celui qui doit réaliser la sous-tâche I.3 (un seul élève). La tâche I.bis des marchands est indiquée « *ils donnent exactement ce qu'on leur demande* ». En ce qui concerne la sous-tâche I.6, est précisé le fait que « *les boutons vendus en plaques devront être découpés avant d'être placés sur le Ziglotron* » et la sous-tâche I.5 (le transport) est reliée à une aide « *il faut ramener juste ce qu'il faut de boutons, ni plus, ni moins* ». A noter que la mise en place matérielle de la classe est prescrite avant l'indication de la tâche de manière verbale par l'enseignant.
Toutes ces indications, en particulier certaines sous-tâches, constituent les informations sur les tâches I et 1bis que l'enseignant doit fournir aux élèves d'après le manuel. Certaines d'entre elles pourraient être considérées comme des aides non nécessaires à ce que les élèves s'engagent dans la tâche. Compte tenu de l'âge des élèves et de l'étude de la tâche des élèves faîte auparavant, nous analysons ces prescriptions comme des indications minimales pour que les élèves (tout au moins un certain nombre) commencent à s'engager dans la tâche telle qu'elle a été décrite précédemment et pour que les difficultés qu'ils affrontent soient avant tout mathématiques. En particulier, les stratégies proprement dites ne sont pas précisées, par exemple pour l'obtention du message à transmettre. Les exemples de messages donnés ne nous semblent pas tant des limitations qu'une ouverture sur le champ des possibles. Ainsi, le fait d'utiliser dans les deux cas les désignations parlées en France, soit pour un seul type d'objet (les boutons seuls ou les plaques seules) soit pour deux types d'objets (plaques et boutons), ne fait qu'exprimer les choix qui sont rendus possibles en raison du milieu matériel, sans les élargir ni les restreindre. Ces possibilités sont d'ailleurs mises en relation avec les types d'objets dont vont disposer les vendeurs (plaques de dix ou boutons seuls), ces objets étant montrés et retirés ensuite. Pour les clients, cet élément n'est plus présent au moment de réaliser la tâche, mais, même ainsi, ceci ne les contraint pas à élaborer un type ou l'autre de message (les deux mènent à une validation potentiellement positive). En outre, nous avons signalé dans l'analyse *a priori* de la tâche des élèves que ces formulations ne mènent pas nécessairement les élèves à envisager la possibilité de considérer les groupements comme des objets dénombrables. Par exemple, des élèves peuvent comprendre qu'il s'agit de commander un nombre de boutons (qu'ils estiment nécessairement indiqué par la désignation parlée en France du cardinal de la collection) et un type de conditionnement : « j'en veux trente-six (en) plaques ». Le milieu présent (et présenté) dans cette première phase puis celui installé ultérieurement ainsi que les indications données aux élèves (celles du manuel) ne nous semblent pas suffisants pour détromper tous les élèves, mais suffisants pour qu'ils s'engagent dans la tâche. A noter par ailleurs qu'il n'y a pas de prescription quant aux choix des élèves pour faire telle ou telle tâche, ni sur le nombre et la disposition en classe des différents groupes « clients » et « marchands ». Ceci peut cependant jouer sur la faisabilité de la tâche dans sa phase de réalisation, pour les élèves comme pour l'enseignant. Notre analyse nous mène à considérer que ces choix font partie de la tâche de l'enseignant. Celui-ci doit en estimer les avantages et inconvénients : au niveau des messages formulés, des procédures

[251] Cette dernière poursuit le même but que la séance grand Ziglotron : elle consiste à ce que des élèves clients demandent un nombre de boutons (désignation orale parlée en France) pour réparer leur Ziglotron. Elle permet donc de donner le but des tâches 1 et 1bis. Seules certaines variables didactiques prennent des valeurs différentes.

utilisées, mais aussi de la faisabilité tant au niveau du déroulement « cognitif » de la séance (par exemple un vendeur qui « compte mal » change le rôle que peut jouer la validation) que de son déroulement matériel (en associant deux élèves qui ne s'entendent pas par exemple). En outre dans la phase de synthèse, le fait que les élèves n'aient pas tous été confrontés à la même tâche a une importance sur les débats éventuels, surtout pour des élèves de cet âge (aptitude à se décentrer). Le choix à faire dès cet instant est donc important (bien que non signalé par le manuel).

En résumé, la tâche proposée à l'enseignant est de donner les indications nécessaires pour que les élèves puissent s'y engager. Les indications prescrites par le manuel nous semblent suffisantes pour assurer selon notre analyse que certains élèves s'engagent dans la tâche et *a minima* formulent la commande sous forme de « x boutons » ou « x plaques et y boutons ». Il nous semble difficile de détromper ceux qui auraient mal compris la tâche. Ceci peut être fait, selon notre cadre théorique, dans les phases suivantes.

Résolution de la tâche par les élèves

D'après les éléments théoriques que nous avons retenus, durant la résolution de la tâche par les élèves, l'enseignant peut poursuivre la dévolution et, en préparant la phase de bouclage, débuter le processus d'institutionnalisation proprement dit. La tâche de l'enseignant ne peut donc être analysée indépendamment de celle qui concerne le lancement et la mise en commun qui suit. Par ailleurs, l'enseignant doit prendre en compte certaines contraintes spécifiques du fait du contrat et des conditions matérielles en classe (le temps, les rythmes différents des élèves et leur interaction), alors que les élèves ne sont pas censés être tous ensemble et tout le temps en interaction avec lui. Nous analysons le paragraphe « *Les élèves d'une même équipe doivent se mettre d'accord sur ce qu'ils vont demander au marchand. Puis un seul se déplace, ils valident ensuite en plaçant les boutons sur le Ziglotron* » comme une prescription concernant l'enseignant qui l'engage à poursuivre la dévolution en faisant respecter les « règles du jeu » indiquées dans la phase de lancement, sans aide de nature mathématique, sans changer la nature du milieu qui a été instauré à la fin de la première phase.

Nous allons analyser comment l'enseignant peut préparer la phase suivante, la conclusion, en tenant compte des prescriptions dans le paragraphe que le manuel nomme « *Résolution et mise en commun* ». Il lui est possible de prendre des informations sur la forme du message (« *La commande demandée au marchand* : *un certain nombre de boutons isolés ; un nombre de plaques et de boutons isolés* »), sur les procédures pour obtenir le message (« *ce qu'a fait chaque groupe avant d'aller chez le marchand* »), et enfin sur « *la réussite ou l'échec de chaque groupe* ». Précisons ces trois points.

Le manuel cite deux types de messages : « *un nombre de boutons seuls* » et « *un nombre de plaques (de dix) et de boutons isolés* ». Ces messages sont à « *observer pour prendre connaissance de ce qu'ont fait les élèves* ». La formulation « *15 plaques* », n'utilisant que des plaques, a été indiquée dans le lancement mais n'est pas reprise ici. Notre étude précédente de la tâche des élèves et du lancement nous amène à considérer que ce sont bien les deux formes de message qui sont les plus probables, avec une probabilité bien plus importante pour les boutons seuls. Cependant d'autres formulations, comme par exemple « trente-six boutons en plaques », pourraient trahir une compréhension erronée de la tâche telle que nous l'avons déjà signalée. Relever ce type de message contribue directement à donner à l'enseignant une information sur les connaissances des élèves à propos du savoir nouveau en jeu, c'est-à-dire envisager qu'une quantité puisse être indiquée par des groupements et des objets non groupés.

Les stratégies indiquées par le manuel pour l'élaboration du message, qui sont à « *observer pour prendre connaissance de ce qu'ont fait les élèves* », sont de trois sortes : « *ils ne* *prennent pas d'information*[252] *[...] ; ils comptent les boutons un à un ; ils comptent les boutons par dix, puis comptent les paquets et les boutons isolés* ». Les stratégies ne sont cependant pas détaillées ici. Les liens entre ces stratégies et le message nous semblent implicites dans le manuel : compter un à un mène à une formulation « un nombre de boutons seuls » ou « un nombre de plaques (de dix) et de boutons isolés », compter les boutons par dix, puis compter les paquets et les paquets isolés mène à « un nombre de plaques (de dix) et de boutons isolés ». Ces informations peuvent aussi permettre à l'enseignant de choisir les stratégies pour des aides éventuelles et pour leur validation. Ceci fait le lien avec le point suivant.

Rien n'est stipulé dans le manuel sur la sous-tâche concernée par la validation de la réussite ou l'échec des élèves, ni sur le fait qu'il s'agisse de procédures ou/et de résultats ou encore sur le type de validation. La tâche de l'enseignant va porter prioritairement sur la validation des élèves « clients », ceux ayant effectué l'activité engendrée par la tâche I. Les « vendeurs » n'ont *a priori* qu'un rôle neutre dans la séance[253]. Il peut s'agir de la validation de la tâche complète, c'est-à-dire celle qui a pu être validée ou invalidée par une rétroaction du milieu dans la dernière étape. Pourtant un certain nombre de facteurs, non tous mathématiques, a pu être la cause de la réussite ou de l'échec (voir l'analyse *a priori* de la tâche des élèves). Chaque sous-étape est concernée et un échec à une des sous-étapes peut engendrer l'échec global à la tâche I. Ces informations peuvent contribuer à organiser le bilan, mais l'enseignant ne pouvant connaître le déroulement de l'ensemble de la tâche pour tous les groupes, il aura à sélectionner les informations recueillies à ce sujet. D'autre part, le fait que l'élève puisse avoir une information sur l'échec ou la réussite de sa tâche, à un moment donné, fait partie du contrat didactique « minimal » en classe (cf. le cadre théorique). L'enseignant peut s'acquitter de cette tâche en s'informant sur ces différentes réussites ou échecs et même de manière plus précise sur leur cause (et donc les difficultés des élèves). Il a aussi la possibilité dès cette phase de valider certaines étapes, productions, procédures, pour certains élèves. Il peut utiliser pour ce faire en particulier les ressources du milieu disponibles à ce moment.

Terminons ce paragraphe en abordant les aides. Les aides apportées par l'enseignant aux élèves doivent permettre la réalisation « technique » de la tâche, y compris au niveau des mathématiques. Nous entendons ici les aides concernant des connaissances anciennes, principalement celles relatives aux stratégies de comptage (énumération par exemple). Certaines aides peuvent aussi concerner une connaissance que nous considérons comme nouvelle, en particulier le fait qu'un message formulé en termes de groupements (de dix) et d'objets permette d'obtenir la quantité voulue. Cependant, d'après notre analyse, la situation proposée permet à l'enseignant d'organiser une phase de bouclage qui peut lui permettre d'y revenir. L'aide apportée peut donc mener à la fois à une institutionnalisation partielle pour certains élèves et constituer un moyen de préparer la synthèse, l'enseignant pouvant alors éventuellement s'appuyer sur les échanges qu'il a eus avec ces élèves. Nous considérons les autres aides apportées comme ressortissant du contrat didactique installé dans telle ou telle classe (par exemple, les élèves attendent-ils tous de réussir et donc d'être éventuellement aidés ?). Elles peuvent aussi indiquer que l'enseignant poursuit un autre objectif que celui que nous avons signalé. Certaines contraintes matérielles, comme le temps et le nombre d'élèves, sont néanmoins susceptibles d'entraîner leur survenue, l'enseignant décidant qu'il ne pourra pas « tout faire » pendant la phase de synthèse.

[252] La stratégie consistant à ne pas prendre d'information n'est pas toujours facilement identifiable. Un observateur peut penser qu'un élève ne prend pas d'information, alors qu'en fait ce dernier a procédé à une estimation globale de la quantité. Ceci peut mener à n'importe quel type de formulation, la décision pouvant être prise au moment de la commande et donc influencée par le milieu présent à ce moment.

[253] Nous avons cependant mis en évidence que ce n'est pas forcément le cas dans les déroulements prévisibles.

Ainsi les prescriptions sur les informations à prendre ne contribuent pas toujours explicitement directement à l'objectif cognitif que nous avons fixé. Ces informations peuvent pourtant être utilisées pour organiser une phase de bouclage. Certaines peuvent aussi être utiles pour les séances suivantes, comme par exemple le nombre et le type de procédures utilisées, les difficultés à compter, à envisager d'indiquer une quantité en termes de plaques et de boutons seuls. L'enseignant peut en prendre note sans nécessairement les utiliser dans la synthèse.

Mise en commun

Ici tous les acteurs de la classe sont concernés simultanément et le contrat a changé, le savoir est sous la responsabilité de l'enseignant. Le manuel indique que la synthèse « *fait essentiellement apparaître qu'il faut bien préparer ce qui sera demandé : en dénombrant avec précision les boutons nécessaires et, si cela a été utilisé par certaines équipes, en faisant déjà des groupements de dix boutons sur le Ziglotron* ». Mais, nous avons indiqué que faire comprendre aux élèves la nécessité de prendre ces informations n'était pas le seul enjeu d'une phase de bouclage. Ils doivent aussi envisager un groupement en tant qu'objet dénombrable et considérer que deux types d'objets peuvent servir à indiquer une quantité. Cette nouvelle connaissance mathématique concerne le fait que « x groupes de dix et y objets isolés » peut désigner une quantité d'objets. Ici, la connaissance est contextualisée. Cette connaissance est à institutionnaliser (au moins partiellement) d'après l'objectif que nous avons retenu. La forme prise par cette institutionnalisation et en particulier son degré de décontextualisation ne nous semble pas pouvoir être indiquée précisément dans la tâche de l'enseignant. Cela est dû à la variété des déroulements possibles, en particulier en fonction des connaissances anciennes des élèves ainsi que des stratégies et formulations produites. Cependant, il est possible d'utiliser le lien entre le message et la stratégie employée pour le formuler, cette stratégie indiquant qu'il s'agit bien de dénombrer une quantité. L'enseignant va être confronté à une certaine diversité de stratégies qu'il devra gérer. Cependant, ni la stratégie ni le lien stratégie/message ne sont objet d'institutionnalisation, ce ne sont que des moyens pour atteindre l'objectif[254]. D'après notre cadre théorique, il est aussi dans la tâche de l'enseignant de fournir des éléments de validation ou d'évaluation sur les travaux des élèves. Les élèves ayant pu effectuer une validation globale par eux-mêmes de la tâche I dans la sous-tâche I.6, il est possible pour l'enseignant de s'enquérir de celles-ci dans la phase de bouclage, afin de les rendre publiques (participant ainsi au processus de dépersonnalisation).

Signalons, en outre, que l'enseignant peut s'appuyer sur l'évocation de la rétroaction du milieu matériel présent pendant la tâche des élèves pour cette institutionnalisation. Cependant, ce milieu est avant tout fait des interactions entre les élèves au moment de la livraison de la quantité de boutons, et ensuite la rétroaction dans la sous-tâche I.6 ne permet pas d'inférer avec précision la cause de l'échec ou de la réussite finale. Par contre pendant la phase de synthèse, l'enseignant peut s'aider des objets qui ont été présents dans le milieu (plaques/bandes de dix boutons et boutons seuls). Ajoutons que des effets de contrat en classe peuvent influencer cette phase, en particulier, en ce qui concerne une hiérarchisation des stratégies et messages et donc un certain degré d'institutionnalisation.

En conclusion, nous analysons la tâche de l'enseignant dans la phase de synthèse comme étant d'une part de dégager le fait que certaines formes de message (utilisant deux types d' « objets ») permettent d'obtenir une quantité d'objets adéquate, et d'autre part de signaler l'utilité d'utiliser une stratégie, ce qui nécessite de les évoquer sans les hiérarchiser ni les étudier, aucune n'étant objet d'institutionnalisation *a priori*. Le premier élément n'est pas explicitement prescrit par le manuel et l'institutionnalisation peut prendre de multiples formes. Le second élément ne comprend pas d'institutionnalisation stricto sensu sur le

[254] Nous avons en outre analysé que différentes stratégies pouvaient mener à une même formulation de message.

fonctionnement des stratégies. Ceci n'entre peut-être pas dans le contrat usuel établi en classe : ici l'enseignant valide l'emploi d'une stratégie qu'il doit par contrat permettre aux élèves de comprendre, mais il n'a pas pour tâche d'institutionnaliser son fonctionnement ni son efficacité. Cependant, une des stratégies de type OF vers OG permet de convoquer une interprétation multiplicative de la numération parlée en France. Est-ce que l'enseignant doit faire en sorte que les élèves l'utilisent ? Comment peut-il alors conduire la séance ?

2. La classe de Mme B.

Mme B. est une enseignante expérimentée, ayant depuis plusieurs années la responsabilité de classes de CP. Elle est habituée à utiliser Cap Maths et suit la progression du manuel. Les ressources qu'elle utilise viennent surtout de ce manuel ainsi que de certains stages de formation qu'elle a suivis, par exemple un stage EPS/Maths de trois semaines qui s'est déroulé l'année précédente. Les élèves sont disposés par tables de deux qui peuvent être accolées pour former des rangées. Des bancs sont disponibles, ils lui permettent de temps à autre de réunir toute la classe devant le tableau. Parmi les affiches qui ornent les murs, celle qui concerne la numération consiste en une file numérique des écritures chiffrées de 1 à 59. Elle est située en haut du tableau.

Chacune des séances se réfère directement aux annexes dans lesquelles sont donnés les indicateurs en parallèle de la transcription complète des séances. Ces séances sont découpées selon les activités observées des acteurs. Le « lancement », la « réalisation de la tâche par les élèves » et la « mise en commun » sont structurées ensuite en épisodes puis sous épisodes qui permettent de les considérer à un niveau plus fin. Des incidents et leur mode de gestion y sont en particulier relevés, ainsi que les stratégies et les signifiants utilisés. Ceci nous permet dans un deuxième temps de faire une analyse dans laquelle sont distingués le milieu et les microcontrats installés et de dégager la dynamique des stratégies employées au fur et à mesure : c'est l'analyse qui est donnée ici dans le corps de la thèse. Celle-ci se fait séance par séance et, à la fin de chacune, nous répondons à la première question, le jeu des interprétations (analyse descriptive). La deuxième question, sur les facteurs qui contribuent à la survenue des différentes interprétations, nécessite de reprendre la dynamique globale des quatre séances et la réponse à la première question. C'est pourquoi nous y répondons à la fin de l'analyse de la séquence, dans le paragraphe 2.2.

2.1 Analyse des séances

a. Séance 1

<u>Rappel de la tâche</u>

Une partie des élèves doit élaborer un message oral pour commander un nombre de boutons manquants représentés sur une fiche Ziglotron qu'ils ont à leur disposition et qui ne doit pas quitter leur table. Les élèves marchands sont éloignés des clients et doivent délivrer ce qu'on leur demande. Deux conditionnements sont disponibles : des plaques de dix boutons ou des boutons seuls. Les quantités en jeu sont suivant les fiches 23, 30, 37.

<u>La situation (milieu)</u>

La situation de la séance 1 est celle prévue par le manuel (voir l'analyse *a priori* et le lancement). Une différence est cependant à noter, c'est l'absence de prescription de stylos ou de crayons pour les clients, ce qui ne va pas favoriser l'émergence d'une stratégie consistant à constituer des groupements sur la fiche Ziglotron. Cependant l'emploi de stylos ou crayons n'est pas interdit et le contrat installé en classe permet aux élèves de les utiliser (ils le feront d'ailleurs pour énumérer les carrés). En outre, la référence à la séance « petit Ziglotron », 1er épisode du lancement, peut induire une stratégie identique à cette dernière, c'est-à-dire une stratégie OF consistant à obtenir la désignation parlée en France à partir de la désignation du cardinal de la collection par un comptage un à un (ce qui suppose des connaissances relatives à l'énumération). L'enseignant insiste pourtant sur la différence essentielle entre les deux séances : la présence de deux conditionnements, les plaques de dix et les boutons seuls. Le matériel passe de main en main, mais n'est plus présent pendant la réalisation de la première partie de la tâche des clients. Les élèves semblent cependant retenir surtout le fait qu'il y a plus de boutons à dénombrer dans cette séance que dans celle du petit Ziglotron.

La situation permet aux élèves de valider par eux-mêmes la correction de la collection obtenue par rétroaction du milieu matériel[255]. Cependant elle ne permet pas aisément d'identifier la cause des erreurs des élèves, en partie du fait que ceux qui délivrent la commande sont aussi des élèves qui sont susceptibles d'interpréter le message. En outre la situation ne contraint pas les « clients » à produire un message oral comportant une demande de plaques. Elle permet par contre aux « marchands » de comparer les commandes demandant des plaques (plus simples à réaliser car comportant moins d'objets à dénombrer) à celles n'en comportant pas.

Les stratégies des élèves et de l'enseignante

Les élèves n'ont pas recours à la constitution de groupements sur leur fiche Ziglotron pour faire la commande. Nous avons indiqué dans notre analyse *a priori* que cette stratégie, pourtant la plus efficace, est peu probable en considérant les connaissances anciennes des élèves[256].

Dans la période de travail des élèves, les stratégies de résolution de la tâche 1 de la séance 1 débutent essentiellement par un comptage un à un menant à une désignation parlée en France[257] : seuls deux groupes commandent des plaques en comptant les « dix » à partir de cette dernière (3ème épisode du travail des élèves, « *trois dizaines ça fait trente* »). Les interactions avec l'enseignante ne permettent pas de savoir comment ils procèdent car ce n'est pas ce que cette dernière recherche. Les élèves exposent des stratégies de résolution pendant la mise en commun : la majorité sont des comptages, d'autres sont proches de calculs en particulier pour obtenir des dizaines. Un groupe ébauche une stratégie OG vers OF pour « trente » (épisode 2.2 de la mise en commun).

L'enseignante n'indique pas de stratégie avant la mise en commun. Dans cette dernière, l'enseignante diffuse différentes stratégies de comptage ou calcul OF. Elle reprend une stratégie OF vers OG d'un groupe pour l'expliquer aux autres élèves (épisode 2.2). Elle explicite alors un passage OG vers OF (et non OF vers OG) en utilisant les signifiants « relais » dont l'un consiste en des groupements constitués à partir d'une reproduction par des croix au tableau de la collection figurée sur les fiches (stratégie non employée par les élèves) et l'autre des couples de mains (dix doigts).

Le guidage de l'enseignante et les microcontrats

Dans la phase de lancement, l'enseignante présente la séance et installe le milieu comme il est prescrit dans le manuel, permettant ainsi à un mésocontrat de dévolution d'une première situation de s'installer.

Durant la phase du travail des élèves, l'enseignante instaure, selon les cas, un microcontrat de tutorat ou de production individuelle : elle intervient parfois pour les aider mais sans apporter

[255] Dans la phase de bouclage de la séance, l'enseignante diffuse les informations sur la réussite ou l'échec des élèves en leur demandant aux élèves le résultat.

[256] Voir l'analyse *a priori* : la stratégie de groupement est non seulement plus efficace, mais en plus elle peut faciliter la mise en œuvre du passage vers une interprétation multiplicative.

[257] Voir par exemple en annexe l'épisode 2.2 de la mise en commun de la séance 1.

de connaissances. Elle veille cependant à ce que les « règles du jeu » (maintien du milieu) soient respectées (surtout auprès des marchands, 1er épisode, pour qu'ils n'interprètent pas le message délivré) et fournit des aides « techniques » afférentes principalement à l'énumération (connaissance ancienne ici mais toujours à consolider). Elle « résiste » ainsi à inciter les élèves à demander des plaques, ce qui pourrait permettre de favoriser les stratégies qui vont être nécessairement en jeu dans la séance suivante ou bien lui être utiles pour s'informer des difficultés des élèves. Les messages oraux qu'elle a relevés (de manière exhaustive) sont en effet majoritairement constitués d'une demande de boutons seuls (avec la désignation parlée en France). Elle a ainsi pu s'informer des procédures. Toutes ces informations sont utilisables par l'enseignante dans la phase de bouclage qui suit, y compris les erreurs d'énumération, erreurs qu'elle n'a pas signalées aux élèves.
La mise en commun débute par une phase de bilan. L'enseignante s'informe sur la validation faite par les élèves grâce au milieu matériel installé. Ceci permet ainsi à tous les élèves de savoir qui parmi eux a réussi ou échoué, sans pour autant que les méthodes aient été encore diffusées. Les erreurs peuvent être de sources multiples (voir l'analyse *a priori*), l'enseignante a le projet de relier ces erreurs au fait de ne pas avoir commandé des plaques de dix. Dans les épisodes 2.1 et 2.2, le contrat tout d'abord utilisé par l'enseignante est un microcontrat de production collective. Les élèves semblent imputer alors les échecs au fait d'un nombre important de carrés/boutons à dénombrer. Cette diffusion n'a pas mené à l'argumentation attendue, mais permet à l'enseignante d'organiser une phase au cours de laquelle les élèves vont accéder à l'argumentation souhaitée. En effet, dans l'épisode 2.3, du fait de son intervention et du guidage qui s'en suit, elle change d'interlocuteur ainsi que de microcontrat. Ce sont les élèves « marchands » qui vont être sollicités dans un microcontrat d'adhésion.
Dans le dernier épisode, l'enseignante met finalement en relief ce qu'il faut retenir de la séance. La connaissance ainsi mise en forme dans le contexte est annoncée comme allant être réutilisée dans une séance ultérieure. L'enseignante reprend les remarques des élèves sur la grandeur des nombres en jeu. Elle les met en parallèle avec la facilitation de la tâche pour le marchand lorsque des plaques lui sont demandées. Aucune stratégie afférente au dénombrement n'est indiquée.

Réponse à la première question : le jeu des interprétations (analyse descriptive)

Dans la phase de lancement, aucune interprétation n'est favorisée par l'enseignante. Devant la tâche de dénombrement, la majorité des élèves utilisent une interprétation ordinale (avec repérants ou non) de la numération parlée en France. Ils ont cependant des difficultés dans l'énumération, difficultés qu'ils indiquent dans le lancement, qui se voient dans la réalisation de la tâche et qu'ils signalent à nouveau dans la mise en commun (en particulier ils attribuent les erreurs commises à la grandeur des nombres). Cependant deux groupes ont demandé des plaques (sans se tromper) et sont susceptibles ainsi d'avoir utilisé dans ce contexte et pour un nombre particulier (l'un trente, l'autre trente-six) des éléments d'une interprétation multiplicative de la numération parlée en France. Ceci est conforté par des interventions dans la mise en commun *(« trois dizaines ça fait trente* »).
Dans la mise en commun l'enseignante indique à l'aide des élèves différentes stratégies de comptage ou calcul menant à une désignation parlée en France du cardinal de la collection figurée : ce sont alors des interprétations ordinales (avec repérant) ou arithmétiques qui sont en jeu. Quand elle valide au tableau une réponse d'un élève de type organisation des groupements, elle utilise alors des signifiants « relais ». Il s'agit ici de groupements constitués à partir de la collection figurée sur les fiches des élèves qui a été reproduite par des croix au tableau (stratégie non employée par les élèves) ainsi que les deux mains pour indiquer une

dizaine[258] (épisode 2.2 de la mise en commun). Cette organisation a été obtenue par l'élève au fur et à mesure de son dénombrement, *a priori* dans une interprétation multiplicative (« trois dizaines ça fait trente »)[259]. Mais en partant de cette organisation, elle n'explique pas comment elle a été obtenue, ce qui aurait pu mettre en jeu une interprétation multiplicative. En répondant à leurs questions, elle justifie que « *trois dizaines ça fait trente* » en utilisant une connaissance ancienne des élèves. C'est l'interprétation additive qui est donc finalement évoquée par l'enseignante : dix plus dix, vingt et encore dix, trente. Elle a finalement explicité une stratégie OG vers OF utilisant une organisation de la collection[260] et non OF vers OG. A noter que l'enseignante a tout d'abord utilisé des éléments d'une interprétation multiplicative, « *trois fois tout ça* » en désignant un groupe de dix croix entouré au tableau, mais qu'elle a rapidement abandonné ce type d'explication.
L'interprétation utilisée pour la numération parlée en France est donc essentiellement ordinale avec repérant ou/et additive, celles-ci n'étant pas clairement distinguées ou distinguables par les intervenants[261]. L'écriture chiffrée n'intervient pas dans cette séance.

b. Séance 2

Rappel de la tâche

La tâche proposée dans la séance 2 est celle du manuel (voir analyse *a priori*). Les élèves « clients » disposent des fiches Ziglotron (28, 34 ou 45 boutons manquants). Ils doivent compléter un bon de commande composé de deux parties : une première indiquant via l'écriture chiffrée le nombre de boutons manquants, une deuxième (le message proprement dit destiné au « marchand ») consistant à écrire le nombre de paquets et de boutons voulus. Les élèves clients doivent recevoir la commande mais la validation ne se fait pas avant la mise en commun. Les élèves « marchands » doivent donner ce qu'on leur demande.

Les situations (milieu)

La situation installée dans la séance 2 est proche de celle proposée par le manuel (voir analyse *a priori*). En particulier, comme dans la séance 1, elle ne permet pas aisément d'identifier la cause des erreurs des élèves, en partie du fait que ceux qui délivrent la commande sont aussi des élèves qui sont susceptibles d'interpréter le message. En outre, ici, dès le lancement, les réactions des élèves et les incidents (1er épisode) indiquent certaines difficultés des élèves. Ils perçoivent difficilement l'utilité d'adresser au marchand sur un même bon de commande à la fois le nombre de boutons par une écriture chiffrée (traduction de la désignation parlée en France) et un message à son adresse. Dans l'analyse *a priori*, nous avons signalé qu'en effet la première partie du message est inutile pour faire la demande au marchand. En outre, elle incite les élèves à utiliser une stratégie OF vers OG et non à faire des groupements sur la fiche Ziglotron[262]. Les deux parties du bon de commande (voire les trois, pour les élèves qui conçoivent les trois lignes de manière indépendantes) sont effectivement considérées comme

---

258 A noter que les deux mains ne sont pas utilisées pour scander la suite des dizaines, dix, vingt, trente. Il est indiqué que les deux mains font dix, puis l'enseignante revient sur les paquets de dix croix au tableau.

259 Nous ne pouvons pas être sûr de cette interprétation. Le fait de dire « trois dizaines ça fait trente » peut venir d'un commentaire *a posteriori* quand il commente l'organisation. Il a pu tout aussi bien utiliser une interprétation additive voire ordinale.

260 A noter que cette organisation obtenue au tableau n'est à proprement parler pas un signifiant, puisqu'il s'agit d'une reproduction de la collection elle-même.

261 Les élèves n'ont été confrontés que depuis peu de temps à des problèmes de la structure additive. Rappelons à titre d'exemple, que l'emploi du signe « + » ou du mot « plus » par les élèves ou l'enseignante n'atteste pas que soit évoqué un concept de la structure additive.

262 L'écriture chiffrée demandée peut aussi permettre une stratégie EC vers OG, mais c'est la stratégie qui n'est éventuellement à mettre en exergue que dans la séance 3.

redondantes pour la tâche. Dès le lancement, épisode 1, une stratégie de comptage est indiquée par l'enseignante pour désigner le nombre de boutons manquants à l'aide d'une écriture chiffrée. Cette stratégie de comptage (un à un) n'est cependant pas la plus efficace[263]. La validation matérielle est différée après une mise en commun, comme le manuel le propose.

Les stratégies des élèves et de l'enseignante

Ici encore, les élèves n'ont pas recours à la constitution de groupements sur leur fiche Ziglotron pour faire la commande.
Comme dans la séance 1, les stratégies utilisées pour la première partie du message sont aussi des comptages, principalement un à un (ce qui peut expliquer les erreurs de dénombrement de la majorité des élèves). Pour la deuxième partie du message, différentes stratégies sont utilisées (voir la réalisation de la tâche des élèves et la mise en commun) : dénombrement de 25 boutons et demande de 25 paquets, dénombrement de 45 boutons et demande de quarante paquets et cinq boutons, et absence de message écrit. Nous n'avons pas repéré de réussite à la rédaction d'un message (qui pourrait indiquer une réussite dans l'emploi de la stratégie OF à la forme écrite de OG). Pour les élèves ayant complété la deuxième partie du bon de commande, nous constatons que certains s'arrêtent à l'indication du nombre de boutons manquants par une désignation parlée en France traduite par une écriture chiffrée, tandis que d'autres utilisent dans le message le repérant entendu dans cette désignation.
En ce qui concerne l'enseignante, elle indique dès le premier épisode du lancement de la séance, en ce qui concerne l'obtention du cardinal de la collection figurée, une stratégie OF consistant à compter les carrés (un à un), mais la stratégie pour traduire la désignation parlée en France en la désignation écrite chiffrée, OF vers EC, n'est pas abordée.
Les débats des phases de conclusion vont porter essentiellement sur des stratégies OF vers OG (et non l'inverse, ce qui est pourtant les stratégies susceptibles d'être en jeu pour réussir la tâche). Des signifiants « relais » sont utilisés par l'enseignante.
Les élèves utilisent systématiquement l'écriture chiffrée comme la forme écrite de la désignation parlée en France. Tous les échanges retranscrits en annexe l'attestent.

Le guidage de l'enseignante et les microcontrats

Pour le lancement, l'enseignante tente de ne pas donner d'aide aux élèves. Elle fait cependant référence à la séance précédente quant aux stratégies possibles, bien que celles-ci n'aient pas fait l'objet d'un processus d'institutionnalisation. Par ailleurs, afin d'éclaircir le rôle joué par les deux parties du bon de commande, l'enseignante, constatant l'incompréhension des élèves, finit par donner une stratégie de type OF vers EC pour remplir la première partie.
Quand les élèves sont confrontés à la tâche, l'enseignante passe les voir, ce qui lui permet d'avoir connaissance de certaines stratégies. A aucun moment elle ne s'informe sur le passage de la désignation parlée à l'écriture chiffrée. Durant le travail des élèves, elle veille toujours à ce que les « règles du jeu » (maintien du milieu) soient respectées et particulièrement auprès des marchands pour qu'ils n'interprètent pas le message délivré. L'enseignante garde un microcontrat de production individuelle quand elle s'est assurée qu'une argumentation pendant la mise en commun pourra invalider les messages à partir des productions matérielles des collections obtenues. C'est le cas du message « *Il faut **25** boutons. Ma commande : **25** paquets de dix boutons, **....** boutons* ». Sinon, à ceux qui n'ont pas fait de message ou pas obtenu de collection, elle poursuit la dévolution en redonnant les règles afin d'assurer une certaine adidacticité à la situation. Enfin, elle change de microcontrat, passant à un microcontrat de tutorat, quand la collection obtenue est correcte mais le message est incorrect comme « *Il faut **45** boutons. Ma commande : **quarante** paquets de dix boutons, **cinq***

[263] Voir l'analyse *a priori* : la stratégie de groupement est non seulement plus efficace, mais en plus elle peut faciliter la mise en œuvre du passage vers une interprétation multiplicative.

boutons ». C’est ainsi qu’elle gère le fait que le milieu n’assure pas une rétroaction suffisante pour invalider ce qu’ont fait les élèves. Le contrat employé par l’enseignante permet à certains élèves de proposer une validation devant elle. Un élève[264] propose une validation, mais qui ne mène pas à invalider sa réponse (erronée). L’enseignante gère cet incident en changeant de contrat (microcontrat d’ostension assumée). Elle donne la réponse à l’élève, en différant à la mise en commun l’information sur la validité de la réponse qu’elle lui laisse produire. Ainsi, en résumé l’enseignante tente d’instaurer comme dans la première séance un microcontrat de tutorat ou de production individuelle mais utilise aussi un microcontrat d’ostension assumée pour gérer une rétroaction insuffisante du milieu pour que les élèves valident certains types de réponse.

L’enseignante indique vouloir faire un bilan dans la mise en commun cependant, contrairement à la première séance elle ne peut pas utiliser de validation faite par les élèves durant leur travail. Beaucoup de messages sont passés rapidement en revue, favorisant plus un processus d’évaluation que de validation. L’enseignante essaie cependant de fournir une validation, grâce aux connaissances des élèves. Elle fait le pari que les débats qui auront lieu sur les productions qu’elle aura choisies permettront à chaque élève d’avoir une information sur la validité de la sienne. Cette gestion du bilan est donc en partie influencée par la situation elle-même, les potentialités adidactiques étant moindres (voir analyse *a priori*). L’enseignante choisit d’invalider certains messages pour mettre en exergue les erreurs qu’elle a remarquées. Le microcontrat d’adhésion qu’elle instaure permet aux élèves de faire ressortir un certain nombre de difficultés liées à la compréhension du message. A noter qu’en conséquence, certaines erreurs ne seront pas abordées. En particulier l’enseignante ne relève pas les erreurs de dénombrement que semblent trahir les écritures chiffrées erronées produites par les élèves[265]. Par ailleurs l’enseignante ne revient pas de manière ostensible sur deux difficultés inhérentes à la situation et que les élèves ont déjà signalées dans le lancement, difficultés qui pourraient contribuer à expliquer les erreurs des élèves. Il s’agit de l’incompréhension de la fonction du bon de commande (soit parce qu’il suffit de parler pour obtenir la collection voulue, soit parce qu’il y est indiqué (au moins) deux fois la quantité) et du fait que les élèves sont des lecteurs débutants (pour comprendre ce qui leur est demandé dans le bon, certains peuvent se restreindre à des mots qu’ils identifient plus facilement, comme « bouton », d’autres à certains indicateurs dus à la présentation de l’exercice comme les pointillés).

Réponse à la première question : le jeu des interprétations (analyse descriptive)

Dès le lancement, la stratégie OF indiquée par l’enseignante engage à utiliser la numération parlée en France dans une interprétation ordinale (pas nécessairement avec repérants). L’indication de cette stratégie peut inciter alors les élèves à réaliser la tâche de formulation du message par une stratégie OF vers OG. Si les repérants ne sont pas mis en exergue, l’interprétation ordinale ne facilite pas cette dernière. Une stratégie consistant à faire des groupements de dix sur la fiche n’est pas favorisée, bien qu’elle puisse mener à une interprétation multiplicative.

[264] Il s’agit de l’épisode 2.6 de la réalisation de la tâche par les élèves (voir annexe n°… séance…). L’élève utilise une stratégie consistant à compter les groupements un à un à l’aide de la comptine des dizaines « dix, vingt, trente, quarante » pour obtenir la désignation parlée en France de la quantité (une stratégie OG vers OF). Il vérifie ainsi que la quantité de boutons obtenue correspond bien à celle qu’il a demandée (quarante). Cette vérification ne le détrompe pas : il a demandé « quarante » sous forme de plaques et a obtenu « quarante » sous forme de plaques. L’enseignante tente alors d’aider l’élève en essayant de lui faire distinguer un groupement de dix (obtenus en comptant des objets avec la comptine numérique usuelle, un, deux, trois, etc.) et la quantité de boutons qu’il contient (dix), mais l’élève continue à identifier un nombre de groupements avec le nombre d’objets qu’il contient.

[265] Il est aussi possible qu’elles proviennent d’une erreur dans le passage de la désignation parlée en France à la désignation écrite chiffrée correspondante, mais ce passage ne sera jamais abordé dans la séance.

Comme dans la séance précédente, la phase de bouclage se résume essentiellement à une phase de bilan. Ce sont toutes les productions des élèves qui font l'objet de validation. Ces validations ne se font pas par le biais de la validation des stratégies qui les ont amenées, mais par le fait que les messages indiquent bien la quantité désignée par sa désignation parlée en France. Ce sont donc des stratégies OG vers OF qui sont en jeu et la numération parlée en France est utilisée par l'enseignante dans une interprétation ordinale avec repérant ou additive. Mais cette utilisation n'est pas si aisée chez les élèves quand il s'agit d'utiliser la comptine des dizaines pour obtenir le cardinal de la collection. En effet, l'enseignante utilise le signifiant « relais » consistant en une production graphique de type 1 pour traduire une désignation de groupements à valider. Un élève dénombre alors un à un les « objets » qu'il voit (quatre plus quatre, huit).
Cette difficulté est liée dans la séance à celle consistant à concevoir que nommer <u>une</u> plaque (ou un paquet) permet de désigner la quantité entière « dix » de boutons qu'elle contient[266]. Autrement dit, beaucoup d'élèves semblent conscients qu'une plaque contient bien dix boutons, mais dès qu'ils veulent parler de cette quantité, ils la nomment par sa désignation parlée en France, « dix », sans se rendre compte qu'une plaque (ou un paquet) désigne de facto la quantité qu'elle contient. Ceci fait écho à notre analyse *a priori* : dans « 20 paquets/plaques de dix et 8 boutons », les mots « plaques » ou « paquets » indiquent ainsi pour ces élèves un conditionnement (un élève dit « en plaques ») et non le nombre qu'il contient alors que « 20 » (qui est la forme écrite de l'oral « vingt ») garde l'information principale, le nombre de boutons[267].
La validation des productions des élèves et la prise en compte de leurs difficultés (dans un microcontrat d'adhésion), entraîne que la phase de bilan n'a pas porté sur les stratégies pour réaliser la tâche. Dans la phase de bouclage, le passage de l'appui ou repérant à un nombre de plaques/paquets correspondant n'a pas été abordé. Ce passage peut permettre de passer d'une interprétation ordinale ou additive à une interprétation multiplicative. Ainsi, à nouveau dans cette séance, l'interprétation utilisée pour la numération parlée en France est ordinale avec repérant ou/et additive.
En ce qui concerne l'écriture chiffrée, du fait des connaissances anciennes des élèves mobilisables pour résoudre les tâches, la situation engage à la considérer comme la forme écrite de la désignation parlée en France. Distinguer et donner du sens à chaque chiffre n'est à mettre en avant que dans la séance suivante. Les discours et les actions que nous avons relevés, que ce soit de l'enseignante ou des élèves, ne font que renforcer cette position de l'écriture chiffrée par rapport aux désignations parlées en France. En particulier, à aucun moment la stratégie pour traduire la désignation parlée en France en la désignation écrite chiffrée, OF vers EC, n'est abordée, sous-entendant que la désignation écrite chiffrée est la forme écrite de la désignation parlée en France. A chaque fois que l'enseignante utilise des écritures chiffrées (pour le bon de commande, mais aussi dans ces explications comme quand elle emploie « *20+8=28* »), c'est pour traduire au tableau ce qui est dit oralement. Qui plus est, dans le 2ème épisode de la mise en commun, la file numérique des écritures chiffrées est utilisée par l'enseignante, dans une interprétation ordinale, en tant que version écrite de la comptine numérique des désignations parlées en France. La succession temporelle des mots

266 Voir l'épisode 2.6 de la réalisation de la tâche des élèves.
267 Rappelons ce qui a été indiqué dans l'analyse *a priori*. Dans leur message, les élèves doivent indiquer un type de conditionnement et un nombre de boutons, nombre qu'ils ont l'habitude de nommer par sa désignation parlée en France. Une réponse telle que « 20 paquets de dix et 8 boutons » permet alors de concilier les deux : « 20 » indiquant le nombre et « paquets de dix » le conditionnement. Le message permet de réussir la tâche puisque le marchand, qui est aussi un élève, peut comprendre ce qu'on lui demande. La variable didactique ayant pour but d'instaurer un milieu matériel qui contraint les élèves à donner un nombre d'éléments selon chaque type de conditionnement pour la réussite de leur tâche est ainsi « contournée ».

de la comptine est remplacée par la disposition spatiale linéaire et un sens de lecture des écritures chiffrées. Du côté des élèves, à signaler qu'un seul bon de commande ne contient pas des écritures chiffrées : « quarante » y est utilisé comme synonyme de « 40 », et l'emploi d'une écriture littérale n'est questionné ni par les autres élèves ni par l'enseignante.

c. Séance 3

Rappel de la tâche

Pendant la première partie de la séance, les deux tiers des élèves ont à faire un « coloriage magique » tandis qu'un tiers doit faire une commande pour réparer un Ziglotron. Ils disposent d'une fiche sur laquelle est figurée la collection de boutons manquants dont le cardinal est indiqué par l'écriture chiffrée « 42 » sur le bon de commande à compléter. Ils doivent en outre préalablement faire des groupements sur cette fiche.
La deuxième partie de la séance est dans la continuation de la première pour le tiers des élèves ayant produit un bon de commande. Un autre tiers des élèves les rejoint pour discuter de la validité du bon. Le dernier tiers élabore individuellement et seul un bon de commande, sans fiche Ziglotron. Le nombre de boutons en jeu est le même pour tous et est signifié par « 42 ».

La situation (milieu)

En ce qui concerne la première partie de la séance (la tâche donnée au premier tiers des élèves), un découpage est fait en deux sous-tâches. La première sous-tâche consiste à constituer des groupements de dix sur la fiche (collection figurée de carrés), ce que la majorité des élèves de ce tiers de classe a fait dans une séance auparavant. Des aides pour exécuter cette première sous-tâche sont (re)données sous forme d'indications techniques concernant l'énumération ou/et le calcul pour obtenir dix dans un groupement. Cette sous-tâche, d'un niveau technique, a déjà été travaillée entre les séances 2 et 3[268]. La maximalité est spécifiée par le fait que, lorsqu'il est possible de faire d'autres groupements, il faut le faire. Cette sous-tâche n'est pas reliée au futur message, elle est indiquée ici sans faire référence à la deuxième consistant à compléter le bon de commande. Ainsi il n'y a pas de rétroaction venant du milieu matériel pour la première sous-tâche. Pour la deuxième sous-tâche, la prise en compte de la première permet d'envisager des stratégies autres que celles que nous avons mises en exergue jusque là. La stratégie que nous avons analysée comme la plus efficace (faire des groupements de dix sur la collection, sans utiliser la désignation parlée en France du cardinal) est en effet mobilisable. Cependant l'indication du nombre en jeu par une écriture chiffrée en haut du bon de commande donne aussi deux autres possibilités : l'utilisation des chiffres (d'après le manuel c'est la stratégie à rendre mobilisable) ou bien le passage par une désignation orale, une des stratégies de type OF vers OG. Cette dernière doit cependant être complétée par une traduction écrite contextualisée, traduction qui est amorcée dans les phrases déjà écrites du bon de commande à compléter. A noter que plusieurs essais sont possibles. La simplification de la tâche initiale et les indications de stratégies instaurent une situation à faible potentiel adidactique. La validation n'est plus matérielle, elle est issue d'une confrontation avec un autre élève.
En ce qui concerne la deuxième partie de la séance, trois tâches différentes sont à considérer. Les élèves qui rejoignent ceux qui ont effectué la première partie doivent vérifier ce que ces

[268] Dans ces séances supplémentaires, placées entre les séances 2 et 3 de la séquence Ziglotron, Mme B. a proposé à tous les élèves de désigner des collections à l'aide de groupements différents. Par exemple elle présente deux paquets de quatre crayons et demande combien il y a de paquets, attendant la réponse « deux » et non pas « huit » (cette dernière survient effectivement). Certains élèves, ceux jugés les plus en difficulté, vont devoir constituer des paquets de dix sur des collections figurées. Ces tâches étaient techniques et détachées d'un problème mettant en jeu le nombre ou/et une de ces désignations pour le résoudre.

derniers ont fait, ce qui induit plutôt des stratégies de type OG vers OF. Cependant dans le cas où ils ne sont pas d'accord, ils peuvent être amenés à effectuer eux-mêmes la tâche précédemment prescrite, avec un milieu matériel comparable (des traces ont pu être laissées sur la fiche Ziglotron par le premier élève), avec en sus des interactions possibles avec leur binôme. Les élèves qui ont déjà effectué la tâche peuvent argumenter et essayer de comprendre ce que dit leur binôme. Ils peuvent aussi être amenés à s'essayer à nouveau à la tâche dans les conditions que nous venons d'indiquer. Enfin le dernier tiers n'a pas à sa disposition la fiche Ziglotron, il doit ainsi réaliser la tâche dans les conditions indiquées par le manuel (voir analyse *a priori*).
Dans la phase de bouclage, ce n'est pas forcément le message élaboré initialement, mais celui rediscuté qui est susceptible d'une validation.

Les stratégies des élèves et de l'enseignante

L'enseignante indique dans le lancement une stratégie pour lire l'écriture chiffrée « 42 », EC vers OF (épisode 2.1 du lancement de la première tâche). Il s'agit d'associer le « 4 » à (la famille des) « quarante » et de lire « 2 » (deux).
Dans ce lancement, les élèves indiquent quelques stratégies de comptage pour constituer un paquet de dix. Les stratégies d'obtention des groupes de dix indiquées par les élèves consistent en un comptage de un en un, avec des marques pour aider dans l'énumération ou par réunion de deux groupes de cinq.
La première sous-tâche, qui consiste en fait à entourer dix carrés/boutons sur la fiche Ziglotron puis à répéter cet algorithme, n'est pas mise en relation avec la tâche finale, c'est-à-dire remplir le bon de commande. Plus encore, les élèves semblent relier cette tâche au fait de dénombrer. C'est ce qu'indique un élève dans le 2ème épisode du lancement initial « *J'avais vingt-huit boutons qui s'étaient enlevés, après avec la maîtresse j'ai entouré deux plaques de dix ça fait vingt, et après huit petits boutons qui fait vingt-huit* ». C'est donc pour les élèves finalement plus une stratégie de dénombrement pour obtenir la désignation parlée en français du cardinal de la collection qu'une stratégie pour obtenir une désignation des groupements à utiliser dans le bon à remplir. Ceci va se retrouver en particulier dans l'épisode 2.3 (quatre groupements sont matérialisés, mais les deux qui restent sont aussi entourés). Le fait de devoir avant tout compter est perceptible dans l'épisode 2.2 dans lequel l'élève coche tous les carrés un par un sans faire de groupements. En outre il pense que ces groupements sont utiles pour la validation. Ceci montre que les groupements ne sont pas mis en relation avec la tâche finale, comme c'est aussi perceptible dans l'épisode 2.4 (uniquement trois groupements effectués). En fait un seul groupe a réussi, celui de l'épisode 2.4. Le fait que pour ces élèves le but est avant tout de dénombrer, indiquer le cardinal de la collection par une écriture chiffrée, traduction de la désignation parlée en France, va se voir dans tous les messages produits initialement par les élèves du premier tiers, en particulier dans les épisodes 1.2 et 1.3 de la réalisation de la 2ème tâche (les messages consistent en « 42 paquets »). La plupart des élèves qui viennent pour discuter de ces messages utilisent des stratégies d'(in)validation OG (message) vers OF mettant en jeu les repérants/appuis additifs. Ils utilisent des stratégies de comptage ou de calcul (épisodes 1.3 et 1.4) ou indiquent directement que les appuis/repérants formulés dans le message ne sont pas les bons (épisode 1.1). Un élève (épisode 1.4) relie les dessins faits, la formulation du bon de commande et le nombre de boutons au total, en indiquant que les désignations en jeu ne conviennent pas, sans justifier par ailleurs : « Je lui ai dit que ça, ça fait vingt (*montrant les deux groupes de dix entourés sur le Ziglotron),* et (*montrant l'ensemble du Ziglotron*) ça fait pas trente-cinq, ça fait quarante-deux ».
Dans la mise en commun, un élève indique qu'il a compté le nombre de dix dans la décomposition « dix plus dix plus dix plus dix égale quarante ». Il est vraisemblable qu'il ait « additionné » les dix jusqu'à obtenir quarante, dix plus dix plus dix plus dix, car c'est un élève de l'épisode 1.2. Il a donc indiqué une stratégie OG vers OF et non l'inverse.

L'enseignante reprend ce que dit l'élève pour indiquer le résultat des sommes partielles : dix plus dix, vingt, plus dix, trente, plus dix quarante. Elle va utiliser l'écriture 10+10+10+10, ce qui permet de compter les dix, alors que les élèves n'ont vraisemblablement pas eu recours à cette écriture (peut-être ont-ils pu mémoriser le nombre de fois qu'ils ont dit « dix », ou bien ont-ils fait des marques, ou utilisé leurs doigts ou encore ont-ils utilisé les groupements entourés ?). L'enseignante indique ainsi une stratégie : il s'agit de considérer la désignation parlée en France du cardinal de la collection qui est ici connue, de faire la somme au fur et à mesure des « dix » pour arriver au repérant/appui de cette désignation puis d'écrire cette somme 10+10+10+ ... afin de compter ces « 10 »/dix.

Le guidage de l'enseignante et les microcontrats

L'enseignante ne propose pas la séance telle qu'elle est indiquée par le manuel et le dispositif qui propose aux élèves des tâches différentes conduit à la production de messages corrects.
L'enseignante facilite la tâche initialement proposée par le manuel pour les élèves les plus en difficulté. Pour indiquer cette tâche à ce premier tiers de la classe, l'enseignante utilise un microcontrat d'ostension plus ou moins assumé : les élèves décrivent en effet chaque étape de la tâche à l'aide des questions de l'enseignante, ce qui amène à indiquer les stratégies à utiliser. Elle tente d'instaurer un microcontrat de production individuelle pendant cette première période de travail. Elle passe dans les rangs et se trouve informée des difficultés des élèves que nous avons signalées ci-avant. Les groupements n'ont pas nécessairement été faits de manière maximale (ce qui atteste encore que les élèves ne relient pas les groupements qu'ils constituent avec le message à faire) et les dénombrements posent problème pour ceux qui en on fait (ce n'est pas nécessaire pour réaliser la tâche ni prescrit par l'enseignante). Pour aider les élèves, l'enseignante n'utilise pas un microcontrat de tutorat mais les interactions entre pairs, dans un deuxième temps de la séance. L'enseignante n'a pas non plus recouru à un changement de milieu matériel, comme par exemple le fait de mettre à disposition des plaques de dix aux élèves pour les associer terme à terme aux groupements.
Pendant le travail des élèves, l'enseignante s'informe des arguments qui ont permis de faire émerger un savoir (et la nature de ce savoir) et des erreurs qui peuvent persister. Elle va voir les binômes pendant la réalisation de cette deuxième tâche. L'enseignante choisit d'utiliser pour certains groupes un contrat de tutorat au lieu d'un microcontrat de production individuelle. Les échanges entre élèves concernent principalement les (in)validations des messages produits. L'enseignante essaye avant tout de relancer les échanges. Elle reprend parfois l'argumentation de l'élève qui vient discuter de la validité du message afin que l'élève qui s'est trompé puisse la comprendre (voir les épisodes de la réalisation de la 1ère tâche).
Dans la phase de bouclage, ce sont les messages qui ont été rediscutés et produits par le troisième tiers qui sont l'objet d'une validation. Dans le début de la mise en commun, l'enseignante utilise un microcontrat d'adhésion pour organiser une phase de bilan. L'organisation instaurée par l'enseignante a permis de n'obtenir que des messages exacts. La diffusion des réponses ne demande pas de hiérarchisation. Comme tous les élèves ont produit la même chose, la validation d'une unique production (correcte) va permettre de les valider toutes. Les différentes procédures utilisées ne sont pas diffusées. Par le biais du microcontrat d'adhésion, l'enseignante mène le bilan principalement avec l'aide d'un seul élève. La question qu'elle formule initialement amène à la diffusion d'au moins une stratégie. L'élève est un des élèves qui a travaillé à la première tâche puis en binôme. Il a eu ainsi à sa disposition la fiche Ziglotron mais il n'y fera pas référence. L'enseignante récupère et enrichit ce qu'il dit et ne le relance pas sur sa procédure. Elle reprend ce que dit l'élève pour indiquer le résultat des sommes partielles, dix plus dix, vingt, plus dix, trente, plus dix quarante, grâce à l'écriture 10+10+10+10, ce qui lui permet de compter les dix, L'enseignante indique ainsi la stratégie signalée ci-avant. Il nous semble alors que le contrat n'est plus celui d'adhésion, l'enseignante introduisant un signifiant, une stratégie non utilisée par les élèves. Il nous

semble que le microcontrat est alors d'ostension déguisée. En effet, l'égalité 10+10+10+10=40 semble traduire ce que l'élève dit oralement, alors que ce n'est pas tout à fait le cas (ce que la réaction de certains élèves peut laisser penser). En outre la stratégie est indiquée de manière non ostensible et ce n'est pas celle qui est nécessairement utilisée par tous.
Dans la phase de bouclage observée, le passage des preuves provenant du milieu matériel aux preuves intellectuelles est minimisé voire a disparu. Par ailleurs, l'écriture chiffrée, comme précédemment, est toujours utilisée en tant que forme écrite de la désignation parlée en France.
L'enseignante constate en fin de séance que les élèves n'ont pas établi de lien entre les chiffres de l'écriture chiffrée et les chiffres utilisés pour le message (objectif annoncé par le manuel). Elle ne leur indique pas le savoir visé et reste dans un contrat d'adhésion.

Réponse à la première question : le jeu des interprétations (analyse descriptive)

Dès le lancement, la stratégie EC vers OF indiquée par l'enseignante engage à utiliser l'écriture chiffrée comme forme écrite de la désignation parlée en France dans une interprétation ordinale avec repérant. Ici, la « famille des quarante » est associée à 4, le mot famille se rapportant au fait que le chiffre à gauche « 4 » est le même de 40 (quarante) à 49 (quarante-neuf). Les stratégies d'obtention des groupes de dix se font par une interprétation ordinale de la numération parlée (comptage de un en un, les boutons/carrés étant cochés pour faciliter l'énumération) ou grâce au résultat arithmétique « cinq et cinq font dix ». Ce dernier est associé au problème arithmétique consistant à obtenir la désignation parlée du cardinal de la réunion de deux groupements (mains) de cinq. Comme dans la séance précédente, le premier groupe d'élèves (ceux qui doivent faire des groupements puis compléter un bon de commande) dénombrent les éléments de la collection. Ceci est pourtant inutile puisqu'ils connaissent la désignation du cardinal dès le départ. Ils utilisent le plus souvent une interprétation ordinale, parfois avec repérants quand ils s'appuient sur les groupements de dix qu'on leur a demandé de faire. Ces élèves ont des difficultés à mobiliser une désignation des groupements, même quand ils ont matérialisé ces groupements sur leur fiche Ziglotron.
Que ce soit dans la deuxième tâche (élèves en binôme) ou dans la mise en commun, que ce soit à l'initiative des élèves ou de l'enseignant, les validations des messages produits entraînent des explications de stratégies OG vers OF consistant à obtenir la désignation parlée en France du message produit (et non l'inverse). A nouveau ce sont alors des interprétations additives ou ordinales avec repérants qui sont engagées.
Cependant, ici, dans la mise en commun, l'enseignante indique une stratégie pour résoudre la tâche. Elle permet de passer d'une interprétation additive (10+10+10+10=40) à une interprétation multiplicative (compter le nombre de « 10 »[269]). Les « 10 » sont reliés aux paquets de dix croix qui sont au tableau. Il y a quatre paquets de dix, et quand on compte, il y a quatre « 10 » (ils sont alors entourés comme les paquets). Ceci permet de légitimer la stratégie : au lieu de constituer des paquets sur la fiche Ziglotron, il suffit de compter dix (plus dix), vingt (plus dix), trente (plus dix), quarante et d'écrire 10+10+10+10 =40 (traduction de l'oral). Cependant, il n'est pas évident que l'interprétation additive soit perçue de tous les élèves (cela peut rester une interprétation ordinale avec repérant). En effet tout d'abord le problème n'est pas présenté comme un problème de la structure additive : la question n'est pas posée en termes de problème de désignation du cardinal de la réunion de collections. Ensuite, les « preuves » avancées sont d'ordre intellectuel (un savoir ancien) et l'écriture additive est un savoir encore en cours d'apprentissage. En outre, la tâche de constitution de groupements sur la fiche Ziglotron n'a pas fait l'objet de validation, et a été utilisée visiblement par quasiment aucun élève (y compris par ceux à qui elle était prescrite).

[269] Ceci est indiqué dans le manuel.

Finalement le problème de comptage de dix en dix relevé dans la séance précédente montre les difficultés de certains élèves à utiliser l'interprétation additive sur des objets unitaires représentant dix (un groupement entouré, un « 10 »). Cette stratégie reste implicite.
A nouveau la phase de bouclage a consisté en une phase de bilan, et bien que soient apparus dans la mise en commun des éléments d'une interprétation multiplicative, les élèves n'ont pas établi de lien entre les chiffres de l'écriture chiffrée et les chiffres utilisés pour le message. Ceci est visible dans la réaction des élèves sollicités dans ce sens par l'enseignante à la fin de la séance.

d. Séance 4

Rappel de la tâche

Une première tâche consiste à faire des remarques sur trois bons de commande reproduits au tableau (43, 32 et 28 boutons manquants), une deuxième à compléter le message de deux bons de commande (16 et 34), les troisièmes et quatrièmes sont celles proposées via les exercices 2 et 3 p. 70 du manuel. Les élèves doivent compléter la deuxième partie de bons de commande, 36, 30, 82 boutons manquants (exercice 2) puis la première partie d'autres bons de commande, 7 paquets et 8 boutons, 4 paquets et 0 boutons, 1 paquets et 5 boutons, 3 paquets et 7 boutons (exercice 3).

La situation (milieu)

La première tâche des élèves consiste à faire des remarques sur trois bons de commande reproduits au tableau et issus de séances précédentes : « 42 boutons, 4 paquets de 10 boutons et 2 boutons », « 32 boutons, 3 paquets de 10 boutons et 2 boutons » et « 28 boutons, 2 paquets de 10 boutons et 8 boutons ». Aucun milieu matériel n'est installé. Les questions sont ouvertes dans un premier temps sur l'ensemble des trois bons de commandes et se précisent au fur et à mesure des remarques des élèves (par exemple « où est-ce qu'il y a des deux dans ce bon de commande ? »). La tâche n'étant pas problématique au sens de la TSD (il n'y a pas de connaissances mathématiques précises qui permettent de résoudre un problème), les remarques des élèves peuvent être diverses : de surface (habillage), sur les chiffres, les mots, les nombres, dans un même message, entre deux ou trois messages. A remarquer que les chiffres de l'écriture chiffrée « 10 » peuvent *a priori* être aussi questionnés. Dans un deuxième temps, les questions sont restreintes à un seul bon de commande, le premier : « 42 boutons, 4 paquets de 10 boutons et 2 boutons ». Un constat est fait « *On a dit que pour quarante-deux boutons il fallait quatre paquets de dix boutons et deux boutons, d'accord ?* » et la question est : « *Est-ce que quelqu'un peut expliquer pourquoi il est sûr que c'est ça sans dessiner tous les boutons, sans aller chercher les gommettes et les coller* ». Le contexte de cette question peut amener les élèves à considérer les écritures chiffrées, mais aussi les désignations parlées en France qui sont employées, ou tout autre facteur qui peut faire écho à la situation vécue par les élèves dans les séances précédentes. En ce qui concerne cette dernière, la précision « *sans dessiner tous les boutons, sans aller chercher les gommettes et les coller* » limite cette possibilité.
La deuxième tâche consiste à compléter la deuxième partie de deux bons de commande (16 et 34). Ici encore aucun milieu matériel n'est installé. Les stratégies possibles sont toutes celles de type EC vers OG, et d'une manière générale tous les cheminements cognitifs décrits dans le 4ème chapitre auxquels fait référence l'analyse *a priori* de la tâche de l'exercice 2 p. 70. En effet, cette tâche est similaire à cet exercice, à la différence près qu'elle est faite sans fichier. Ainsi, elle exige une réponse sous forme d'une désignation orale des groupements et non de compléter des phrases par des chiffres pour avoir la traduction écrite de cette désignation orale. Du fait du déroulement de la séance (la première tâche précédente) et des connaissances anciennes des élèves, deux stratégies nous semblent ici davantage probables. Il s'agit de celle

passant par OF (EC vers OF vers OG)[270], ou de celle utilisant directement les chiffres de l'écriture chiffrée qui est lue et traduite en sa désignation parlée : c'est en effet le savoir mis en évidence à la fin de la tâche précédente. Ainsi, la réussite à cet exercice, est susceptible de ne mettre en jeu les connaissances qu'à un niveau technique, voire algorithmique, qui plus est dans un contexte précis. Ceci est aussi le cas des troisième et quatrième tâches, ce que nous avons indiqué dans l'analyse *a priori* dont elles ont fait l'objet. La situation est ici modifiée du fait des tâches précédentes qui constituent une indication d'une stratégie à utiliser sur des exemples. En particulier le traitement de « 34 » donne la même réponse pour le nombre de paquets de dix boutons que ce qui est demandé sur le fichier pour « 36 » et « 30 » dans l'exercice 2.

Les stratégies des élèves et de l'enseignante

L'enseignante écrit « 10 » au lieu de « dix », ce choix aurait pu conduire les élèves à faire des remarques sur les chiffres qui composent « 10 » mais ce n'est pas le cas.
Pour la première tâche, les élèves n'indiquent pas de stratégie mais font des remarques qui indiquent parfois les interprétations qu'ils utilisent. Nous les signalerons au moment où nous répondrons aux questions posées. Cependant, dans l'épisode 2.1, l'enseignante réagit à une intervention d'un élève, qui n'est toujours pas celle attendue, sur un lien entre les écritures chiffrées et les désignations parlées. L'enseignante récupère et enrichit puis indique tout d'abord une stratégie EC vers OF dans laquelle le début des chiffres qui permet de savoir « *dans quelle famille on est* ». Elle rappelle simultanément une stratégie de passage OF vers EC : « *Des vingt voilà, ça s'écrit avec le chiffre deux* ».
L'enseignante donne trois « explications » du lien entre les chiffres des écritures chiffrées désignant le nombre de boutons (28, 32 puis 42) avec les chiffres utilisés pour le message à destination du marchand (3ème épisode de la première tâche). La première a été évoquée et est à l'initiative des élèves : par exemple, on retrouve le « 2 » de vingt-huit (identifié à l'écriture chiffrée « 28 ») car la « *famille* » des vingt s'écrit avec le chiffre « 2 ». La deuxième est implicite et vient de la méthode employée par l'enseignante pour faire émerger la connaissance visée. La même remarque peut se faire sur les trois messages, ce qui peut constituer une preuve par induction du lien constaté. La troisième argumentation/légitimation est une initiative de l'enseignante prévue dans son projet initial (voir le 3ème épisode relatif à la première tâche). Elle utilise une stratégie OG vers EC via OF. Elle utilise pour ce faire la file numérique des écritures chiffrées affichée au dessus du tableau. Cette dernière indiquant alors la succession des désignations parlées en France à travers leur forme écrite que sont les écritures chiffrées. La démarche de l'enseignante consiste à vouloir « démontrer » que la quantité de boutons désignée par « 4 paquets de dix boutons et 2 boutons » est la même que la quantité de boutons désignée par l'écriture chiffrée « 42 ». Il est difficile de savoir ce que les élèves ont retenu de ces éléments de preuve. Cependant, en fin de séance un élève associe différemment les chiffres en jeu. Il obtient alors des nombres (désignations parlées en France) différents : juxtaposer deux « 4 » donne « quarante-quatre », et deux « 2 », vingt-deux ». Ce qui est donc retenu par cet élève c'est de pouvoir utiliser les chiffres du message pour obtenir ceux d'une écriture chiffrée (indique-t-elle le nombre de boutons manquants ?).

Dans la deuxième tâche de cette séance, surgit un problème déjà rencontré, écrire « 10 paquets » quand il est clair pour l'élève qu'il n'en veut qu'un[271], dans deux des trois productions étudiées dans la mise en commun (les bons de commande 1 et 2 des épisodes 3.1 et 3.2). Pour leur (in)validation, l'enseignante utilise comme dans les séances précédentes

[270] A noter alors la spécificité de « 16 » dont n'est pas repérable le repérant dix de sa désignation parlée « seize ».
[271] A noter que les égalités du type 10+10+ ... suivies d'une monstration de chacun des paquets « 10 » n'ont pas nécessairement aidé l'élève. L'écriture chiffrée « 10 » est une « marque » qui indique en effet <u>un</u> paquet.

une stratégie OG vers OF (dont une fois via les écritures chiffrées de la file numérique recouverts de bandes de dix comme elle l'a fait précédemment dans cette séance) et non l'inverse. Elle utilise aussi l'égalité 10+6=16 (épisode 3.2) pour traduire ce que dit un élève (« dix plus six égal seize ») qui utilise une stratégie OF vers OG avec l'appui additif « dix ». Dans l'épisode 3.3, elle indique finalement elle-même la stratégie visée : « *Quarante-deux boutons : pour quarante il faut quatre paquets de boutons et deux boutons tout seuls pour faire les quarante-deux. Ici dans ce nombre-là le premier chiffre nous dit combien il faut de paquets de dix et le deuxième chiffre combien de boutons tout seuls* ».
Les stratégies en jeu dans la phase de bouclage relative à « 34 boutons » sont proches de la précédente. Deux productions sont invalidées en utilisant une interprétation additive ou ordinale avec repérant de la numération parlée en France (l'écriture chiffrée étant à nouveau la forme écrite de cette dernière). A la fin de l'épisode consacré à « 34 », l'enseignante sollicite les élèves pour qu'ils donnent une stratégie à partir de l'écriture chiffrée qu'elle montre et qu'elle nomme « trente-quatre ». Elle indique alors le début de la stratégie que les élèves avaient donnée au moment de la justification/légitimation du lien entre les chiffres de l'écriture chiffrées et ceux de la 2ème partie du message. Ainsi, ce n'est plus l'écriture chiffrée « 34 » qui est en jeu mais la désignation parlée « trente-quatre ». Les élèves participent pour formuler cette stratégie. « Trente » de « trente-quatre » est associé à trois car « la famille des trente ça commence par trois ». Le quatre de « trente-quatre » est associé sans commentaire au « 4 » dit « quatre » de « 4 boutons ».

Nous avons indiqué dans l'analyse *a priori* que la stratégie la plus efficace consistait à associer dans un ordre précis les deux chiffres des données du message pour composer l'écriture chiffrée demandée. Elle n'est pas garante de la compréhension de l'écriture chiffrée (en particulier de par son caractère automatique). En outre dans les échanges que nous avons relevés précédemment, il ne semble pas que cela soit celle qui a été utilisée par les élèves, alors que l'enseignant l'a notifiée mais sans l'institutionnaliser.
Cependant, un élève qui a résolu publiquement le premier item pour indiquer la tâche de l'exercice 3 a prononcé la désignation parlée en France, soixante-dix-huit, d'un nombre lu à partir de son écriture chiffrée, « 78 ». La justification du lien employé précédemment par l'enseignante (lire « 78 », « soixante-dix-huit », puis comme la famille des soixante-dix commence par « sept », on peut en inférer que le message commence par « sept paquets de dix ») n'est plus opérationnelle puisque « 78 » ne peut pas être traduit par certains en sa désignation parlée en France. Après l'intervention de cet élève, l'enseignante redéfinit la tâche. Cette dernière consiste alors à utiliser une stratégie EC vers OG (traduite à l'écrit) d'association mécanique des deux chiffres du message (dans un ordre qui n'est pas spécifié mais induite du sens de lecture). La consultation des fichiers post-séance montre que les réponses des élèves aux exercices sont pour la plupart correctes (les erreurs principales portant sur l'inversion de l'ordre des chiffres), ce qui contraste beaucoup avec les difficultés rencontrées par les élèves dans les séances précédentes.

Le guidage de l'enseignante et les microcontrats

L'enseignante a le projet de formaliser la connaissance qu'elle visait dans la séance précédente (et prescrite par le manuel) c'est à dire le lien entre les chiffres de la désignation écrite du cardinal de la collection (1ère partie du bon de commande) et les écritures chiffrées des nombres en jeu dans le message. Par exemple relier « 42 » et les « 4 » et « 2 » de « 4 paquets de 10 boutons et 2 boutons ». Pour les y amener, l'enseignante installe dans la séance 4 du manuel un mésocontrat d'initiation puis de pseudodévolution. En effet, nous avons analysé la situation comme ayant de faibles potentialités adidactiques. Le lien est justifié, mais les élèves peuvent l'utiliser sans comprendre cette justification, de manière automatisée, ce qui est renforcé par le fait de rester dans le même contexte et le même champ numérique. Nous allons détailler ces contrats.

Pour la première tâche, le microcontrat que l'enseignante tente d'installer tout d'abord est celui d'adhésion, laissant la possibilité aux élèves de faire ressortir par eux-mêmes la connaissance visée. Les échanges ne menant pas à la connaissance visée, l'enseignante change de microcontrat pour utiliser un microcontrat d'ostension déguisée. En effet, le guidage qu'elle met en œuvre peut donner l'illusion que ce sont les élèves qui ont eu la responsabilité de la connaissance produite : ce peut être le cas de certains (ceux qui interviennent ?), mais vraisemblablement pas de tous. L'enseignante n'a pas uniquement mis en évidence le fait de retrouver les mêmes chiffres dans chacune des deux parties du message, elle a fourni des éléments de légitimation/argumentation de l'association. Elle vise dans ses explications à faire émerger une connaissance autre que technique, automatique et contextualisée. L'argumentation est essentiellement intellectuelle et ne fait pas intervenir de milieu matériel. Ceci nous fait dire que le mésocontrat installé est d'initiation, bien que ce ne soit pas ce que recherche l'enseignante.
Dans la deuxième tâche de cette séance, l'enseignante prend des informations sur l'opérationnalité de la connaissance qui vient d'être indiquée via les réponses des élèves sur des ardoises, ce qui permet aussi aux élèves de se rendre compte s'ils savent utiliser cette connaissance[272]. Ceci fait donc partie du processus d'institutionnalisation. Dans l'indication de la tâche pour le message concernant « 16 boutons » et « 34 boutons », l'enseignante ne fait ni intervenir les élèves, ni n'installe de milieu matériel. En outre, le contexte « Ziglotron » reste évoqué, ce qui va limiter le nombre de stratégies (voir analyse *a priori* de la séance 4). Dans le lancement, le nombre « 16 » n'est pas prononcé par l'enseignante, mais par la suite « seize » est prononcé par les élèves et l'enseignante. « 34 » l'est immédiatement par l'enseignante. La mise en commun porte essentiellement sur l'(in)validation des réponses erronées. Le bilan est initié par une diffusion des réponses des élèves l'enseignante ayant fait une sélection des différents types rencontrés : ceci permet à chacun d'avoir une information sur la validité de sa réponse. En observant l'utilisation qui est faite par l'enseignante des interventions des élèves (voir la gestion des incidents), nous en déduisons que par la suite l'enseignante, confrontée aux difficultés des élèves, utilise un microcontrat d'adhésion qui se transforme en un contrat d'ostension déguisée puis finalement assumé. Le microcontrat d'adhésion n'a en effet pas mené à la stratégie attendue par l'enseignante, celle qui a été indiquée précédemment. Nous avons indiqué cependant que pour « 16 » et « 34 », la connaissance mise en exergue à travers la stratégie indiquée n'est pas tout à fait la même. Pour « 16 », c'est celle visée, mais elle n'est pas justifiée. Pour « 34 », un élément de justification est donné dans la stratégie dans le lien entre les chiffres de l'écriture chiffrées et ceux en jeu dans la deuxième partie du message (élément de justification déjà donné par ailleurs).
Pour les deux tâches suivantes, celles du fichier, l'enseignante diffère la validation et d'une manière générale ne va pas instaurer de phase de bouclage. Elle va néanmoins interagir avec quelques élèves et prendre des informations sur leur production et difficultés dans un microcontrat de production individuelle, même pour le seul élève avec lequel elle interagit (2ème épisode de la 3ème tâche)[273] : ce dernier demande à disposer à nouveau du milieu matériel que constitue la fiche Ziglotron.

[272] Nous avons déjà indiqué en quoi cet exercice, même réussi par les élèves ne pouvait attester que d'une mise en fonctionnement au niveau technique et contextualisé de la connaissance. En particulier il n'est pas nécessaire pour réussir la tâche d'avoir compris l'argumentation précédente.
[273] Les productions que nous avons pu voir indiquent que la grande majorité des élèves ont réussi aux deux exercices. Est-ce un signe que la procédure attendue par l'enseignante a été utilisée ?

L'indication de la tâche de l'exercice 3 p.70 se fait via la résolution complète du premier item. Celle-ci consiste à associer dans un ordre précis les deux chiffres des données du message pour composer l'écriture chiffrée demandée. L'analyse *a priori* montre que cette stratégie (la plus efficace) n'est pas garante de la compréhension de l'écriture chiffrée (en particulier de par son caractère automatique). L'enseignante lui accorde cette fonction dans un échange public avec un élève, via un microcontrat d'ostension déguisée (effet Jourdain). L'enseignante redéfinit finalement la tâche, elle consiste à utiliser la stratégie « algorithmique » de l'association des chiffres dans les deux parties du message. L'enseignante indique dans un entretien post-séance être consciente que la réussite n'atteste pas nécessairement de la compréhension de l'écriture chiffrée visée. Elle a voulu cependant conclure la séance, qui lui semblait longue, par la réussite des élèves aux exercices.
Ainsi, d'après ce qui vient d'être dit pour les dernières tâches de la séance, la connaissance à utiliser vient d'être indiquée, le contexte n'a pas changé, les potentialités adidactiques sont faibles et la connaissance peut être utilisée à un niveau technique, voire de manière algorithmique, ce qui est finalement demandé par l'enseignante. En conséquence, nous analysons le mésocontrat installé comme étant celui de pseudodévolution qui suit celui de l'initiation, alors que la succession des microcontrats indique que ce n'était pas la volonté de l'enseignante.

Réponse à la première question : le jeu des interprétations (analyse descriptive)

La première tâche est une question ouverte sur les messages écrits, corrects et déjà validés dans les séances précédentes, reproduits au tableau. Les élèves font avant tout des remarques formelles et concernant leurs connaissances anciennes, ce qui ne les mène pas vers une interprétation multiplicative. Un élève fait une remarque sur le nombre de paquets en jeu (quatre, trois, deux) dans les trois messages affichés pour la première tâche (épisode 2.1). L'élève ne parle pas des désignations parlées, ce que fait l'enseignante quand elle reprend sa remarque. Elle indique ainsi aux élèves un élément du passage d'une interprétation additive de la numération parlée en France à une interprétation multiplicative, dans un contexte de problème arithmétique (désignation du cardinal d'une collection après un retrait de dix/un paquet de dix). Par la suite, l'enseignante récupère et enrichit ce que dit un autre élève sur le lien écriture chiffrée/désignation parlée. Elle indique tout d'abord une stratégie EC vers OF dans laquelle le début des chiffres permet de savoir « *dans quelle famille on est* ». Cette connaissance ancienne liée à la lecture de l'écriture chiffrée est déjà intervenue dans les séances précédentes. La stratégie indiquée montre que cette écriture chiffrée est reliée à une interprétation ordinale avec repérant des nombres, ce qui va se confirmer dans la suite. En effet, l'enseignante insiste sur les repérants quarante, trente et vingt qui sont mis en exergue, sans ici que le passage de l'un à l'autre ne soit évoqué (par exemple par l'ajout de dix). De plus, dans les précisions que l'enseignante donne à partir des remarques des élèves (stratégie de passage OF vers EC), l'écriture chiffrée est aussi associée à une interprétation ordinale avec repérant de la numération parlée (la « *famille* » des vingt s'écrit avec le chiffre « 2 »).
Les tâches que l'enseignante a introduites dans la séance 4, avant de proposer aux élèves celles prescrites par le manuel, lui ont permis de traiter du lien entre les écritures chiffrées, les désignations parlées en France et les désignations des groupements, sans qu'ils aient fait l'objet d'une institutionnalisation. Chronologiquement, deux liens sont tout d'abord apparus : un premier lien est celui que nous venons de souligner entre les écritures chiffrées et les désignations parlées. Même s'il est repris par l'enseignante, il est à l'initiative des élèves et une interprétation ordinale avec repérant est en jeu. Un deuxième est fait de manière « mécanique » entre les chiffres de la deuxième partie du message (une désignation des groupements) et ceux des écritures chiffrées. La même remarque peut se faire sur les trois messages, ce qui peut constituer une preuve par induction du lien constaté. Ici, aucune interprétation n'est cependant engagée *a priori* puisque le lien est formel, bien qu'établi dans

un contexte particulier. Ensuite, avant que les élèves ne l'utilisent dans les exercices du fichier, l'enseignante propose une justification de ce lien « mécanique » entre les chiffres des deux parties du bon de commande. Cette argumentation/légitimation est une initiative prévue dans son projet initial (voir le 3ème épisode relatif à la première tâche). Elle utilise une stratégie OG vers EC à l'aide de la file numérique affichée au dessus du tableau. La démarche de l'enseignante consiste à vouloir « démontrer » que la quantité de boutons désignée par « 4 paquets de dix boutons et 2 boutons » est la même que la quantité de boutons désignée par l'écriture chiffrée « 42 ». Les paquets de dix, matérialisés par des bandes de dix carrés, sont reportés à la suite les uns des autres sur la file numérique des écritures chiffrées, jusqu'à recouvrir l'écriture « 40 » puis deux petits carrés sont ajoutés, ce qui permet ainsi de recouvrir toutes les écritures chiffrées de 1 à « 42 ». Or la file numérique a toujours été utilisée comme la succession des désignations parlées en France à travers leur forme écrite que sont les écritures chiffrées. De plus, une écriture chiffrée comme « 42 » est le plus souvent employée comme la forme écrite de « quarante-deux ». La « preuve » fournie par l'enseignante est donc vraisemblablement perçue par les élèves comme une stratégie OG vers OF qui « prouve » que « 4 paquets de dix boutons et 2 boutons » correspondent à « quarante-deux » [274]. Ceci est pourtant une donnée d'où l'enseignante est partie et qui donc ne devrait plus être l'enjeu d'une preuve, cette association ayant été validée dans les séances antérieures. Il est ainsi possible que pour les élèves les écritures chiffrées jouent un rôle de vérification ou éventuellement de preuve de la validité des messages grâce à une stratégie OG (« 4 paquets de 10 boutons et 2 boutons seuls ») vers OF (quarante-deux), via EC (la file numérique des écritures chiffrées), ces dernières étant toujours utilisées comme la forme écrite des désignations parlées en France dans une interprétation utilisant des repérants ou des appuis additifs.

Nous avons signalé qu'il est difficile de savoir ce que les élèves ont retenu de ces éléments de preuves. Cependant, à la fin de l'épisode concernant la première tâche, un élève fait des associations formelles avec les chiffres pour obtenir des nombres (comme lorsque sont obtenus des sons ou des mots différents quand sont assemblées certaines lettres et syllabes), mettant en évidence que ni l'ordre, ni la maximalité ne sont questionnés.

Dans la deuxième tâche, l'interprétation ordinale ou additive est à nouveau uniquement en jeu. Cependant à un moment il aurait été possible de rendre explicite un passage vers une interprétation multiplicative. L'enseignante demande en effet à un élève d'expliquer la troisième réponse (exacte) qui est discutée collectivement. Celui-ci indique une procédure OF[275] (« 16 » « étant traduit seize ») vers OG qui met en jeu le passage d'une interprétation additive vers une interprétation multiplicative. L'enseignante, indique la stratégie attendue via un microcontrat d'ostension assumée et la justifie aussi à nouveau en utilisant une interprétation ordinale avec repérants.

La phase de bouclage relative à « 34 boutons » (prononcé cette fois-ci dès le lancement « trente-quatre ») est proche de la précédente. Deux productions sont invalidées en utilisant une interprétation additive ou ordinale avec repérant de la numération parlée en France (l'écriture chiffrée étant à nouveau la forme écrite de cette dernière). Via un microcontrat d'ostension plus ou moins assumé, l'enseignante donne une stratégie pour réussir la tâche à partir de l'écriture chiffrée. Elle est justifiée en revenant à la désignation parlée en France et

[274] En outre dans sa « justification », l'enseignante indique les écritures chiffrées à l'aide des désignations parlées en France. Le fait de les nommer par la désignation parlée en France renvoie probablement les élèves aux interprétations de cette dernière. En effet, les écritures chiffrées ont toujours servi à indiquer (par écrit) les désignations parlées en France et non l'inverse. Autrement dit, pour parler de « 42 », le fait de dire quarante-deux va renvoyer à quarante-deux et non aux chiffres accolés « 4 » et « 2 ».

[275] C'est la seule fois durant les quatre séances qu'un élève ira au bout de l'explication de sa procédure.

en utilisant alors les repérants (trente est associé à trois car « *la famille des trente ça commence par trois* »).

En résumé, les réponses des élèves dans la première tâche permettent de penser que certaine stratégies qu'ils ont employées leur ont permis d'utiliser la numération parlée en France dans une interprétation multiplicative, mais ne leur ont pas permis de faire de lien avec l'écriture chiffrée. Ceci renforce le constat établi à la fin de la séance 3. Avec la première tâche, l'enseignante amène finalement les élèves à constater le lien « mécanique » entre les chiffres des deux parties du bon de commande. Les justifications données à l'initiative des élèves ou de l'enseignante ou venant de la situation ne permettent pas de donner un statut clair à la place de l'écriture chiffrée. Ainsi, notamment dans les dernières tâches, sont-elles un moyen de vérifier la réponse ou de réussir la tâche ? Si elles restent un moyen de vérification tout va dépendre de la stratégie employée par les élèves. Soit elles mettent en jeu une interprétation multiplicative, soit non.

2.2 Conclusion sur la séquence de Mme B

Cette conclusion va nous permettre de répondre à la deuxième question. Quels sont les facteurs qui contribuent à la survenue des différentes interprétations ?

Ici, nous mettons surtout en relief les facteurs qui apparaissent dans notre analyse didactique. Les autres, ceux plus particulièrement liés aux composantes sociales, institutionnelles et personnelles, sont envisagés dans un deuxième temps, suivant ainsi la méthodologie que nous avons adoptée grâce à la double approche. Ils seront donc (re)considérés au moment de croiser les analyses des deux séquences filmées, dans le paragraphe 4.

Séances 1, 2 et 3 : vers l'interprétation multiplicative

Il est essentiel de considérer ici que les contrats mis en place par l'enseignante lui permettent de pouvoir prendre en compte l'influence de certains paramètres de la situation didactique et les difficultés des élèves. Elle a ainsi la possibilité d'utiliser le milieu installé pour conduire sa séance et éventuellement de le faire évoluer. Elle associe les élèves à la responsabilité de la production des connaissances en jeu, principalement en reprenant et enrichissant leurs remarques. Ainsi elle ajuste au fur et à mesure les enjeux de la séance. L'enseignante a non seulement une lecture globale de la séance « grand Ziglotron » mais reconsidère entre les séances ce qui s'est passé en classe, ce qui lui permet d'anticiper les difficultés qu'elle a constatées chez les élèves.
Dans la séance 1 cela l'amène à mettre en avant dans la mise en commun l'utilité de produire des messages avec des formulations utilisant des plaques pour réussir la tâche, bien que cela ne soit ni prescrit explicitement par le manuel ni une nécessité pour les élèves « clients ». Elle fait alors intervenir les élèves « marchands » qui eux peuvent en attester. Nous analysons ce choix comme résultant d'une anticipation de l'enseignante sur la séance suivante. Les élèves seront effectivement contraints à faire de telles commandes, mais elle peut estimer que le milieu ne sera pas suffisant. La réussite à l'élaboration de tels messages est en effet nécessaire pour que les élèves puissent ensuite faire le lien avec l'écriture chiffrée (séance 3). Or les contrats qu'elle met en place lui permettent de voir que les connaissances des élèves ne sont pas suffisantes pour envisager qu'ils commandent des plaques. Les craintes de l'enseignante sont en partie justifiées car, dans la deuxième séance, les nouvelles contraintes (matérielles) de la situation ne suffisent pas à ce qu'ils envisagent tous de commander des plaques. Plus précisément une bonne partie des élèves veut commander des plaques mais n'indique pas un nombre de plaques. Deux explications peuvent être données. Tout d'abord, l'organisation instaure des interactions avec le milieu qui restent insuffisantes. Non seulement il n'y a pas de

validation prévue, mais le problème d'interprétation des messages par le vendeur (déjà prégnant dans la première séance) ne permet pas de valider la commande qui aurait dû correspondre au message. En outre, comme il a été analysé précédemment, les élèves comprennent difficilement la distinction entre une quantité à demander « en plaques » et la même quantité désignée par un nombre de plaques. C'est cette distinction qui est en particulier nécessaire dans la séquence pour permettre de faire évoluer l'interprétation de la numération parlée en France. Ceci va avoir pour conséquence que l'enseignante tente de recréer dans les phases de conclusion un certain milieu afin que les élèves puissent invalider leur réponse. A noter que l'enseignante y distribue la parole du fait qu'elle peut choisir un panel des différents types de production rencontrés grâce aux microcontrats qu'elle a utilisés durant la phase de travail des élèves. Elle fournit ainsi des éléments de validation à tous (elle fait en sorte d'étudier un panel représentatif des cas qu'elle a remarqués). Elle a la possibilité d'installer un microcontrat d'adhésion ou de production collective (elle n'est pas contrainte par exemple à un microcontrat d'ostension déguisée) car ses aides durant les interactions avec les élèves n'ont pas dénaturé la tâche. Cependant, la part d'adidacticité de la situation étant insuffisante, les connaissances anciennes relatives aux tâches proposées étant difficilement mobilisables, dans les phases collectives l'enseignante installe le plus souvent un microcontrat d'adhésion plutôt que de production collective[276]. L'enseignante reprend et enrichit les remarques des élèves afin de leur permettre d'accéder dans la séance 2 à une (in)validation de leur production, c'est en particulier ce qui contribue à orienter les débats sur une étude des stratégies OG vers OF (et non l'inverse). Ceci ne met donc pas en jeu l'évolution de l'interprétation de la numération parlée en France, ce qu'aurait permis l'étude des stratégies OF vers OG (celles qui sont utilisées *a priori* par les élèves pour résoudre la tâche). Un autre paramètre va alors intervenir dans le traitement des stratégies OG vers OF. Dans une phase de bouclage, il s'agit d'exposer à tous les connaissances en jeu. Ceci contraint à utiliser des signifiants qui sont visibles et compréhensibles par tous (connectés avec des connaissances anciennes et le milieu matériel). C'est ce que fait l'enseignante au moment où elle reprend et enrichit les remarques des élèves[277]. Dans les deux séances, ces signifiants ne sont donc pas tous nécessairement prévus par l'enseignante du fait qu'elle n'a pas anticipé les difficultés des élèves. A noter que celles-ci ne sont pas envisagées par le manuel[278]. Ces signifiants surviennent donc comme une adaptation de l'enseignante dans l'action, au fur et à mesure que les élèves prennent la parole, afin de rendre publiques les explications des élèves. Ainsi, dans l'épisode 2.2 de la mise en commun de la séance 1, l'enseignante reproduit au tableau la collection en la figurant par des croix et rend visible une stratégie de dénombrement par dix qu'un élève indique oralement. Ici l'organisation a été obtenue au fur et à mesure du dénombrement fait par l'élève (sans qu'il l'ait d'ailleurs rendue visible en entourant des groupements de dix carrés/boutons). C'est une interprétation multiplicative qu'il semble mobiliser (« *trois dizaines ça fait trente* »). Or le fait de rendre publique la démarche de l'élève fait que cette organisation va être utilisée *a posteriori*. En outre, c'est pour expliquer aux élèves qu'effectivement « *ça fait trente* » que l'enseignante utilise une interprétation additive en s'appuyant sur l'organisation obtenue finalement. En ce qui concerne la mise en commun de la séance 2, durant l'épisode 1.2, l'enseignante traduit ce que dit un marchand sur la quantité « *J'ai donné quatre grandes barres. [...] Et j'ai donné quatre petits boutons* » en dessinant au tableau une production graphique de type 1. Durant le 2ème épisode « *vingt plus*

[276] Nous voulons souligner ici que la situation installée lui permet de « résister » au fait d'instaurer un microcontrat d'ostension assumée ou déguisée.

[277] Notons que les difficultés d'expression des élèves dues à leur âge contribuent au fait que c'est l'enseignante qui prend en charge les explications collectives.

[278] Nous verrons par la suite que certaines le seront, l'enseignante ayant pu les constater et anticiper les difficultés.

huit c'est égal à vingt-huit » est traduit par l'écriture chiffrée « 20+8=28 » et finalement, durant l'épisode 3.2 ce sont des signifiants de type OG qui sont utilisés dans un autre contexte, cette fois-ci à l'initiative de l'enseignante. En conséquence, l'utilisation de ces signifiants, disponibles *a priori* pour les élèves pour comprendre les explications qui leur sont données, convoque une interprétation additive ou ordinale avec repérant de la numération parlée en France.
Comme l'enseignante fait appel à des connaissances anciennes pour aider les élèves à comprendre le sens d'une désignation de type OG (passage OG vers OF), l'écriture chiffrée est alors sollicitée dans les différentes interactions en tant que forme écrite de la désignation parlée en France. Ceci est cependant susceptible de ne pas faciliter l'évolution de l'interprétation de l'écriture chiffrée en jeu dans la séquence.
Le contrat d'adhésion mis en place durant la phase de bouclage de la deuxième séance permet à l'enseignante de s'apercevoir des difficultés persistantes des élèves et l'oblige à se centrer sur celles-ci. De ce fait, la connaissance mise en forme par l'enseignante concerne essentiellement la nécessité d'utiliser les repérant/appuis additifs utilisés dans la désignation parlée en France du cardinal de la collection. Ceci constitue une première étape du passage à une interprétation multiplicative avec repérant qui est en jeu pour réussir à élaborer des messages corrects. Cependant cette étape à elle seule est insuffisante pour que les élèves produisent des messages corrects. Or, ceci est nécessaire pour la troisième séance, l'enjeu étant de mettre en relation ces messages (corrects) avec l'écriture chiffrée.
La difficulté « conceptuelle » n'a pu être surmontée, pour au moins une partie des élèves. Les propositions du manuel peuvent être questionnées, à la fois dans la séquence (la nature et l'enchaînement des tâches, le milieu proposé, la progressivité sur (uniquement) quelques séances qui se succèdent immédiatement), et sur l'itinéraire lui-même (les élèves n'ont pas été « préparés » à surmonter cette difficulté). La conduite par l'enseignante peut l'être aussi, par exemple le fait de ne pas traiter les stratégies OF vers OG. Cependant le fait est que cette difficulté « conceptuelle » est soulignée dans un bon nombre de recherches antérieures. C'est un problème que la situation installée a pu mettre en évidence du fait de la nature des tâches proposées et des contrats installés par l'enseignante qui ont permis de la tenir informée de ces difficultés. Ses conceptions sur son rôle d'enseignant l'amènent à tenter de faire en sorte que les élèves en difficulté puissent réintégrer la séance, c'est pourquoi, elle propose à la fois des séances intermédiaires entre les séances 2 et 3, et un dispositif différencié dans la séance 3. C'est ici aussi qu'interviennent les ressources qu'elle utilise pour proposer cette différenciation ainsi que ses conceptions sur le savoir en jeu. Elle décide en effet de ne pas rester dans le contexte Ziglotron[279], et de faire constituer aux élèves des groupements sur des collections figurées. Ces tâches sont néanmoins non problématiques et leur réussite n'est pas validée par un milieu matériel, par exemple par association terme à terme de groupements et de plaques de dix.
On retrouve ce même type d'étayage (centré sur les élèves jugés en difficulté) et de tâches dans la troisième séance. L'organisation choisie a aussi pour but de créer un milieu suffisant pour que chacun puisse être amené à produire des réponses que l'enseignante pourra alors valider en utilisant ce milieu. Dans un entretien post-séance, l'enseignante déclare d'ailleurs procéder ainsi pour favoriser la réussite des élèves quant à obtenir un message correct à partir de la désignation parlée en France ou l'écriture chiffrée, sans présence de la collection. Ainsi, ce dispositif est mis en place afin de faciliter la phase de bilan, de la rendre accessible à tous. Cependant, il transforme significativement la situation proposée par le manuel, ce qui est susceptible de contribuer à expliquer alors certaines évolutions dans la gestion. Ainsi, pendant le travail des élèves, l'enseignante continue à installer le plus souvent un microcontrat de

[279] Pour Mme B, il s'agit d'un changement de contexte, alors que pour Mme H nous verrons qu'il va s'agir de décontextualiser les connaissances, au sens d'abstraire.

production individuelle quand ils travaillent seuls, malgré leurs difficultés persistantes. Elle tente néanmoins, sans que ses tentatives soient toujours couronnées de succès, de rétablir certaines insuffisances de la situation qu'elle a créée. Les élèves les plus en difficulté ne parviennent pas en effet à relier la matérialisation des groupements sur leur feuille à la formulation de la commande utilisant des paquets de dix. De manière générale, l'enseignante résiste au fait de donner aux élèves une stratégie car elle veut qu'ils utilisent par eux-mêmes une stratégie non « automatique », c'est-à-dire un lien non mécanique entre les chiffres de l'écriture chiffrée et ceux du message. Cependant, dans la situation de communication, l'enseignante installe un microcontrat de tutorat afin de s'assurer que celle-ci va aboutir à ce qu'elle vise. Elle doute du fait que les explications d'enfants de cet âge puissent permettre à leurs camarades de comprendre. Qui plus est la teneur des échanges étant non connue *a priori* de l'enseignante, le savoir en jeu échappe à sa responsabilité. Or pour mener la phase de bouclage, l'enseignante veut savoir si les arguments développés par les élèves durant la réalisation de leur tâche ont permis de faire émerger un savoir (et quel savoir). Elle veut en outre être informée des erreurs qui peuvent persister. Ceci peut expliquer qu'elle aille voir les binômes pendant la réalisation de la deuxième tâche et non voir les élèves résolvant seuls la tâche prévue par le manuel (le troisième tiers).
Finalement, l'itinéraire cognitif proposé par le manuel va influencer le déroulement de la séance suivante. Il prévoit en effet de faire évoluer la numération parlée en France vers une interprétation multiplicative, et c'est ce qui est effectivement en jeu dans cette séance 3. Cependant, dans la phase de bouclage le passage des preuves provenant du milieu matériel aux preuves intellectuelles est minimisé voire a disparu. Ceci peut être en partie dû à une adidacticité relativement faible de la situation instaurée. Par ailleurs, l'écriture chiffrée, comme précédemment, est toujours utilisée en tant que forme écrite de la désignation parlée en France. En outre, aucune stratégie OF vers OG, susceptible de convoquer une interprétation multiplicative et mettant en jeu ou non explicitement l'écriture chiffrée, ne fait l'objet de débats dans la séance, ni d'institutionnalisation (même partielle et contextualisée). Ceci peut éclairer le fait que, bien que les écritures chiffrées soient parfois apparues dans des éléments d'une interprétation multiplicative, les élèves, pourtant sollicités dans ce sens par l'enseignante à la fin de la séance, n'ont pas établi de lien entre les chiffres de l'écriture chiffrée et les chiffres utilisés pour le message. Ce constat fait par l'enseignante va l'amener à faire un nouveau changement dans le scénario de la séance suivante.

Séance 4 : la place de l'écriture chiffrée

Le projet de l'enseignante est que les élèves relient les chiffres de l'écriture chiffrée de la première partie du bon de commande aux nombres en jeu (indiqués par des chiffres) de la deuxième partie. Mais, dans un entretien post-séance elle indique qu'elle ne vise pas une association « mécanique », elle veut que les élèves « donnent du sens ». Ceci contribue à expliquer le fait de revenir sur les bons déjà élaborés par les élèves dans les séances précédentes et le guidage de la séance. Une autre option était de proposer l'exercice 2 p.70 et ensuite de revenir sur ce lien, sachant que la stratégie qui avait été mise en avant dans la séance 3 permet de réussir cet exercice. L'enseignante a choisi l'option de garder aux exercices du manuel leur rôle de réinvestissement d'une nouvelle connaissance, c'est pourquoi elle va mettre en exergue cette connaissance auparavant.
Le fait d'écrire « 10 » au lieu de « dix » dans les bons de commande est motivé par le fait de mettre en relief cette quantité (entretien post-séance). Ce choix aurait pu conduire les élèves à faire des remarques sur les chiffres qui composent « 10 ». Mais cela n'a pas été le cas, « 10 » est vu comme une entité globale signifiant « dix » et dans laquelle les deux chiffres ne sont pas distingués. Ceci peut s'expliquer par le fait que « 10 » a été systématiquement utilisé comme une marque globale, synonyme de l'écriture littérale « dix » (voir par exemple l'égalité 10+10+10+10 = 40 de la séance précédente ou de cette séance).

Les explications visent à faire émerger une connaissance autre que technique, automatique et contextualisée. Cependant, la situation a un faible potentiel adidactique (le milieu matériel n'est qu'évoqué, la connaissance visée n'est pas solution d'un problème). Ceci peut contribuer à expliquer la nature des explications qui interviennent, en particulier un recours à des signifiants, « relais matériels », et des arguments intellectuels qui ne sont pas dans la situation mais qui sont estimés par l'enseignante comme mobilisables par les élèves. Dans l'explication que cette dernière donne, nous pouvons aussi y voir une intervention de ces conceptions (c'est elle qui propose certains signifiants). Elle tente en effet de relier l'écriture chiffrée « directement » à une désignation de type OG, mettant en exergue des éléments d'une interprétation de référence, la désignation parlée en France étant plutôt une « preuve » de cette interprétation. Ceci peut aussi être attesté par le fait que dans le lancement de la 2ème tâche, le nombre n'est pas prononcé par l'enseignante (de manière volontaire, c'est ce qu'elle indique dans un entretien post-séance), afin de favoriser la stratégie visée, utiliser les chiffres « 1 » et « 6 ». Mais par la suite « seize » est prononcé par les élèves et l'enseignante, et ce sera le cas pour tous les autres nombres en jeu. Par ailleurs, le choix de « 16 » pouvait amener les élèves à comparer deux stratégies : passer par l'appui/repérant dix ou bien utiliser les chiffres. En effet, pour « seize », l'appui/repérant n'est pas dit, et le savoir consistant à connaître la décomposition dix (plus) six est en cours d'apprentissage pour au moins une partie des élèves. La stratégie utilisant les repérants est alors plus difficile pour les élèves, celle utilisant les chiffres peut apparaître comme plus efficace. Cette possibilité n'est pas exploitée par l'enseignante. Ceci est à rapprocher du fait que beaucoup de réponses ont été erronées, et de ce fait la mise en commun a porté essentiellement sur leur (in)validation. Ainsi la tentative de l'enseignante de justifier un lien « direct » entre les écritures chiffrées et les désignations des groupements est rendue difficile, à la fois par la situation installée, les connaissances anciennes des élèves, mais aussi le fait de recourir dans les situations de communication au fait de « dire » les écritures chiffrées à l'aide des désignations parlées en France. En outre, dans l'itinéraire 1, la désignation parlée est nécessairement toujours reliée à la désignation écrite chiffrée, il semble difficile de s'abstraire de ce lien pour établir un lien « direct » entre les écritures chiffrées et les désignations des groupements.

Le problème déjà rencontré, écrire « 10 paquets » quand il est clair pour l'élève qu'il n'en veut qu'un, surgit à nouveau dans deux des trois productions étudiées dans la mise en commun de la tâche 2. C'est la nécessité de leur invalidation qui mène encore une fois l'enseignante à utiliser comme dans les séances précédentes une stratégie OG vers OF (dont une fois via les écritures chiffrées de la file numérique comme elle l'a fait précédemment dans cette séance) et non l'inverse[280]. L'interprétation ordinale ou additive est alors uniquement en jeu. Cependant à un moment il aurait été possible de rendre explicite un passage vers une interprétation multiplicative, en utilisant l'intervention d'un élève. Le fait que l'enseignante ne mette pas en évidence cette procédure peut être mis en parallèle avec le fait que ce n'est pas la stratégie visée à ce moment.

Nous avons vu que la justification du lien entre commande et écriture est remise en cause dans le cas de « 78 ». Nous pouvons inférer alors que c'est ce qui conduit l'enseignante à abandonner toutes justifications et à restreindre la stratégie à l'association mécanique des deux chiffres du message (dans un ordre qui n'est pas spécifié mais induite du sens de lecture). L'enseignante indique dans un entretien post-séance être consciente que la réussite des élèves n'atteste pas nécessairement de la compréhension de l'écriture chiffrée visée. Elle a voulu cependant conclure la séance, qui lui semblait longue, par la réussite des élèves aux

[280] Ce qui est le cas aussi à plusieurs reprises dans la séance.

exercices (voir en particulier les derniers échanges). Ainsi deux facteurs, qui sont ici liés, peuvent éclairer le déroulement final. Un facteur temps, et un autre consistant à ce que le contrat « minimal » en classe ait été installé : l'enseignant a appris à l'élève une connaissance nouvelle et l'élève la lui montre par sa réussite. Le fait qu'une stratégie « mécanique » soit efficace permet de réaliser ce contrat dans le temps de la séquence.

3. La classe de Mme H.

Mme H est une enseignante expérimentée, ayant depuis plusieurs années la responsabilité de classe de CP. Elle est habituée à utiliser Cap Maths, mais ne s'interdit pas de recourir à d'autres ressources. Ces ressources viennent en particulier de la formation qu'elle a reçue pour être maître formateur. La classe est composée de 24 élèves. Les élèves sont disposés par tables de deux à cinq. L'enseignante estime que certains d'entre eux demandent plus d'attention (au niveau de leur comportement ou/et des difficultés d'apprentissage) : ils sont réunis devant elle sur une table de six. De nombreuses affiches ornent les murs. Nous relevons en particulier un tableau 10×10 dans lequel sont rangées les écritures chiffrées (chaque dizaine occupe une ligne, elle est donc repérable par son premier chiffre ; les nombres se terminant par le même chiffre sont disposés en colonne) et une file numérique des écritures chiffrées de 1 jusqu'à 33.

Nous procédons de la même façon que pour la classe de Mme B. Une analyse séance par séance qui conduit à chaque fois à une réponse à la première question, puis une reprise de la séquence pour la deuxième question. L'analyse se réfère ici aussi de manière essentielle aux grilles données en annexe. Un certain nombre d'indicateurs relevés se ressemblent.s'y retrouvent. L'analyse se réfère ici aussi de manière essentielle aux grilles données en annexe. Nous reprenons néanmoins entièrement l'analyse, quitte à ce que certaines formulations s points soient identiques à la donnent une impression de « déjà vu »précédente. Ces ressemblances sont des résultats qui sont pris en compte dans l'analyse croisée que nous faisons dans le paragraphe 4. Nous voulons tout d'abord faire des analyses séparées que nous croiserons qu'ultérieurement.

3.1 Analyse des séances

a. Séance 1

Rappel de la tâche

Une partie des élèves doit élaborer un message oral pour commander un nombre de boutons manquants représentés sur une fiche Ziglotron qu'ils ont à leur disposition et qui ne doit pas quitter leur table. Les élèves marchands sont éloignés des clients et doivent délivrer ce qu'on leur demande. Deux conditionnements sont disponibles : plaques de dix ou boutons seuls. Les quantités en jeu ne sont pas celles indiquées par le manuels mais sont suivant les fiches 28, 30, 34, 45.

La situation (milieu)

La situation de la séance 1 est proche de celle prévue par le manuel (voir l'analyse *a priori* et le lancement). Ainsi des exemples de commandes sont donnés : « *trois boutons tout seuls* », *« quinze boutons tout seuls », « une barre »* et *« un paquet de dix avec des jetons tout seuls».* Une différence est cependant à noter, c'est l'absence de prescription de stylos ou de crayons pour les clients, ce qui ne va pas favoriser l'émergence d'une stratégie consistant à constituer des groupements sur la fiche Ziglotron. La référence à la séance « petit Ziglotron » dans le 1er épisode du lancement, est faite à l'aide d'une affiche A3 représentant une fiche Ziglotron. Elle

peut induire une stratégie identique à cette dernière, c'est-à-dire une stratégie OF consistant à obtenir la désignation parlée en France à partir de la désignation du cardinal de la collection par un comptage un à un (ce qui suppose des connaissances relatives à l'énumération). C'est effectivement ce que les élèves indiquent à travers le verbe « compter », l'enseignante ne les détrompe pas. Cette dernière insiste néanmoins sur la différence essentielle entre les deux séances : la présence de deux conditionnements, les plaques de dix et les boutons seuls. Ce matériel est affiché et agrandi au tableau[281] et reste visible de tous, en particulier pendant la réalisation la tâche des clients, ce qui change le milieu. En effet cet affichage peut faciliter certaines stratégies des « clients » mettant en jeu les plaques de dix : ils peuvent se tourner vers le tableau et compter les carreaux ou/et les bandes, la représentation mentale est facilitée. Cependant, signalons dès à présent que nous n'avons pas observé d'élèves ayant recours à cet affichage, c'est pourquoi nous n'en tenons peu compte ultérieurement.
Les élèves évoquent la validation des séances « petit Ziglotron » consistant à superposer les éléments de la collection obtenue et les boutons figurés par des carrés sur leur fiche. Ici encore la situation permet aux élèves de valider par eux-mêmes la correction de la collection obtenue par rétroaction du milieu matériel[282]. Cependant elle ne permet pas aisément d'identifier la cause des erreurs des élèves, en partie du fait que ceux qui délivrent la commande sont aussi des élèves qui sont susceptibles d'interpréter le message (voir analyse *a priori*). En outre la situation ne contraint pas les « clients » à produire un message oral comportant une demande de plaques. Elle permet par contre aux « marchands » de comparer les commandes incluant des plaques (plus simples à réaliser car comportant moins d'objets à dénombrer) à celles n'en comportant pas.

Les stratégies des élèves et de l'enseignante

Les élèves n'ont pas recours à la constitution de groupements sur leur fiche Ziglotron pour faire la commande. Nous avions indiqué dans notre analyse *a priori* que cette stratégie, pourtant la plus efficace, était peu probable en considérant les connaissances anciennes des élèves.
Dans la période de travail des élèves, les stratégies de résolution de la tâche 1 de la séance 1 débutent essentiellement par un comptage un à un menant à une désignation parlée en France[283]. Elles s'arrêtent ici pour la plupart. Un élève, celui de l'épisode 1.8, tente de passer de cette désignation à une indication de la commande avec des plaques (uniquement), mais, n'y réussissant pas, il revient à une commande en termes de boutons seuls (le repérant quarante est utilisé pour commander des plaques, mais le cinq restant n'est pas disponible en plaque). Au moment de la mise en commun deux groupes indiquent avoir commandé des plaques en comptant les « dix » à partir de la désignation parlée en France (épisodes 3.1 et 3.2). Les interactions avec l'enseignante permettent de savoir qu'un élève du premier groupe a procédé en utilisant la comptine des dizaines et qu'il en compté quatre (avec ses doigts). Cependant, il s'est d'abord arrêté là en oubliant dans quarante-cinq le cinq restant. C'est après la validation matérielle qu'il s'en est aperçu et à complété sa commande (ne respectant pas les règles du jeu). Cette stratégie OF vers OG s'est donc faite en deux temps.
L'enseignante ne détaille pas de stratégie avant la mise en commun, mais elle utilise le mot « compter » (comme les élèves). Dans cette mise en commun, elle prend en note des stratégies de comptage (sous-entendu un à un) données par les élèves, puis reprend une stratégie OF vers OG d'un groupe pour l'expliquer aux autres élèves (épisode 3.1). Elle explicite alors sur

[281] Il est possible d'y dénombrer un à un les dix boutons dans une bande/plaque.
[282] Dans la phase de bouclage de la séance, l'enseignante diffuse les informations sur la réussite ou l'échec des élèves en demandant à certains s'ils ont réussi et en passant rapidement dans les rangs. Cependant tous n'ont pas effectué la validation matérielle, notamment ceux qui ont obtenu des plaques, par manque de temps ou de matériel (ciseaux).
[283] Voir par exemple en annexe les épisodes pendant le travail des élèves.

deux exemples un passage OG (4 bandes de dix ; trois bandes de dix) vers OF (quarante ; trente), et non un passage OF vers OG, en utilisant les signifiants « relais ». Un premier consiste en des couples de mains (dix doigts) qui sont scandés en même temps que la comptine des dizaines. Dans un deuxième des doigts sont levés en même temps que sont énumérées les bandes de dix (« une bande de dix », « deux bandes de dix », etc.). La troisième stratégie de passage utilisée par l'enseignante OG vers OF consiste à compter les bandes de dix à l'aide de la comptine des dizaines. Ensuite, la désignation du nombre obtenue à l'aide des bandes de dix, par exemple quarante, est comparée à la désignation du nombre désiré, par exemple quarante-cinq. Il est mis en avant qu'une bande supplémentaire amènerait à un nombre trop élevé (cinquante dans notre exemple), en continuant la comptine de dizaines. Une fois le nombre maximum de plaques obtenu[284], aucune stratégie pour obtenir le nombre de « boutons seuls » n'est indiqué, mais la réponse exacte est donnée[285].

Le guidage de l'enseignante et les microcontrats

Dans la phase de lancement, l'enseignante présente la séance et installe un milieu proche de celui qui est prescrit dans le manuel, permettant ainsi à un mésocontrat de dévolution d'une première situation de pouvoir être installé. Elle a pris l'initiative d'un affichage des différents conditionnements au tableau (affichage prévu). Elle attend une stratégie de comptage, et plus encore une stratégie de comptage un à un (ce que l'enseignante a indiqué dans un entretien post-séance). Elle ne donne pas d'aide aux élèves quand certains lui demandent des précisions sur ce qu'il faut faire dans le cas où le marchand se trompe (épisode 1. 3 du lancement).

Durant la phase du travail des élèves, l'enseignante instaure un microcontrat de production individuelle (certaines de ses réactions peuvent être interprétées comme une évaluation négative, mais aucune aide n'est donnée) sauf pour un élève (épisode 1.8). Dans cet épisode 1.8 un microcontrat de tutorat est instauré. L'enseignante y relance l'activité en demandant des approfondissements ou/et des vérifications (avec un milieu matériel dont ne devrait pas disposer l'élève pour formuler la commande), mais sans apporter de connaissance. D'une manière générale, elle veille le plus souvent à ce que les « règles du jeu » (maintien du milieu) soient respectées en particulier auprès des marchands afin que ces derniers n'interprètent pas le message délivré (3ème épisode du lancement). C'est pourquoi elle a désigné pour cette tâche les élèves qu'elle considère les meilleurs. Elle n'incite pas les élèves qui ne l'ont pas fait à demander des plaques/bandes/bâtons.

Un certain nombre de messages oraux qu'elle a relevé (de manière exhaustive) est constitué d'une demande de bâtons/bandes (par exemple dans les épisodes 1.3 et 1.6 de la réalisation de la tâche), bien qu'ils puissent être erronés (« quarante-cinq groupe de dix » dans l'épisode 1.3). Elle a ainsi pu en déduire certaines procédures. Toutes ces informations sont utilisables par l'enseignante dans la phase de bouclage qui suit.

La « mise en commun » comporte une courte phase de bilan (épisode 1). L'enseignante s'informe de la réussite (grâce en partie au milieu matériel qui a été installé, mais tous n'ont pas fait cette validation), ce qui permet ainsi aux élèves de connaître ceux d'entre eux qui ont réussi et ceux qui ont échoué à la tâche, sans pour autant que les stratégies aient été encore diffusées. Les erreurs peuvent être de sources multiples (voir analyse *a priori*). Dans l'épisode 2 l'enseignante les relie à un oubli de la formulation de la commande au moment de l'indiquer au vendeur (sous-tâche I.2 de l'analyse *a priori*) et à un mauvais respect des règles du jeu (interprétation du vendeur).

Le projet de l'enseignante est de diffuser une stratégie qui amène à une commande en termes de paquets de dix et de boutons seuls et de la comparer ensuite aux autres. Dans l'épisode 3.1

[284] Cette maximalité est une conséquence de la stratégie indiquée, sans qu'elle soit explicite dans la séance.

[285] Dans les exemples traités dans cette séance, ce nombre s'entend : cinq dans « quarante-cinq » pour l'épisode 4.1, « quatre » dans « trente-quatre » pour l'épisode 4.2

elle va pour ce faire s'appuyer sur une réponse d'un élève. Pour certains élèves ceci installe un microcontrat d'adhésions (pour ceux qui ont employé une stratégie proche de celle exposée ou/et ceux dont les connaissances anciennes sont suffisantes), mais les interventions de certains autres, et leur gestion par l'enseignante (changement d'interlocuteur et explicitation de la « bonne réponse ») indiquent qu'il s'agit pour ces derniers plus vraisemblablement d'un microcontrat d'ostension déguisée. Ensuite la stratégie mise à jour est testée sur un autre nombre (épisode 3.2). La même disparité de microcontrat est envisageable, selon les élèves, adhésion ou ostension déguisée. Dans l'épisode 3.3, l'enseignante demande aux élèves de comparer les procédures (amenant soit à commander des plaques et des boutons soit uniquement à des boutons) selon leur rapidité. Ils répondent que le plus rapide c'est de « *compter de dix en dix, ou de vingt en vingt ou de trente en trente, ou de deux en deux* ». Ainsi la diffusion de la stratégie précédente n'a pas mené à l'argumentation attendue, mais permet à l'enseignante d'organiser une phase dans laquelle les élèves vont accéder à l'argumentation souhaitée. Cette comparaison nécessite de considérer la tâche I bis, celle du « marchand », ce que fait l'enseignante en demandant elle-même aux élèves « marchands » d'indiquer la commande qu'ils trouvent la plus simple pour réaliser leur tâche. A nouveau le microcontrat que tente d'installer l'enseignante est celui d'adhésion mais, ici, le fait que la plupart des élèves n'aient pas été confrontés à cette tâche peut installer pour eux un microcontrat d'ostension plus ou moins assumé.

Dans le denier épisode, l'enseignante met relief ce qu'il faut retenir de la séance, ce qui peut constituer un élément de mise en forme contextualisée de la connaissance en jeu. Elle insiste sur l'équivalence entre différentes formulations de la commande et met en parallèle d'un côté un comptage de dix en dix et une commande en termes de bandes et de boutons, et d'un autre la facilitation de la tâche pour le marchand lorsque des bandes lui sont demandées. Cependant aucune stratégie afférente au passage d'un comptage de dix en dix à une commande en termes de bandes de dix n'est indiquée.

Réponse à la première question : le jeu des interprétations (analyse descriptive)

Les élèves conçoivent difficilement de dire la quantité sans utiliser les désignations parlées en France : face à une collection la stratégie de dénombrement consistant à compter pour obtenir une désignation parlée en France est prégnante, quel que soit le milieu instauré. L'enseignante semble aller aussi dans ce sens. Les élèves attribuent principalement leurs échecs à des erreurs de mémorisation, en référence à la séance « petit Ziglotron » vécue auparavant. Ainsi la majorité des élèves utilisent une interprétation ordinale (avec repérants ou non) de la numération parlée en France pour résoudre leur tâche. Cependant, (au moins) deux élèves se sont distingués. Un premier a utilisé la comptine des dizaines et le repérant de la désignation parlée du nombre sans qu'il soit facile de savoir exactement comment. Mais il échoue, parce qu'il n'arrive pas à ne commander que des plaques/bandes de dix. Le deuxième utilise le repérant quarante aussi pour obtenir quatre bandes. Il compte les mots dans la comptine des dizaines dix, vingt, trente, quarante. Il utilise une stratégie OF vers OG qui met en jeu une interprétation multiplicative. A noter cependant que si le repérant est utilisé, dans un premier temps, le nombre restant (cinq) n'est pas considéré, comme si cet élève voulait, lui aussi, faire une commande n'utilisant qu'un seul conditionnement. La validation permet de le détromper et il arrive alors à une commande correcte. Ceci nous semble mettre en relief la difficulté pour les élèves de concevoir qu'une désignation de type OG comportant deux désignations parlées en France puisse indiquer un (seul) nombre. Ceci est un obstacle pour passer à une interprétation multiplicative dans ce contexte de matérialisation des dizaines par des objets (ici des bandes/plaques).

Les signifiants « relais » qui sont utilisés par l'enseignante le sont essentiellement dans la mise en commun pour expliciter <u>devant les élèves</u> une stratégie OG vers OF et non l'inverse. Ni les commandes obtenues ni la collection de départ ne sont représentées au tableau. Il s'agit de compter de dix en dix pour retrouver le nombre de boutons contenus dans un certain nombre de bandes. Non seulement les élèves n'y réussissent pas tous, mais le fait d'étudier le sens OG vers OF et non l'inverse, nous permet d'inférer que le passage d'une interprétation additive ou/et ordinale avec repérant à une interprétation multiplicative est abordé *a minima*. Les élèves n'ont pas à retrouver par exemple quatre bandes dans quarante, mais à passer de quatre bandes à quarante. En outre, la prise en compte de l'appuyant/comptant pour résoudre la tâche est difficile pour les élèves. L'écriture chiffrée n'intervient pas dans cette séance.

b. Séance 2

<u>Rappel de la tâche</u>

La tâche proposée dans la séance 2 n'est pas celle du manuel. Les élèves « clients » disposent des fiches Ziglotron (28, 34 ou 45 boutons manquants). La tâche demandée aux élèves « clients » est d'obtenir une désignation du cardinal de la collection par une stratégie OF, notée par une écriture chiffrée, puis d'obtenir à partir de la désignation parlée en France[286] une formulation de type OG, pour finalement passer à une formulation écrite de type GraC. Cette production graphique constitue une nouvelle forme du bon de commande destiné au « marchand », à partir de laquelle ces derniers doivent délivrer la collection demandée en respectant les conditionnements indiqués. Les élèves « clients » reçoivent cette commande mais la validation ne se fait pas avant la mise en commun, comme le prescrit le manuel.

<u>La situation (milieu)</u>

La situation installée dans la séance 2 n'est pas celle proposée par le manuel (voir analyse *a priori*). Les conditions matérielles sont les mêmes, mis à part la forme du message à adresser au « marchand ». Ce n'est plus un bon de commande à compléter mais une désignation de type GraC accompagnée d'une écriture chiffrée en haut de la feuille. Cette désignation chiffrée du cardinal de la collection ne lui est pas destinée.
Comme dans la séance 1, la situation installée ne permet pas aisément d'identifier la cause des erreurs des élèves, en partie du fait que ceux qui délivrent la commande sont aussi des élèves et sont donc susceptibles d'interpréter le message. Cependant, ici, en outre, l'enseignante indique dès le départ que la commande doit être faite en termes de plaques et de boutons, ce qui apparaît comme une règle du jeu. Pourtant les contraintes matérielles supplémentaires devraient y amener les élèves sans que cela soit indiquer (il ne peut être délivré plus de neuf boutons seuls). En outre, il est possible que des élèves se souviennent qu'une commande comportant des plaques de dix facilite la tâche des marchands (c'est ce qui a été établi à la fin de la séance précédente). Cet argument n'est cependant pas rappelé dans cette 2ème séance.
Des exemples sont donnés par l'enseignante dans le début du deuxième épisode du lancement (en termes de bandes et de jetons), et la consigne est rappelée au moment de la réalisation de la tâche par les élèves, comme par exemple dans l'épisode 1. Ceci permet ainsi de signifier la tâche à faire.
Un comptage de un en un est sous-entendu pour une stratégie OF alors qu'aucune stratégie OF vers OG n'est indiquée (mais le lien entre les deux à été l'enjeu de la séance 1, notamment à l'aide de la suite des dizaines, dix, vingt, trente, etc.). Les stratégies OG vers GraC ne sont pas non plus évoquées.
La tâche complète est donc découpée en sous-tâches et son but final n'est pas toujours perçu par les élèves (voir par exemple l'épisode 1 de la réalisation de la tâche des élèves). En effet, il est demandé expressément de passer par une désignation parlée en France indiquée par une

[286] Il est demandé effectivement d'utiliser la désignation parlée en France, et non l'écriture chiffrée, qui elle, en tant que traduction écrite de cette dernière est indiquée tout d'abord comme utile pour se souvenir de la quantité (2ème épisode du lancement), puis ensuite pour que l'enseignante soit renseignée sur le nombre de boutons dénombrés.

écriture chiffrée, puis de traduire cette désignation orale en une désignation orale des groupements, avant de passer à une traduction par un dessin. Or cette stratégie, en particulier la stratégie de comptage (de un en un), n'est pas la plus efficace[287] pour obtenir un message écrit. En outre l'écriture chiffrée est susceptible de convenir pour faire un message écrit (cette fonction de l'écrit est ce sur quoi insiste l'enseignante).
La validation matérielle est différée après une mise en commun, comme il est proposé par le manuel.

Les stratégies des élèves et de l'enseignante

Ici encore, les élèves n'ont pas recouru à la constitution de groupements sur leur fiche Ziglotron pour faire la commande, mais ils ont pu le faire pour réaliser leur message dessiné, c'est ce que nous allons voir.
Comme dans la séance 1, les stratégies les plus employées par les élèves « clients » pour obtenir une désignation orale du cardinal de leur collection semblent être de type OF avec comptage un à un. Ceci se voit dans différents épisodes de la mise en commun, comme le 3.3, mais surtout dans les deux premiers épisodes du travail des élèves, dans lesquelles de surcroît des stratégies d'énumération sont diffusées par l'enseignante à partir de ce qu'ont fait spontanément certains. La stratégie de passage OF vers EC n'est jamais questionnée, elle semble être automatisée. Par la suite, il est difficile de savoir comment les élèves ont obtenu leur production graphique, qui sont en majeure partie de type 1, deux seulement étant de type 2 (voir les messages étudiés dans la phase de bouclage, épisode 3.4 pour le premier message de type 2). Cependant plusieurs incidents permettent d'inférer que la plupart ne sont vraisemblablement pas passé par une désignation de l'organisation, comme il a été indiqué dans la tâche prescrite (OF vers GraC via OG). En effet, il existe une possibilité théorique qui consiste à utiliser les dessins des bandes pour compter au fur et à mesure les carrés dessinés (soit de un en en, soit de dix en dix) pour obtenir finalement la quantité désirée : c'est une stratégie de type OF° (réalisation d'une collection à partir de la désignation parlée en France de son cardinal)[288]. Or tous les élèves ont bien représenté des carrés sur leurs bandes, ce qui rend cette stratégie possible, certains ont même indiqué qu'ils les ont comptés un à un (message 6 de l'épisode 3.3) alors que d'autres les comptent un à un au tableau. En outre l'épisode final 4.2 montre clairement leur difficulté à utiliser une stratégie OF vers GraC via OG. Finalement, l'épisode 3.7 (trois bandes sont dessinées qui ne sont pas composées de dix carrés mais un élève dit trente) et les différents moments où ils utilisent la comptine des dizaines sans se soucier des objets (ils comptent dix indifféremment pour une bande ou un carré, dans l'épisode 1.2 par exemple) montrent qu'ils ont du mal à relier cette comptine avec un comptage du nombre de bandes de dix. Or cette comptine est un des moyens (indiqué dans la séance 1) pour passer d'un repérant/appui comme quarante au nombre de dizaines, une dizaine étant à associer à une bande. D'ailleurs des élèves semblent avoir aussi des difficultés à indiquer que trente et quatre (boutons) forment une collection de trente-quatre boutons (épisode 2.2 et 2.3). A noter qu'ils passent facilement d'une production graphique de type 1 à une désignation des groupements (ils décrivent ce qu'ils voient), alors que la lecture que demande un message de type 2 pour obtenir une désignation des groupements est moins facile (épisode 3.4).
En ce qui concerne l'enseignante, elle a indiqué que la tâche constituait à employer une stratégie OF vers GraC via OG. C'est uniquement dans la mise en commun qu'elle va

[287] La stratégie de groupement est non seulement plus efficace dans la séance, mais en plus elle peut faciliter la mise en œuvre du passage vers une interprétation multiplicative.
[288] Ils résolvent ainsi le « problème graphique » qui dans ce contexte (nombres inférieurs à cent et groupements de dix) consiste à donner graphiquement trois informations différentes : le type de conditionnement (bande ou bouton isolé), la quantité dans une bande, le nombre de bandes et de boutons isolés.

expliciter certaines stratégies. Elles vont constituer à valider les productions graphiques de type 1 et 2. Les productions graphiques de type 2 sont simplement lues pour obtenir une désignation de l'organisation puis sont évaluées positivement (et même valorisées) sans argumentation (par exemple par un passage à une désignation parlée en France). En ce qui concerne les productions graphiques de type 1, c'est une stratégie GraC vers OF via OG qui est utilisée par l'enseignante. La principale consiste, comme dans la séance 1, à énumérer les bandes de dix au tableau en même temps qu'est prononcée la comptine des dizaines. Des autres signifiants sont utilisés parfois, de manière simultanée ou non aux gestes de monstration des bandes de dix. Il s'agit de montrer les dix doigts des deux mains de manière répétée, ou bien de lever un à un les doigts d'une main à chaque dizaine/repérant/bande. Le plus souvent est énoncé « une bande de dix, deux bandes de dix, etc. » (voir par exemple l'épisodes1.2).

Les écritures chiffrées sont utilisées pour traduire ce qui est dit à l'oral. Par exemple le fait d'avoir dénombré vingt dans deux bandes de dix est traduit par l'écriture « 20 » sous les deux bandes dessinées au tableau (épisode 1.2 et 1.4, mais aussi 1.3 et 2.2 pour trente). Il en est de même pour le nombre de boutons restants. Ce qui donne finalement des productions graphiques de type 1 : les écritures 20/8, 30/4 et 10/1 correspondant aux mots prononcés vingt/huit, trente/quatre et dix/un, ainsi qu'à vingt-huit, trente-quatre et onze. Dans l'épisode 1.4 l'enseignante écrit « $20+8=28$ »[289] en même temps qu'elle dit « *vingt plus huit est égal à vingt-huit* ».

Le guidage de l'enseignante et les microcontrats

L'enseignante tente de ne pas donner d'aide aux élèves, bien qu'une stratégie de comptage pour obtenir une désignation parlée en France du cardinal de la collection soit implicite. En outre, elle prescrit dès le début une sous-tâche (élaborer un message en termes de plaques et boutons), alors que le milieu était susceptible de contraindre les élèves à utiliser une telle formulation, le problème se posant alors au moment de la livraison de la commande. Il est possible que cette prescription fasse référence à la séance passée (il a été conclu qu'une telle forme de message était plus rapide à traiter pour le marchand), mais ce n'est pas explicite. De même la stratégie OG vers OF qui a été mise alors en évidence n'est pas rappelée. Par ailleurs, dès ce lancement (2ème épisode), un élève demande comment écrire le message. Or l'enseignante n'a pas photocopié les bons de commandes. Il en résulte une modification de la tâche « dans l'action », le bon de commande consiste alors en une écriture chiffrée et un « dessin » de la collection désirée. Ainsi, du fait que la stratégie est indiquée dans la tâche à réaliser (OF vers GraC via OG), le mésocontrat que semble vouloir instaurer l'enseignante semble celui de rappel ou de pseudo-dévolution. Mais le fait d'utiliser des productions graphiques (ce qui est provoqué par une remarque des élèves), engendre la possibilité de ne pas recourir à une telle stratégie pour résoudre le problème. Ainsi, la stratégie que l'enseignante suppose en jeu (ce qui peut se voir à la fois dans la séance 1, mais aussi dans le dernier épisode de celle-ci), le passage de OF vers OG, ne l'est pas nécessairement (cf. l'analyse *a priori*).

Durant le travail des élèves, l'enseignante veille toujours à ce que les « règles du jeu » (maintien du milieu) soient respectées et particulièrement auprès des marchands pour qu'ils n'interprètent pas le message délivré. L'enseignante garde le plus souvent un microcontrat de production individuelle, n'interférant que pour une minorité dans leur travail et par des relances.

Dans la mise en commun, elle fait un bilan des réponses quant au nombre de boutons dénombrés, et ce avant le traitement de chaque fiche. Cependant, contrairement à la première séance elle ne peut pas utiliser de validation faite par les élèves durant leur travail. Ainsi, les

[289] Dans la séance 3, l'utilisation d'un tel type d'égalité est prescrite par le manuel.

élèves accèdent à une évaluation de l'exactitude de leur dénombrement : cette évaluation de l'enseignante s'appuie sur les réponses majoritaires des élèves (qui sont effectivement exactes).
L'enseignante tente d'utiliser un microcontrat d'adhésion en s'appuyant sur certains élèves, influencée par la situation elle-même, les possibilités de rétroaction du milieu étant moindre..
Le traitement des productions des élèves constitue alors systématiquement en une vérification mettant en jeu une stratégie GraC vers OG vers OF, à l'aide des signifiants relais que nous avons indiqués auparavant. Ainsi, la stratégie OG vers OF qu'elle vise (voir la fin de la séance) n'est pas en jeu. Cependant ici, des éléments de cette stratégie sont sans doute utilisés par les élèves dans une stratégie OF° (que nous analysons comme étant à leur portée). Ainsi, il nous semble que le microcontrat ne devienne pas de l'ordre d'une ostension déguisée. Cependant certains points de l'argumentation révèlent des difficultés des élèves à utiliser la comptine des dizaines comme comptine pour dénombrer les collections dessinées (voir les épisodes 1.2 et 3.7), difficultés que l'enseignante traite en donnant la réponse exacte (elle-même ou en changeant d'intervenant).
La fin de la séance constitue une série d'exercices décontextualisés sur le passage OF vers OG. Il semble que c'est donc la connaissance que vise l'enseignante, et qui permet en effet de réussir une stratégie de type OF vers OG vers GraC (autrement dit une stratégie OF vers GraC via OG). Les réponses des élèves montrent qu'une fraction importante d'entre eux échoue. La séance étant finie (c'est l'heure de la cantine), l'enseignante n'a pas le temps matériel de traiter ces erreurs.
A noter que l'enseignante de part sa gestion n'a pas été amenée à voir apparaître chez les élèves des erreurs d'équivalence entre une désignation parlée en France et son correspondant écrit chiffré.

Réponse à la première question : le jeu des interprétations (analyse descriptive)

Dans le lancement, la stratégie OF vers OG indiquée par l'enseignante incite initialement la numération parlée en France à être utilisée dans une interprétation ordinale (non nécessairement avec repérant). Ensuite c'est la stratégie OF vers GraC via OG qui est spécifiée. Elle engage à réaliser la tâche de formulation du message tout d'abord par une stratégie OF vers OG que cette interprétation ordinale rend plus difficile, d'autant plus qu'elle ne met pas en exergue les repérants (pour les nombres de onze à seize par exemple). Ensuite, le passage OG vers GraC consiste soit en une transcription « signe à signe » de OG (pour mener à une production graphique de type 2) soit en un dessin de la collection qui est décrit (pour mener à production graphique de type 1). Ceci fait intervenir une interprétation de la numération parlée pour des nombres inférieurs à dix. Cependant, les élèves n'ont vraisemblablement pas procédé ainsi. Ils ont utilisé une stratégie OF°, consistant à dessiner le nombre de carrés qu'il faut en les regroupant par dix pour constituer une bande. En effet, ils ont retenu qu'il fallait commander des bandes, ce qui était prescrit, la maximalité ne l'étant pas, mais imposée par les conditions matérielles. Si les repérants sont alors éventuellement utilisés (ce n'est pas obligatoire et certains ne le font visiblement pas puisqu'ils comptent les carrés un par un), l'interprétation multiplicative n'est pas en jeu. Cependant, l'enseignante peut en avoir l'impression. A la fois de par sa prescription initiale, mais aussi car le comptage de dix en dix est « associé » à un nombre de bandes, ce qui est ostensible dans la mise en commun. Mais comme dans la séance 1, il s'est agi de valider les réponses des élèves, et la stratégie étudiée est de type GraC vers OF via OG. Or celle-ci ne met pas nécessairement en jeu une interprétation multiplicative (il aurait fallu étudier la stratégie inverse). En outre les signifiants relais utilisés, qui sont en lien avec les productions graphiques, font apparaître le nom des repérants (écrits ou dits), ce qui atteste l'utilisation par l'enseignante d'une interprétation

ordinale avec repérant ou additive[290]. En effet le repérant/appui est accolé à un certain nombre de bandes (de dix) dessiné, <u>après</u> avoir effectué un comptage (en général de dix en dix avec la comptine des dizaines, ou bien par indication d'un ajout de dix, le repérant/appui étant toujours prononcé. Ainsi, ce sont des décompositions additives ou en termes de repérants/comptants qui sont utilisées ostensiblement. A noter que ce comptage de dix en dix n'est cependant pas compris de tous, certains continuant à ânonner la suite des dizaines pas nécessairement à bon escient. Ceci rappelle les difficultés notées dans les recherches antérieures sur l'utilisation de la comptine numérique : le dernier nombre énoncé doit indiquer le cardinal. Certains élèves ont encore besoin de vérifier par la comptine numérique que la désignation obtenue par la comptine des dizaines est le « bon » nombre. Ce qui atteste que le compteur avec les repérants n'est pas un outil de comptage encore sûr et efficace, et donc que l'interprétation avec repérants n'est pas nécessairement disponible chez tous les élèves.
Dans un dernier épisode, l'enseignante donne une nouvelle tâche, pensant ainsi faire travailler les élèves de manière plus décontextualisée sur la connaissance qui a été en jeu. C'est bien une stratégie OF vers OG qui est sollicitée, et donc le passage d'une interprétation avec appui/repérant à une interprétation multiplicative (du repérant au nombre de dix/bandes puis du comptant au nombre d'unités/boutons seuls). La plupart des élèves échouent ce qui atteste que l'interprétation multiplicative n'a pas été réellement en jeu dans la séance et que pour la majorité des élèves ce n'est pas une connaissance mobilisable (ce que nous avions indiqué dans l'analyse de l'itinéraire cognitif proposé par le manuel).

En ce qui concerne l'écriture chiffrée, du fait des connaissances anciennes des élèves mobilisables pour résoudre les tâches, la situation engage à la considérer comme la forme écrite de la désignation parlée en France. Distinguer et donner du sens à chaque chiffre n'est en jeu que dans la séance suivante. Les discours et les actions que nous avons relevés, que ce soit de l'enseignante ou des élèves, ne font que renforcer cette position de l'écriture chiffrée par rapport aux désignations parlées en France. En particulier, à aucun moment la stratégie pour traduire la désignation parlée en France en la désignation écrite chiffrée, OF vers EC, n'est abordée, sous-entendant que la désignation écrite chiffrée est la forme écrite de la désignation parlée en France. A chaque fois que l'enseignante utilise des écritures chiffrées dans ses explications, comme quand elle emploie « *20+8=28* », c'est pour traduire au tableau ce qui est dit oralement. Du côté des élèves, on relève deux productions graphiques de type 2 (les autres étant presque exclusivement de type 1). L'écriture chiffrée y est utilisée aussi comme traduction de l'oral. C'est l'enseignante qui demande de lire ces productions (et non pas de les décrire). Grâce à cette lecture les élèves sont susceptibles de comprendre le code (oralement cela correspond à la description d'une production graphique de type 1).

c. Séance 3

<u>Rappel des tâches</u>

Les deux premières tâches sont conformes en partie aux prescriptions du manuel, puisqu'il s'agit d'élaborer un message en direction d'un marchand hypothétique. Le message n'est pas réellement donné au marchand, la collection n'est pas délivrée, et donc il n'y a pas de validation matérielle. Tous les élèves ont à élaborer un message à partir d'un Ziglotron commun, affiché au tableau, dont le nombre de boutons manquant est indiqué à tous oralement et par une écriture chiffrée. Cependant la résolution se fait par binôme (et non individuellement suivie d'un échange à deux), les nombres en jeux (dans les deux premières tâches) sont 28 puis 45 (au lieu de 42, suivie d'une mise en commun, puis d'un entraînement

[290] Ce qui reste toujours hypothétique chez les élèves. Rappelons que les élèves n'ont été confrontés que depuis peu de temps à des problèmes de la structure additive.

sur des exemples comme 16, 50, 83, 38) et les messages sont des dessins au lieu de bons de commande à compléter.
Les trois tâches suivantes consistent à indiquer une commande orale (en termes de bandes et de boutons isolés) à partir d'une désignation parlée en France traduite par écrit au tableau : 33 (3ème tâche), puis 21 (4ème tâche), puis 43 (5ème tâche).

La situation (milieu)

Dans les deux premières tâches, les élèves disposent de la désignation écrite chiffrée au tableau, traduction de la désignation parlée qui a été prononcée. La tâche est proposée à des couples d'élèves qui peuvent communiquer pour donner une réponse commune. Chaque binôme a à sa disposition une feuille blanche sur laquelle il peut réaliser sa production graphique à l'aide d'un crayon ou d'un stylo. Les élèves peuvent *a priori* faire plusieurs tentatives en rayant ou gommant. Le message est adressé à un hypothétique marchand, faisant référence ainsi à la première partie de la tâche de la séance précédente. Les élèves ne savent pas que leur production va être affichée ultérieurement et donc s'adresser à toute la classe. Le premier nombre en jeu, 28, et le temps alloué à la tâche (5'33) permettent aux élèves d'entreprendre une stratégie OF° en comptant les carrés qu'ils dessinent sur leur feuille au fur et à mesure (et en les agglomérant par bandes de dix). Il est possible d'utiliser directement l'écriture chiffrée (c'est ce qui est visé par le manuel dans la séance 4, et qui doit être mis en évidence dans cette séance). Il est aussi envisageable d'utiliser une stratégie passant par une désignation orale des groupements (OF vers GraC via OG). Pour le deuxième nombre en jeu (45), le temps alloué et sa grandeur rend moins performante une stratégie OF° avec un comptage des carrés. Cependant, ce nombre a déjà traité dans la séance 2, avec une tâche similaire.
Dans les trois dernières tâches, une stratégie OF vers OG est demandée aux élèves. Ils ne disposent d'aucun matériel et la validation se fait de manière non matérielle. Le contexte Ziglotron est évoqué en particulier par le type de formulation des messages (... bandes et ... boutons/jetons). Dans les trois nombres, trente-trois, vingt et un, quarante-trois, on entend le repérant/appui additif et le comptant/appuyant, favorisant ainsi une stratégie s'appuyant sur ceux-ci. Le premier nombre, trente-trois, ne permet pas de distinguer une éventuelle confusion entre le nombre de plaques et le nombre de boutons seuls. Le deuxième nombre, vingt et un, est dans un champ numérique que les élèves fréquentent dès la maternelle. Il peut permettre de faire référence à une connaissance automatisée (dix plus/et dix égal vingt, ou encore la comptine dix, vingt) qui permet de retrouver les deux dizaines dans vingt (il n'y a que deux mots à compter, ce qui peut se faire sans les doigts). Ce n'est pas le cas du troisième nombre proposé, quarante-trois. Les deux derniers, vingt et un et quarante-trois, sont cependant dans les mêmes dizaines que les nombres des deux premières tâches, ce qui peut favoriser des stratégies consistant à se souvenir des correspondances quarante/quatre bandes et vingt/deux bandes.

Les stratégies des élèves et de l'enseignante

En ce qui concerne la première tâche, les productions des élèves relevées semblent indiquer qu'ils ont utilisé une stratégie OF° en comptant les carrés qu'ils dessinent sur leur feuille au fur et à mesure (et en les agglomérant par bande de dix). En effet, certains ont dessiné des carrés/boutons non en bandes de dix mais en bandes comportant plus ou moins de carrés/boutons (épisodes 2.1, 2.2 voire 2.5). Dans le message de l'épisode 2.5 constitué de trois bandes de neuf, il est possible d'y voir la volonté de ne commander que des bandes, le nombre de neuf carrés par bande permettant en effet de se rapprocher au plus près de vingt-huit. Ceci peut être aussi le cas des messages des épisodes 2.3 (une bande de dix avec « 2 » accolé, et une bande de dix avec « 8 » accolé) et 2.9 (une bande de dix avec « 10 » accolé, et une bande de huit). La plupart des élèves ont utilisé avec succès des productions graphiques

de type 1 avec des bandes comportant effectivement dix carrés/boutons. Cependant la seule production graphiques de type 2 (épisode 2.6 de la mise en commun de la première tâche) ne comportent pas dix boutons (mais neuf). Ceci indique que le dix dans les bandes y est sous-entendu, et que les élèves ont voulu indiquer le conditionnement (bande) et le nombre de bandes. C'est en effet dans la situation Ziglotron une façon de résoudre un problème spécifique de mise en signes « production graphique »[291]. Ce problème n'a pas toujours été résolu, ce qui peut se voir dans les messages des épisodes 2.3 et 2.9. Il est aussi possible que le message de l'épisode 2.3 ait été obtenu via une stratégie utilisant les chiffres de l'écriture chiffrée.
Dans la 2ème tâche, identique à la première, il s'agit du nombre quarante-cinq. Cette fois-ci, les stratégies OF° que l'on peut inférer dans les trois premiers messages A, B, C échouent (épisodes 1.1, 1.2, 1.3 de la mise en commun pour la 2ème tâche). Les autres stratégies résolvent le problème de mise en signes « production graphique » par des productions graphiques de type 1 (message F, épisode 1.6) ou 2 (messages I, J, K) ou hybrides (G et H). Pour les trois productions graphiques de type 2, nous pouvons inférer que les élèves ont utilisé le fait que « dans quarante, il y a quatre bandes ». La stratégie employée peut être OF vers GraC via OG, donc l'utilisation d'une désignation orale des groupements, mais ceci reste hypothétique car ils peuvent aussi se souvenir de la séance précédente (ils ont eu à faire des messages pour ce même nombre). Dans ces trois messages, il est à remarquer que l'information concernant la quantité à délivrer sous forme de bandes est soit indiquée par la matérialisation des dix carrés (message I), soit non indiquée (il n'y a que le conditionnement, la bande est vide de carrés, message K), soit indiquée par quelques carrés (message J)[292]. Les mêmes questions se posent quant aux stratégies menant aux productions hybrides. Cependant le problème « production graphique » a été résolu différemment. Le message G est de type 1, mais nous l'avons classé dans les messages hybrides dans la mesure où il utilise des écritures chiffrées (traduction écrite de la désignation parlée) pour indiquer le nombre de carrés dans une bande (« 10 » à chaque fois). En particulier cela permet de réaliser la tâche par une production graphique de type 1 plus rapidement qu'en dessinant tous les carrés. Cependant, ce message entretient une certaine ambiguïté avec le formalisme des productions graphiques de type 2. Le message G, quant à lui, est bien hybride dans la mesure où le nombre de bande est indiqué par une écriture chiffrée (la bande comporte bien dix carrés), alors que le nombre de boutons seuls est indiqué par le dessin de cinq carrés (type 1). A noter finalement que les élèves arrivent difficilement à indiquer la différence (au sens mathématique d'écart) entre deux nombres indiqués par leur désignation parlée en France (vingt-huit et trente dans l'épisode 2.5 de la mise en commun concernant la première tâche). Ceci suggère que les problèmes décontextualisés de la structure additive ne sont pas facilement résolus par les élèves.
Il est difficile de savoir qu'elles sont les stratégies des élèves pour les 3ème, 4ème et 5ème tâches, puisque que nous n'avons les réponses que de quelques élèves. Ils semblent utiliser les repérants/appuis additifs, mais il est difficile de savoir comment le passage au nombre de bandes (dizaines) a été fait (est-ce une mémorisation par rapport aux exercices précédents ?). Quand il s'agit de vérifier les réponses, un certain nombre d'élève n'utilise cependant pas à bon escient la comptine des dizaines, ils la poursuivent pour des objets qui ne sont pas des bandes.

---

[291] Dans ce contexte (nombres inférieurs à cent et groupements de dix), une production graphique doit donner trois informations différentes : le type de conditionnement (bande ou bouton isolé), la quantité dans une bande, le nombre de bandes et de boutons isolés.

[292] Dans ce dernier cas, la bande comporte quatre carrés. Ce nombre quatre est-il à rapprocher du nombre de bandes, qui est de quatre aussi ? Il nous manque des informations pour conclure.

L'enseignante n'indique de stratégie ni dans les lancements ni pendant la phase de travail des élèves. Elle utilise systématiquement un passage de GraC vers OF ou bien OG vers OF et non l'inverse, à la fois dans son unique intervention dans une phase de travail des élèves pour valider la proposition d'un élève et dans les mises en commun de toutes les tâches. En ce qui concerne les deux premières tâches, comme dans la séance précédente, le traitement des productions des élèves constitue alors systématiquement en une vérification mettant en jeu une stratégie GraC vers OF via OG. Un signifiants relais « production graphique de type 1 » de format A3 est utilisé. En tant que réplique des messages des élèves, celui-ci va alors être un signifiant « production graphique de type 1 ». Il est employé conjointement avec la comptine des dizaines[293] et le plus souvent pour la validation des productions graphiques de type 1 (deux premières tâches) et les désignations orale des groupements (trois dernières tâches). Le passage d'une production graphique des élèves au matériel du tableau se fait à l'aide d'une désignation des groupements consistant à la décrire : GraC (production initiale élève) vers OG (description ou lecture « signe à signe » par un élève ou/et l'enseignante) vers GraC (utilisation du matériel élaboré par l'enseignante pour transcrire la désignation orale des groupements). Les dessins de bandes qui ont été faits par les élèves vont systématiquement être interprétés comme des bandes de dix par l'enseignante et les élèves. Dans la majorité des cas il n'y a cependant pas dix carrés de dessinés (voir le paragraphe ci-avant sur la stratégie des élèves). Il ressort que la production avec laquelle va se faire la validation n'est pas toujours fidèle à la production des élèves. En résumé, de part sa gestion de la mise en commun, la stratégie OG vers OF que l'enseignante vise (voir les trois tâches de la fin de la séance) n'est pas en jeu.
A noter en outre deux passages qui mettent en jeu des stratégies de comparaison de signifiants (OF/OF). Pour la différence entre vingt-huit et trente, elle utilise la suite orale numérique pour surcompter de vingt-huit à trente en levant un à un deux doigts (épisode 2.5 de la première mise en commun). Dans l'épisode 1.1 de la mise en commun concernant la 2ème tâche, l'enseignante veut montrer que trente (obtenu par l'élève) est inférieur à quarante-cinq. Elle utilise alors la file numérique des écritures chiffrées, en faisant constater que trente c'est après quarante-cinq. Ensuite, elle « réalise » une collection de trente doigts (avec trois élèves montrant tous leurs doigts) et de quarante-cinq doigts (avec cinq élèves, quatre montrant dix doigts, un cinquième cinq doigts (une main)). Elle demande alors de constater de manière perceptive la différence[294].
Dans les deux dernières tâches l'enseignante utilise deux autres signifiants relais. Il s'agit d'une part des égalités 10+10+10+1=21 (l'erreur n'a pas été relevée) et 10+10+10+10+3=43 (épisode 3.2 de la 4ème tâche et 3.2 de la 5ème) et d'autre part du mot dizaine. Les deux vont servir à valider les désignations orales des élèves (OG). En particulier, les égalités telles que 10+10+10+10+3=43 sont utilisées pour traduire la désignation orale, mettant en œuvre un lien entre une désignation des groupements et un autre signifiant, l'autre signifiant étant ici ce type d'égalité[295]. Cependant la stratégie n'est pas explicitée pour 10+10+10=21 (l'égalité obtenue est fausse, elle a été obtenue après une invalidation de 10+1=11), tandis que pour 10+10+10+10+3=43, l'écriture est indiquée par un élève puis validée par un comptage des dizaines (stratégie « somme 10+10+10+10+3 » vers OG, l'égalité complète attestant de l'exactitude du lien via la correspondance entre OG et OF faite auparavant).

[293] Les difficultés sur l'utilisation de la comptine des dizaines n'apparaissent pas dans les mises en commun des deux premières tâches car l'enseignante l'utilise principalement uniquement avec les bandes de dix. Ces difficultés resurgiront dans la 3ème tâche.
[294] A noter, qu'il suffit de considérer le nombre d'élèves ici et non pas nécessairement le nombre de doigts.
[295] A noter qu'ici les égalités produites sont moins des signifiants du nombre qu'une traduction d'un calcul ou encore une forme d'écriture hybride de type 1 (en référence à Ifrah). Cette dernière fait écho aux productions hybrides déjà rencontrées dans la séance (chaque groupement étant symbolisé par « 10 » et le symbole est répété autant de fois qu'il le faut, la quantité restante étant indiquée directement).

Le guidage de l'enseignante et les microcontrats

Nous allons tout d'abord traiter les deux premières tâches qui sont identiques, et dont la gestion l'est aussi.

Dans les lancements, l'enseignante semble installer un mésocontrat de pseudodévolution ou de réinvestissement de connaissances car le savoir en jeu a déjà été abordé la séance précédente. Cependant le milieu installé possède des rétroactions du milieu relativement faibles. En outre les phases de conclusion sont menées par l'enseignante de telle sorte que ce ne sont pas les stratégies majoritaires utilisées par les élèves qui vont y être en jeu. Ainsi les connaissances utilisées et celles enjeu de débats ne sont pas les mêmes.

Pendant le travail des élèves, l'enseignante instaure pourtant un microcontrat de production individuelle, ce qui permet de rendre possible l'installation d'un des mésocontrats que nous avons signalé. Une seule intervention se distingue, ($2^{ème}$ épisode de la réalisation de la $2^{ème}$ tâche, mettant en jeu 45). Elle y reprend la réponse correcte qu'un élève a indiquée à son binôme (connaissant les élèves, elle se doute que le deuxième n'a pas compris). Dans les mises en commun, nous retrouvons des phénomènes analogues à ceux de la séance précédente dans les passages de GraC vers OF (via OG), et non l'inverse, qu'elle utilise pour valider toutes les productions des élèves. Elle a toujours le projet de faire intervenir le lien entre un nombre de bandes et le repérant/appui additif. L'enseignante tente d'installer un microcontrat d'adhésion en s'appuyant sur certains élèves, influencée par la situation elle-même, les potentialités adidactiques étant moindre. L'enseignante affiche en outre au tableau les productions des élèves. Comme toutes les productions sont passées en revues et de surcroît classées selon qu'elles sont validées (à gauche du tableau) ou invalidées (à droite), tous les élèves ont accès à une validation (ou *a minima* une évaluation) de leur réponse. C'est aussi ainsi que sont diffusées les différentes productions graphiques (les stratégies ne le sont pas). Pour les productions graphiques de type 1 des élèves (le plus souvent erronées), l'enseignante y adjoint au tableau des bandes de dix carrés et de carrés isolés (format A3). Ce matériel est utilisé pour invalider des productions graphiques de type 1, qui sont celles qui sont en général erronées et par lesquelles la mise en commun commence. Des éléments de la stratégie GraC vers OF via OG sont sans doute utilisés par les élèves dans une stratégie OF° (analysable comme étant à leur portée), mais nous avons indiqué que cette stratégie OF° était moins utilisée par les élèves que dans la séance précédente, surtout en ce qui concerne la $2^{ème}$ tâche. Ainsi, le microcontrat ne reste pas un microcontrat d'adhésion.

Dans deux passages l'enseignante ne se contente pas d'invalider la production des élèves par le fait que la désignation parlée en France associée à la production graphique est différente de celle à obtenir. Ces épisodes surviennent à chaque fois pour invalider la réponse d'un élève. Ils mettent enjeu les deux signifiants que nous avons indiqués auparavant, la suite orale numérique pour surcompter de vingt-huit à trente en levant un à un deux doigts, la file numérique des écritures chiffrées, en lui faisant constater que « trente c'est après quarante-cinq », la « réalisation » de deux collections doigts (avec des élèves) et la constatation de manière perceptive de la différence. Le microcontrat installé est de l'ordre de l'ostension assumée. Ces signifiants (connaissances anciennes) sont alors susceptibles d'être mobilisés par les élèves.

Dans les deux dernières tâches l'enseignante utilise deux autres signifiants relais. Ils vont servir à valider les désignations orales des élèves (OG). Cependant un premier, une égalité de type 10+10+10+10+3=43 ou 10+10+10+1=21 est à l'initiative de l'enseignante et n'est pas nécessaire dans la séance, puisque les réponses sont validées par ailleurs. Cependant nous notons qu'il est prescrit par le manuel, et que l'enseignante l'utilise pour visualiser le nombre de dizaines dans le nombre. Elle compte en effet les dizaines à partir de cette écriture. Ceci va dans le sens de son projet. Néanmoins, elle ne le fait pas apparaître comme une stratégie pour résoudre une tâche. Le microcontrat installé est donc de l'ordre de l'ostension assumée, mais

il nous semble plus encore de l'ordre de l'information car la connaissance indiquée n'apparaît pas comme utile dans la séance. En ce qui concerne le deuxième signifiant, le mot dizaine, il survient au moment où un élève a des difficultés à concevoir que l'écriture « 10 » puisse indiquer le conditionnement en bande[296] (épisode 3.2 de la 4ème tâche). C'est la réponse que donne alors l'enseignante pour aider l'élève, « 10 » sera alors nommé une dizaine pour indiquer que les boutons/carrés sont groupés (ce qui n'est pas formulé de manière ostensible dans la séance). Le microcontrat est alors d'ostension assumé.
Ces signifiants, en particulier l'égalité qui, elle, est prescrite par le manuel, sont susceptibles d'être utilisés ultérieurement. Mais la séance ne comporte pas de phase où le savoir à retenir est mis en relief ou mis en forme. Tout se passe comme si les « entraînements » que pourraient constituer les trois dernières tâches[297] constituaient une forme d'institutionnalisation. Ils sont en effet à l'initiative de l'enseignante (non prescrits par le manuel), elle prend majoritairement à son compte la responsabilité du savoir en jeu (en particulier elle apporte des éléments qui n'ont pas nécessairement de lien direct avec la réalisation des tâches précédentes), ils sont effectués de manière collective (dépersonnalisation) et ils comportent un certain degré de décontextualisation.
A noter que comme dans la séance 2, l'enseignante, de part sa gestion, n'a pas été amenée à voir apparaître chez les élèves des erreurs d'équivalence entre une désignation parlée en France et son correspondant écrit chiffré. Le lien entre les chiffres de l'écriture chiffrée et les productions des élèves n'est pas fait.

Réponse à la première question : le jeu des interprétations (analyse descriptive)

Nous traitons tout d'abord des deux premières tâches.
L'enseignante n'indique pas de stratégie dans leur lancement (contrairement à la séance précédente). Les élèves peuvent être influencés par cette dernière séance, mais nous avons analysé aussi en quoi le milieu installé a pu jouer ici (nombres déjà rencontrés, temps, réalisation par binôme). Ainsi un certain nombre d'élèves (environ la moitié de la classe) n'utilisent pas nécessairement dans leur production le fait que vingt boutons peuvent se constituer en deux bandes ou quarante en quatre. Pour certains, il se peut qu'ils le sachent, tout en décidant d'utiliser une production graphique de type 1 qui ne nécessite pas *a priori* de mobiliser une telle connaissance. Pour d'autres, la production produite indique clairement qu'ils n'ont pas utilisé une telle information, qui simplifie pourtant la tâche (en particulier dans la tâche 2 du fait que le nombre en jeu soit plus grand et le temps pour dessiner relativement court, l'enseignante les presse de finir). En outre le travail étant à faire en binôme, il est possible que les productions graphiques de type 2, qui peuvent attester de l'utilisation de la correspondance entre le repérant et le nombre de dizaines, n'émanent que d'un des deux élèves (ce qui est relevé par l'enseignante dans des interactions avec les élèves). Par ailleurs, rien ne nous renseigne sur la stratégie utilisée pour faire cette correspondance. Est-ce un souvenir de la séance précédente ? Ainsi, est-il difficile de savoir comment les élèves procèdent et donc quels sont ceux qui sont susceptibles d'utiliser une interprétation multiplicative. Nous constatons néanmoins qu'un certain nombre d'entre eux dessine une bande à laquelle est accolée l'écriture chiffrée du nombre de bandes voulus. A noter que ce nombre est toujours maximal, ce qui fait penser qu'ils utilisent effectivement le repérant de la désignation parlée en France[298].
Dans la mise en commun relative à ces deux premières tâches, il s'est agi de valider les réponses des élèves. L'enseignante utilise comme dans la séance 2 une stratégie de type GraC vers OF via OG. Or celle-ci ne met pas nécessairement en jeu une interprétation

[296] Ce qui fait écho au problème « production graphique ».
[297] Ils ne le sont pas car le savoir en jeu n'est pas le même que dans le début de la séance.
[298] En conséquence la maximalité n'est pas questionnée.

multiplicative (il aurait fallu étudier la stratégie inverse). En outre, comme précédemment, certains signifiants relais utilisés, qui sont en lien avec les productions graphiques, font apparaître le nom des repérants (écrits ou dits), ce qui atteste l'utilisation par l'enseignante d'une interprétation ordinale avec repérant ou additive. En effet, ici aussi le repérant/appui est accolé à un certain nombre de bandes dessinées, après avoir effectué un comptage. Ce comptage de dix en dix n'est en outre pas compris de tous les élèves. Ce phénomène est accentué par l'intervention du matériel utilisé pour reproduire les messages des élèves, un relais « production graphique de type 1 » standardisé émanant de l'enseignante. En outre le passage des productions des élèves à ce dernier se fait grâce à une désignation des groupements, utilisée comme la version orale des productions graphiques. Le lien est cependant plus complexe. En effet, tout d'abord les élèves ont pu réaliser leur message sans utiliser cette désignation (par exemple à l'aide d'une stratégie OF°). De ce fait, entre autres, la formulation orale utilisée ne traduit pas forcément ce qui est dessiné : les bandes ne sont pas forcément toutes de dix (que ce soit volontairement ou involontairement). Par ailleurs, nous avons indiqué en quoi une désignation orale des groupements entretenait un rapport différent selon le type de production graphique. Il s'agit d'une description orale des productions graphiques de type 1, et d'une lecture « signe à signe » des productions graphiques de type 2. La production graphique de type 2 utilise des chiffres pour indiquer les coefficients d'une décomposition selon une échelle de numération[299].
Ainsi, l'enseignante ne distingue pas les différentes mises en signes. En outre, un élément de l'interprétation multiplicative de la numération parlée en France, le passage des appuis/repérants au nombre de bandes n'est pas indiqué de manière ostensible dans la séance. En effet, cette relation intervient de manière sous-jacente, principalement dans la validation. Or celle-ci consiste à indiquer par une désignation parlée en France la quantité de boutons/carrés spécifiée par le signifiant relais « production graphique de type 1 ». Nous avons déjà signalé que c'est alors l'interprétation ordinale avec repérant qui est utilisée pour le comptage de dix en dix. Il n'est donc pas mis en évidence un lien direct entre le repérant et le nombre de bandes, utilisable pour résoudre le problème posé aux élèves.
En ce qui concerne les trois dernières tâches, comme pour la fin de la séance 2, le passage à une interprétation multiplicative est *a priori* en jeu pour les résoudre. Les réponses données par les élèves montrent à nouveau qu'une partie d'entre eux échouent. La validation se fait comme précédemment à partir des mêmes signifiant relais, ce qui n'engage toujours pas une telle interprétation. Cependant, le mot dizaine est introduit, ce qui permet une certaine décontextualisation et est susceptible de faire concevoir aux élèves les groupements comme des objets comptables. L'enseignante introduit en outre des égalités de type 10+10+... = ... ce qui permet de poursuivre sa décontextualisation. « 10 » remplace la bande de dix dans les productions graphiques de type 1, et le mot dizaine prononcé indique qu'il s'agit de considérer le groupement, c'est-à-dire le conditionnement. Cependant, cette écriture n'est pas utilisée pour résoudre le problème mais pour vérifier la réponse. Ainsi par exemple « quatre bandes de dix et trois (boutons) » s'écrit 10+10+10+10+3 (d'où le décompte des dizaines1^{ère} dizaine, 2ème dizaine, etc.), ensuite intervient un « calcul » (dix, vingt, etc.), qui mène à quarante-trois, ce qui valide la réponse. Ainsi, ici aussi, les signifiants relais utilisés font travailler *a minima* une interprétation multiplicative, la stratégie OF vers OG à partir des repérants et des comptants n'étant pas étudiée. Cependant ce qui est dit et fait peut donner l'illusion que cette interprétation est bien en jeu.

[299] Les chiffres sont susceptibles d'être utilisés pour une écriture chiffrée de position, la position étant un moyen d'indiquer les ordres (unités, dizaines, centaines, etc. pour la décomposition dite polynomiale décimale) qui sont figurés par les élèves par des bandes.

d. Séance 4

Rappel de la tâche

Les élèves résolvent les tâches proposés dans les exercices 2 et 3 p. 70 de leur fichier.

La situation (milieu)

La situation est proche de celle prescrite dans le manuel. La tâche est indiquée en donnant la solution au premier item pour chaque exercice, sans aide. Cependant les écritures chiffrées sont lues, ce qui peut inciter à une stratégie OF vers OG, plutôt que EC vers OG[300].

Les stratégies des élèves et de l'enseignante

Pour l'exercice 3 (2ème épisode du lancement), un élève donne la réponse « en tout, un sept et un huit ». Il est possible qu'il ne sache pas désigner ce nombre avec sa désignation parlée en France, il l'a donc énoncé ainsi. Nous ne pouvons pas connaître sa procédure exacte. Le seul moment dans lequel nous avons accès à une stratégie d'élève se situe dans le 2ème épisode de la réalisation de la tâche, au moment de l'interaction entre un élève et l'enseignante. L'élève a recopié la solution donnée au premier item en inversant les chiffres dans les deux lignes du message. Le traitement du second item (« 30 ») est guidé par l'enseignante. Celle-ci indique une stratégie OF vers OG[301] qui consiste à énumérer les dizaines, dix, vingt, etc., en levant les doigts (un doigt levé en plus par chaque dizaine prononcée). L'élève ne réussit pas à indiquer le nombre de « paquets de dix », puisqu'il indique la quantité globale (trente), montrant ainsi que la stratégie initiée par l'enseignante n'est pas mobilisable pour lui. L'enseignante donne la bonne réponse, trois, et la justifie en revenant à une stratégie inverse OG (trois bandes de dix) vers OF (trente), via GraC (les trois bandes de dix sont accrochées au tableau). La question à nouveau posée à l'élève qui voit les bandes de dix. Il répond correctement « trois ». La réponse a été donnée auparavant par l'enseignante et la stratégie a été découpée en plusieurs étapes (simplification de la tâche). Ainsi, rien n'assure que celle-ci ait été comprise par l'élève. En outre, ce dernier n'arrive pas à donner la réponse « zéro » attendue dans la deuxième ligne.
Dans le dernier épisode de la séance, un élève répond « *trois* » à la question de l'enseignante « *ici j'ai besoin de quarante boutons, je vais prendre combien de bandes, euh combien de paquets de dix ? Quarante j'en veux ?* ». L'enseignante incite l'élève à utiliser une stratégie OF vers OG, sans précision, ce que l'élève ne parvient pas à faire. L'enseignante incite ensuite à une stratégie EC vers OG via EC, « quarante c'est un quatre et un zéro », et l'élève répond correctement « *quatre* ».
A noter que la rapidité avec laquelle les élèves ont réussi la tâche peut indiquer qu'ils ont fait l'exercice d'une manière mécanique, au mois pour le deuxième. En outre, les erreurs que les élèves ont fait sont essentiellement sont des inversions de chiffre dans l'exercice 3.

Le guidage de l'enseignante et les microcontrats

Le lien entre les chiffres de l'écriture chiffrée et les nombres en jeu dans la deuxième partie du message n'a pas fait l'objet d'une institutionnalisation ni même été évoqué comme connaissance en jeu dans les séances précédentes. La stratégie qui a été le plus évoquée étant GraC vers OF via OG, et c'est vraisemblablement OF vers GraC (via OG ou non) qui a été à l'œuvre chez les élèves pour résoudre les problèmes posés. Ainsi le mésocontrat que tente d'installé initialement l'enseignante nous semble être celui d'un réinvestissement de connaissances dans le contexte évoqué « Ziglotron ». Les stratégies ne sont pas en jeu dans

[300] Le message à compléter est ici la transcription écrite « signe à signe » de OG (on écrit ce qu'on entend). Cependant ici elle n'est que partielle, puisqu'il faut compléter des phrases, uniquement avec des chiffres.
[301] C'est une des rare fois dans les quatre séances que cette stratégie est indiquée dans ce sens, en général c'est OG vers OF pour vérifier les réponses des élèves.

les échanges, bien que la lecture des écritures chiffrées puisse engager les élèves vers des stratégies OF vers OG. Le microcontrat pourrait être de l'ordre d'une production individuelle, mais les élèves n'ont pas de rétroaction du milieu et c'est l'enseignante qui va évaluer leurs réponses. Leur part de responsabilité dans la validation est ainsi *a priori* faible, mais ils assument entièrement la production des réponses. Pour évaluer les connaissances produites et les microcontrats réellement installés, tout dépend alors des stratégies utilisées par les élèves et de leur compréhension de celles-ci. Ainsi, certains élèves peuvent utiliser avec une certaine assurance une stratégie OF vers OG, le microcontrat peut alors être de production individuelle, les élèves n'ayant pas réellement besoin de rétroactions du milieu pour valider eux-mêmes leur réponse (utilisation de connaissances intellectuelles). Mais rien n'assure que cette stratégie ait été utilisée par tous les élèves, et s'il s'agit d'une stratégie automatique. Pour les élèves qui n'ont pas compris, l'enseignante instaure un microcontrat de tutorat qui se change au fur et à mesure des échanges (et du temps qui passe) en un microcontrat d'ostension déguisée.

Réponse à la première question : le jeu des interprétations (analyse descriptive)

L'enseignante n'indique pas de stratégie. Elle écrit avec des chiffres le nom des nombres prononcés à haute voix, l'écriture chiffrée étant ainsi la traduction de la désignation parlée en France. L'inverse, c'est-à-dire la lecture de l'écriture chiffrée, se produit dans les échanges verbaux concernant le lancement de l'exercice 3 p. 70. Il est difficile d'indiquer les interprétations en jeu du côté des élèves, car celles-ci sont inférées des stratégies qu'ils utilisent et elles ne sont pas clairement identifiables. La stratégie la plus efficace dans le premier exercice, une utilisation « directe » des chiffres de l'écriture chiffrée, n'est pas nécessairement utilisée par les élèves. Ce n'est pas celle qui a été relevée dans les séances précédentes. Dans le deuxième exercice, elle est cependant susceptible d'intervenir, ce qui permet de ne pas passer par une désignation parlée en France (les élèves ne savent pas tous lire toutes les écritures chiffrées de l'exercice 3 p. 70). De ce fait l'interprétation multiplicative de la numération parlée est éventuellement en jeu dans le premier exercice, mais moins sûrement dans le deuxième. En outre, ceci n'assure pas que celle-ci soit reliée à l'écriture chiffrée. En effet, dans le premier exercice, l'écriture chiffrée est vraisemblablement perçue comme la version écrite de la désignation parlée en France, mais la stratégie OF (=EC) vers OG n'assure pas que les écritures chiffrées soient utilisées dans cette interprétation. Autrement dit, certains élèves ainsi que l'enseignante traduisent « 36 » par « trente-six », puis ils y associent « trois paquets de dix et six », qui s'écrivent « 3 paquets de dix et 6 boutons », mais les chiffres « 3 » et « 6 » ne sont pas nécessairement liés à l'écriture chiffrée « 36 ». Dans le second exercice la stratégie « algorithmique », consistant à reporter les deux chiffres dans la première ligne pour former une écriture chiffrée, est efficace. Une justification de la raison de son efficacité favorise la possible interprétation de la numération écrite chiffrée en tant que numération multiplicative. Ce n'est pas le choix de l'enseignante. Cependant il est possible que sa pertinence soit inférée de l'exercice précédent, en tant que processus « réciproque » des stratégies qui ont été utilisées. Rien n'est cependant moins sûr, car nous constatons que les principales erreurs faites par les élèves résultent d'une inversion des chiffres. La rapidité avec laquelle la tâche est faite va dans le même sens.

3.2 Conclusion sur la séquence de Mme H.

Question 2 : quels sont les facteurs qui contribuent à la survenue des différentes interprétations ?

Séances 1, 2 et 3 : vers l'interprétation multiplicative ?

En utilisant les résultats des analyses précédentes, nous allons dégager des éléments pour répondre à la deuxième question.

Il est essentiel de considérer ici que les contrats mis en place par l'enseignante lui permettent de pouvoir prendre en compte l'influence des paramètres de la situation et les difficultés des élèves. Cela lui donne la possibilité d'utiliser le milieu installé pour conduire sa séance et éventuellement de le faire évoluer. Cela lui permet d'associer les élèves à la responsabilité de la production des connaissances en jeu, elle le fait principalement en reprenant et enrichissant leurs remarques. Cependant, dès le départ elle a l'intention de travailler le passage entre le repérant/appui qui est entendu dans une désignation de la numération parlée en France et le nombre de dizaines, en s'appuyant sur le contexte Ziglotron. Ceci se voit particulièrement dans les mises en commun et dans le changement de tâche qui va intervenir dans la séance 2. Ainsi, l'écrit n'est pas questionné, il est la forme écrite des désignations parlées en France. Plus précisément, il a les particularités de l'écrit (outil pour se souvenir, pour communiquer), comme tout écrit (dans un rapport identique entre l'oral et l'écrit de la langue française, que les élèves apprennent au CP). Ce sont ces conceptions, qui ont été par ailleurs confirmées dans les entretiens informels après les séances qui vont expliquer la conduite de séance de cette enseignante. Ainsi elle a une lecture personnelle de la séquence Ziglotron qui lui permet de prendre quelques libertés : dans les termes de notre recherche, nous pourrions dire que son but est de faire évoluer tout d'abord l'interprétation de la numération parlée en France vers une interprétation multiplicative, la signification des chiffres des écritures chiffrées s'en suivra alors. Elle a pour projet un itinéraire précis d'enseignement de type 1, et en particulier cela va jouer sur la tâche demandée (qui est modifiée mais jugée comme équivalente) et sur la façon de mener les mises en commun. Elle va en particulier gérer le temps en ne s'attardant pas sur certaines remarques des élèves (elle gère les incidents qui ne servent pas son projet en les ignorant ou en donnant la bonne réponse, le plus souvent en changeant d'interlocuteur). Ainsi, l'enseignante laisse une grande part de responsabilité aux élèves dans la connaissance produite surtout dans les phases de réalisation de la tâche.

Dans la séance 1, la situation est suffisante pour que certains élèves produisent des messages oraux comportant des bandes et des boutons seuls. Elle peut donc s'appuyer sur ceux-ci (essentiellement un) pour diffuser une stratégie qui, a priori, lui permet de poursuivre son but. Le fait de partir des productions des élèves amène cependant la mise en commun essentiellement sur une validation de celles-ci. La question à laquelle il faut répondre est : est-ce juste ? Or ceci conduit non pas à étudier un passage OF vers OG, qui permet un apprentissage de l'interprétation multiplicative, mais un passage OG vers OF qui ne met en jeu que très faiblement cette interprétation. En effet, dans cette validation des productions, les interprétations anciennes disponibles sont suffisantes pour qu'ils comprennent *a priori* : ce sont les interprétations ordinales (avec repérant) et additives. Cependant, l'enseignante peut avoir l'impression que l'interprétation multiplicative est en jeu. A noter néanmoins que certains ont essayé d'obtenir un message en termes de plaques/bande (de dix), mais ils n'y étaient pas contraints par la situation, et en fait peu s'y sont frottés.

Le même phénomène intervient dans la séance 2. En effet, malgré le changement de tâche, la séance permet dans l'esprit de l'enseignante d'atteindre son objectif, puisqu'elle demande explicitement une stratégie OF vers GraC via OG : pour elle le passage OF vers OG est donc en jeu. En outre le changement de variable (livraison comportant au maximum neuf boutons) peut renforcer cette opinion. Qui plus est, les conceptions de l'enseignante sur la différence écrit/oral ne lui permettent pas d'être alertée sur les modifications que peut engendrer le changement de type d'écrit demandé dans la tâche. Or, nous avons indiqué que la situation installée va permettre aux élèves de résoudre la tâche par une stratégie OF°, consistant à dessiner le nombre de carrés (accolés par dix) pour obtenir le nombre adéquat grâce à un

comptage de type OF. La plupart des élèves ne vont donc pas mettre en jeu d'interprétation multiplicative. En outre cette stratégie est plus accessible aux élèves, et donc donner l'illusion à l'enseignante qu'ils n'ont pas eu de difficultés sur le passage OG vers OF. C'est pourquoi, quand elle propose en fin de séance ce qui pour elle est un réinvestissement des connaissances en jeu, et une forme d'institutionnalisation (décontextualisation), elle est surprise par la faible réussite des élèves. Ceci pourrait l'alerter par la suite, mais dans la séance 3, à nouveau des productions graphiques sont demandées, et il se reproduit des phénomènes identiques.
En ce qui concerne cette séance 3, pour les deux premières tâches, le milieu a changé, et cette fois-ci, en particulier parce que les élèves n'ont plus vraiment le temps de faire une production graphique de type 1. Il est alors possible que l'interprétation multiplicative ait été cette fois-ci en jeu dans la réalisation des deux premières tâches. La stratégie employée par les élèves n'est cependant pas nécessairement une stratégie OF vers OG consistant à dénombrer les dizaines à partir des repérants, car ils ont pu se souvenir de la correspondance quatre bandes/quarante des séances précédentes. Les différentes productions ne peuvent renseigner sur la stratégie. En outre, l'enseignante demande que le travail se fasse à deux. Ceci peut s'expliquer en partie du fait que cela lui permet de diviser par deux le nombre de productions à passer en revue (gestion du temps). Le biais étant qu'il est possible qu'un des deux élèves n'ait pas réalisé réellement la tâche, surtout qu'à cet âge les élèves ont des difficultés à travailler de manière coopérative. Ce changement de milieu est cependant difficilement repérable car il est dû à des « micro » changements. L'enseignante a l'impression, comme dans la séance précédente que l'interprétation multiplicative est en jeu, et c'est ici plus vraisemblablement le cas alors que de son point de vue rien n'a changé. Ce qui peut expliquer que presque rien ne change dans les mises en commun, qui consistent encore à valider les productions des élèves, c'est donc toujours une stratégie GraC vers OF qui est en jeu et non l'inverse. Ceci ne met pas l'interprétation multiplicative réellement en jeu et ce n'est toujours pas la stratégie employée par les élèves. Il faut tout de même indiquer qu'un nouveau signifiant fait son apparition, le matériel « production graphique de type 1 » standardisé. Il est utilisé afin de rendre visible à tous les productions des élèves, et il permet ainsi de faciliter la tâche de validation collective de l'enseignante, du fait en particulier que des connaissances anciennes peuvent être utilisées. En effet, la production graphique de type 1 est plus proche de la commande à délivrer (c'est d'ailleurs elle qui a été le plus employée par les élèves dans la séance précédente), donc susceptible d'être la plus compréhensible des élèves. Ici sont prégnantes ces commodités pratiques (présenter à tous, utiliser un matériel facilement identifiable qui permet de réinvestir des connaissances anciennes) qui permettent d'arriver au but de l'enseignante dans la mise en commun : valider les réponses des élèves. Cependant il entraîne les glissements que nous avons indiqués par ailleurs, glissements qui nous semblent encore ici difficilement perceptibles par l'enseignant. Ce signifiant peut donner l'illusion d'un travail mettant en jeu l'interprétation multiplicative, via une désignation orale des groupements que l'enseignante est amenée à utiliser du fait de pouvoir parler des productions des élèves. Ceci peut expliquer la survenue de la désignation orale des groupements qui mène presque nécessairement à la confusion entre les différentes productions graphiques, toutes assimilées à une désignation orale des groupements.
L'irruption de certains signifiants (les dessins de bandes vont systématiquement être interprétés comme des bandes de dix par l'enseignante à cause de leur traduction orale par OG), et le changement de consigne (GraC au lieu de OG) ne va pas lui permettre de se rendre compte des stratégies et difficultés des élèves (en particulier la stratégies OF° et le problème «production graphique »).
En ce qui concerne les trois dernières tâches, des phénomènes analogues se répètent par rapport à la fin de la séance 2 et au début de la séance : utilisation de signifiants pour valider des réponses, qui ne mènent pas nécessairement à étudier les stratégies utilisées par les élèves

ni à mettre réellement en jeu l'interprétation multiplicative. Les raisons de ce déroulement nous semblent les mêmes. Cependant, le mot dizaine est introduit, et ce en réponse à une question posée par un élève sur le fait que dans l'écriture « 10 », le fait de demander des bande n'est plus visible. Ainsi, l'enseignante est sollicitée par un élève sur un problème qui n'était pas apparu du fait de la gestion précédente (validation avant tout des réponses, utilisation des désignations orales des groupements qui ne permettent pas de voir le problème de mise en signes « production graphiques »). Notons alors que les contrats qu'elle met en place permettent aux élèves de poser des questions, certaines sont cependant ignorées ou la réponse est donnée sans explications[302] . Sa réponse ici est « dizaine ». Quels sont les facteurs qui l'ont amenée ? L'utilisation de l'écriture « 10 » est produite à l'initiative de l'enseignante. Elle est prescrite dans cette séance par le manuel dans des égalités de type 10+10+10+10+2=42. Nous pouvons alors supposer que l'enseignante suit ici les prescriptions car cela va servir son projet consistant à relier le nombre de dizaines (maximum) dans un nombre et le nombre de bandes de dix dans les tâches demandées aux élèves. En effet, cela va lui permettre de considérer les « 10 » comme des objets unitaires. Cependant, nous avons signalé que cela amène toujours à utiliser l'interprétation multiplicative *a minima*, dans le sens où, là encore, l'égalité est utilisée après que la désignation orale des groupements a été donnée. Ceci est à rapprocher du fait qu'il s'agit encore dans la mise en commun de valider les réponses, l'égalité vient donc comme un moyen de vérifier la réponse et non comme une stratégie pour réussir la tâche. Cependant ce qui est dit et fait peut donner l'illusion que cette interprétation est bien en jeu. Pour l'enseignante, comme l'écriture chiffrée est la traduction écrite de la désignation parlée en France, ce qui est cohérent avec un itinéraire d'enseignant de type 1, il est inutile de questionner en elle-même l'écriture chiffrée. C'est ainsi que nous expliquons que l'enseignante a, selon elle, fait le lien prescrit par le manuel, le lien entre les chiffres et les productions des élèves pouvant être de son point de vue abordé dans la séance suivante.

Séance 4 : la place de l'écriture chiffrée

D'après notre analyse *a priori* de la situation, rien n'assure que les élèves utilisent l'écriture chiffrée dans une interprétation multiplicative. Mais ceci est renforcé par le projet de l'enseignante et sa conception de l'écriture chiffrée. En effet, si nous utilisons les termes de la thèse, son projet consiste en ce que les élèves utilisent la numération parlée en France dans une interprétation multiplicative, c'est-à-dire qu'ils soient capables d'utiliser les repérants/appuis pour en inférer un nombre de paquets de dix. En outre l'écriture chiffrée est la traduction écrite des désignations parlées en France des nombres. Ainsi, la stratégie d'association mécanique des chiffres en jeu dans les deux parties du bon de commande est donnée finalement à la fin de la séance. Elle permet de réussir l'exercice et peut apparaître à l'enseignante comme si elle était une preuve de l'emploi de l'interprétation multiplicative et donc que son projet a été réalisé. Non seulement la stratégie « mécanique » ne peut la détromper, mais rien n'assure dans la séance telle qu'elle a été proposée par le manuel que les élèves aient utilisé des éléments de l'interprétation de référence de l'écriture chiffrée[303].

4. Conclusion du chapitre

Nous avons choisi d'analyser l'activité de l'enseignant comme celle de la gestion d'un environnement dynamique et ouvert, (Rogalski, 2003). L'analyse tente de rendre compte de la

[302] Souvent en changeant d'intervenant, voir la gestion des incidents dans le découpage des déroulements donnés en annexe.
[303] Nous utilisons interprétation de référence, plutôt qu'une multiplicative, mais dans cette séance les propriétés en jeu sont communes aux deux.

complexité du « réel » et notre approche est une façon d'appréhender cette complexité. Elle correspond à un découpage de la réalité qui ne peut aborder tous ses aspects. Nous allons mettre en évidence différents liens entre différents facteurs, autres que strictement didactiques, ceux que l'approche ergonomique permet de prendre en compte. Nous allons tout d'abord dresser un bilan favorisant une analyse selon les composantes cognitive et médiative, puis nous faisons appel à des facteurs qui concernent les composantes personnelle, institutionnelle et sociale. Sous l'hypothèse admise de la cohérence des pratiques observées, il s'agit de retrouver cette cohérence dans l'activité de l'enseignant que nous avons analysée.

4.1 Bilan selon les composantes cognitive et médiative

Nous allons nous référer aux analyses précédentes sans en reprendre les détails. Nous présentons de manière très synthétique un bilan pour mettre en évidence les traits qui nous sont apparus comme caractéristiques, du côté des élèves, du côté de l'enseignant et du côté du savoir, du déroulement « cognitif ».

a. Des ressemblances

Les tâches proposées engagent des activités de comptage.

Le plus souvent, même si ce n'est pas nécessaire ou demandé, lorsqu'ils sont en présence d'une collection d'objets figurés, les élèves la dénombrent et ils la dénombrent le plus souvent par un comptage un à un. Quelques-uns utilisent un comptage de dix en dix. Pour résoudre des problèmes d'énumération, ils réinvestissent parfois des techniques introduites auparavant dans les deux classes, comme un marquage des objets déjà comptés. La séance en classe leur apparaît souvent, au moins initialement, comme un entraînement au comptage. Un nombre significatif d'entre eux la considère encore comme une tâche problématique, les problèmes d'énumération étant encore prégnants. Ce constat est renforcé par le champ numérique abordé. Il est nouveau en ce qui concerne cette séquence, et c'est d'ailleurs la différence principale que les élèves perçoivent entre les séances « petit » Ziglotron du début d'année et « grand » Ziglotron.

Des différences selon des élèves, un même problème conceptuel

Peu d'élèves réussissent d'emblée à formuler un message en termes de paquets de dix et de boutons seuls. Nous avons signalé les difficultés conceptuelles en jeu. En outre, c'est presque exclusivement à partir de la désignation parlée en France qu'ils formulent le message. Ceci peut être en partie lié au fait qu'ils comptent les objets de la collection. La désignation parlée en France qu'ils obtiennent constitue ainsi une première étape de la stratégie à utiliser. En conséquence, le nombre est moins traité dans son aspect signifié(s) que dans son aspect signifiant, voire representamen (d'une certaine manière le signe est traité sans nécessairement le relier à son sens). Les situations installées dans les séquences observées n'ont pas contraint les élèves à faire des groupements sur la collection, et ceci malgré, par exemple, les efforts de Mme B. pour aller dans ce sens.

Une gestion de la classe qui permet à l'enseignant d'être informé des connaissances des élèves ...

Ceci est en partie une conséquence d'un choix méthodologique en ce qui concerne les enseignants. Nous voulions observer des classes dans lesquelles la responsabilité du savoir pouvait être partagée. Nous pouvions ainsi analyser les différents jeux des interprétations du côté des élèves et de l'enseignant, dans une situation qui *a priori* pouvait mettre en exergue leur complexité. C'est ce que nous avons observé effectivement dans les deux classes. Ainsi en particulier les deux enseignantes sont informées de l'échec persistant de certains élèves dans certaines tâches à accomplir.

... et des micro-contrats qui se ressemblent

Ils se ressemblent en particulier selon le découpage que nous avons fait : « lancement », « réalisation de la tâche par les élèves » et « mise en commun ». Ceci n'est pas surprenant car ce découpage se base sur des dissymétries de l'activité des élèves et de l'enseignant et du partage de la responsabilité du savoir. Cependant, nous remarquons qu'à un certain niveau d'analyse ils restent semblables. En effet, jusque dans la séance 3, les enseignantes « résistent » le plus souvent à donner des aides qui faciliteraient la tâche, bien qu'elles soient informées des difficultés des élèves. Ceci perdure bien que des tâches nouvelles aient été introduites par les deux enseignantes, tâches qui ne favorisent pas nécessairement l'installation d'une situation adidactique. En outre, dans les situations de communication privée entre élèves (en binôme), les deux enseignantes veillent tout particulièrement à ce que l'élève le plus en difficulté puisse apprendre. Elles interviennent de manière plus importante, à l'image de la gestion d'une phase collective.
Aucune stratégie n'est l'objet d'institutionnalisation, ni même mise en relief de manière ostensible. D'une manière générale, il n'y a pas de mise en forme explicite du savoir. Les enseignantes s'attachent surtout à (in)valider les productions des élèves et ceci la plupart du temps via des microcontrats d'adhésion. Dans les deux classes, l'objectif « minimal » en classe est atteint finalement à la fin de la dernière séance, puisque tous les élèves arrivent à « réussir » l'exercice et que cette réussite est évaluée (positivement) par l'enseignante.

L'utilisation de signifiants « relais »

Certains signifiants relais utilisés sont directement en lien avec le contexte Ziglotron. Ceux qui sont en commun dans les deux classes sont essentiellement oraux : bande de (dix), paquets de (dix), plaque de (dix), les mots bouton/gommettes.
D'autres signifiants peuvent être employés de manière décontextualisée comme la file numérique des écritures chiffrées ou les doigts des mains. Les égalités du type 10+10+10+10+2=42 et 20+8=28 ou simplement une somme 10+10+10 ou encore une juxtaposition de « 10 » sans signes opératoires « 10 »/ « 10 »/ « 10 », ont un statut particulier, puisqu'elles sont prescrites par le manuel. Les élèves ne les utilisent pas et c'est l'enseignante qui provoque leur survenue, changeant ainsi le contrat habituel. En outre, elles ont une forme qui ne rappelle pas le contexte Ziglotron, mais, à la différence des signifiants précédents, elles ne sont pas d'un emploi usuel par les élèves. Elles ont une utilité spécifique dans la séquence, une « matérialisation » du passage à une interprétation multiplicative. Cependant cette ressource n'a pas été réellement exploitée par les enseignantes, c'est ce que nous abordons dans ce qui suit.

Des « occasions perdues » pour l'interprétation multiplicative ?

Les enseignantes sont amenées la plupart du temps à valider, individuellement ou collectivement, les productions d'élèves. Les stratégies qui sont alors à l'œuvre mettent en jeu l'interprétation multiplicative *a minima*. A certain moments cependant, des élèves indiquent des bribes de stratégie qui permettraient de mettre en jeu cette interprétation. Ces occasions ne sont pas saisies par l'enseignante. De même les signifiants relais ne sont pas exploités pour indiquer de stratégie, mais pour vérifier ou (in)valider les réponses, y compris 10+10+10+10+2 et les autres écritures chiffrées faisant apparaître des « 10 ».

Un même jeu complexe et non explicite des interprétations (1ère question)

Nous ne revenons pas sur les réponses apportées à la première question. Nous soulignons cependant que dans les deux classes les interprétations employées par les élèves ou/et l'enseignante ne sont pas perçues par les acteurs nécessairement de la même façon De plus, les interprétations n'interviennent pas toujours à bon escient par rapport aux objectifs cognitifs de la séquence. En particulier, l'interprétation ordinale (avec repérant ou non) est prégnante. En outre, elles vont surgir de manière différente selon le moment. Nous pouvons distinguer en particulier les échanges publics dans les phases collectives, c'est-à-dire quand tous les élèves sont tenus d'être concernés simultanément. Par ailleurs, l'écriture chiffrée est toujours utilisée comme forme écrite des désignations parlées, y compris dans l'utilisation des signifiants relais et au moment où ses chiffres sont distingués. Ainsi, par exemple, la file numérique est la forme écrite de la comptine numérique, alors que « 10 », « 20 » et « 42 » sont les traductions écrites de « dix, « vingt » et « quarante-deux ».

Les enseignantes ont toutes les deux modifié la séquence du manuel, mais pas de la même façon.

b. Des différences

Les difficultés des élèves

Mme B. insère des séances intermédiaires entre les séances, et propose des tâches différenciées dans une même séance. Finalement, dans la séance 3, tous les élèves proposent des productions correctes au moment de la phase de bouclage.
Mme H. passe significativement plus du temps auprès des élèves en difficulté qu'auprès des autres, en particulier pendant la réalisation de la tâche. Ils sont en outre sollicités pendant les mises en commun, tout au moins au début de celles-ci. Elle prend l'initiative de proposer des entraînements de manière plus systématique, en général en fin de séance.

La mise en relief du savoir en jeu

Aucune mise en forme du savoir n'intervient réellement dans les deux séquences observées. Cependant certains éléments afférents au savoir en jeu sont mis en avant. Ils diffèrent suivant les classes et la manière de les faire ressortir.
Mme B. ne met ces éléments en relief qu'à la fin des quatre séances. Plusieurs indices permettent aux élèves (et au chercheur) de voir qu'il s'agit d'un savoir à retenir. Elle propose dans la séance 4 une tâche de comparaison des messages écrits qui ont été produits dans les autres séances, ce qui peut ainsi indiquer qu'il s'agit de faire un bilan. Le milieu matériel de la situation initiale est absent, ce sont donc des preuves intellectuelles qui sont attendues et c'est l'enseignante qui a prévu un matériel spécifique. La résolution de la tâche est collective, l'enseignante se trouve devant le tableau, les élèves sont à leur place usuelle et n'en bougent pas. Ainsi elle montre une intention didactique qui se traduit par un changement de contrat dans la répartition de la responsabilité de la connaissance produite. Néanmoins aucune mise en forme n'est réellement faite. Pour Mme H., l'enjeu de savoir consiste en une légitimation/démonstration du lien entre les chiffres de l'écriture chiffrée et les nombres en jeu dans une désignation des groupements. La désignation parlée en France peut apparaître comme un des moyens de légitimer ce lien. Dans la séance 4, elle tente aussi d'établir un lien « direct » en superposant des bandes de « dix » à la file des écritures chiffrées.[304]

Pour Mme H. ce sont des « savoirs-outils » qui sont signifiés aux élèves et ceci tout au long des séances et pas uniquement dans la dernière. Autrement dit le savoir consiste en la réussite à certaines tâches. Elle le fait via des séances d'entraînement en fin de séance, ce qui peut tenir lieu d'une indication de ce qu'il faut savoir utiliser. Il s'agit alors de savoir passer d'une désignation parlée en France à une désignation des groupements, de manière « intellectuelle » et ceci de manière décontextualisée. Les séances ont permis de fournir implicitement des indications aux élèves sur la stratégie à adopter, notamment l'utilisation de la comptine des

[304] Les bandes sont disposées à la suite de l'une et de l'autre, et recouvrent la file numérique au fur et à mesure. Des carrés sont ensuite ajoutés.

dizaines et du repérant entendu. Cependant aucune stratégie n'a été institutionnalisée ni même réellement exposée puisque ce sont les stratégies de validation OF vers OG (ou/et GraC) qui ont été l'enjeu des débats collectifs. Pour Mme H, les exercices proposés dans la séance 4 sont dans la continuité de ce qui s'est passé dans les autres séances. Ils consistent toujours en des entraînements qui indiquent aux élèves la nature des tâches qu'ils doivent réussir, et donc la nature des connaissances à mobiliser. Pour Mme H., l'enjeu de savoir est la réussite d'un passage entre une désignation parlée en France et une désignation des groupements. L'écriture chiffrée étant la forme écrite de la désignation parlée en France, elle permet alors de réaliser de manière économique ce passage (cf. séance 4).

Des relais différents

Mme H utilise un matériel « standardisé » qui est déplaçable (donc ré-employable pour chaque production discutée) et peut s'afficher au tableau. Il est à la fois proche des productions graphiques de type 1 des élèves et des conditionnements dont dispose initialement le « vendeur ». Ce matériel favorise une certaine décontextualisation, mais met aussi en valeur les productions de type 1. L'enseignante ne les utilise pas pour favoriser une interprétation multiplicative de la numération parlée (les bandes sont « comptées », dix, vingt, trente ; le passage à trois bandes n'est pas particulièrement valorisé). Le mot dizaine est introduit, ce qui permet aussi une certaine décontextualisation. Ici encore cependant le passage entre « dix, vingt, trente » et trois dizaines n'est pas mis en exergue. A noter aussi l'utilisation d'un tableau 10x10 des écritures chiffrées qui n'est pas exploité pour mettre en relief le nombre de dizaines visibles en comptant le nombre de rangées.
Mme B utilise des groupements sur les collections figurées, soit au tableau, soit sur la fiche. Ils ne sont cependant pas réellement exploités en tant que stratégie pour réussir le problème. A nouveau ils permettent essentiellement de valider certains messages d'élèves.

4.2 Eclairage sur les autres composantes

Après les composantes cognitive et médiative, nous faisons appel à des éléments ayant trait aux composantes personnelle, institutionnelle et sociale. Nous allons donc tenir compte d'un certain nombre de paramètres qui étaient en germe dans nos analyses précédentes mais qui apparaissent de manière plus évidente dans une analyse croisée.
Dans les réponses à la deuxième question, nous avons identifié des facteurs liés aux connaissances anciennes des élèves, en particulier dans les utilisations respectives de la numération parlée en France et de l'écriture chiffrée. Nous avons aussi pu donner un aperçu du poids des tâches proposées et de la situation installée ainsi que des nécessaires utilisations de signifiants pour communiquer, selon les différents contrats installés, en particulier dans la phase de bouclage. Ceci était d'une certaine manière envisagé dès l'analyse didactique *a priori*, même si nous ne pouvions connaître leur poids relatif en classe. D'autres facteurs sont apparus en filigrane : le temps, la perception de l'enseignante sur les connaissances en jeu, la gestion des élèves en difficultés, etc. Nous allons les mettre en évidence en répondant à trois questions permettant une lecture complémentaire des ressemblances et différences que nous avons relevées.

Pourquoi les stratégies qui permettraient de servir l'objectif cognitif de la séance, c'est-à-dire en particulier OF vers OG ne sont explicitées dans aucune des deux classes ?
Pourquoi la dernière séance mène-t-elle dans les deux classes à une réussite globale des élèves qui est évaluée positivement par les deux enseignantes, mais interprétée différemment quant à la réussite de l'apprentissage visé ?
Comment expliquer certaines différences constatées (introduction de séances supplémentaires, tâches modifiées, signifiants relais) ?

Le rôle de l'enseignant : un même métier, des conceptions personnelles

L'explicitation d'une stratégie servirait les objectifs cognitifs de la séance et, en outre, pourrait apparaître comme pertinente aux élèves pour résoudre le problème posé. Il nous semble que la volonté des deux enseignantes de laisser une part de responsabilité aux élèves dans la production de la connaissance les engage à ne pas indiquer de stratégie si celle-ci n'est pas formulée par un élève. Mais deux autres facteurs peuvent aussi contribuer à ce constat. Les enseignantes ont le souci de permettre aux élèves en difficulté de ne pas « décrocher » pendant la séance. Or, en considérant leurs stratégies et productions, il est possible qu'elles estiment qu'ils ne sont pas prêts à comprendre l'utilité d'une stratégie explicitée, voire même à l'appliquer. Elle pourrait leur apparaître comme artificielle. D'une certaine manière l'urgence est qu'ils arrivent à un premier stade, celui de la validation : comprendre que leur proposition est erronée. Un autre argument vient du fait que la classe est un collectif. Des moments collectifs sont prescrits par l'institution et relayés par le manuel, mais ils font aussi partie des habitudes du métier[305]. Or dans ces moments, les signifiants et les débats en jeu doivent être compris de tous. Ceci oblige à des choix qui ne favorisent pas nécessairement une exploration des stratégies qui peuvent être jugées comme trop personnelles, ni des signifiants estimés hors de portée des élèves. Ceci peut contribuer ainsi à expliquer pourquoi les écritures du type 10+10+10+10+2 ne sont finalement pas réellement exploitées. Ainsi, comme les connaissances anciennes des élèves ou/et les tâches qui leur sont proposées ne les amènent pas facilement à utiliser les stratégies attendues (OF vers OG), celles-ci ne sont pas étudiées.
En ce qui concerne la deuxième question, notre analyse *a priori* montre en quoi il n'est pas surprenant que les élèves réussissent tous aux exercices de la dernière séance, une stratégie « mécanique » accessible à tous les élèves étant efficace. L'enseignante indique cependant aux élèves y reconnaître que la connaissance à apprendre a été construite. Il nous semble qu'à la fin de la séquence, il est important que le contrat « minimal » entre un enseignant et un élève soit réalisé. Ceci explique ainsi certaines ressemblances, mais n'explique cependant pas tout, en particulier des différences que nous avons relevées.

L'influence des conceptions des enseignants sur le savoir (à enseigner)

Même si l'enseignant sait que l'emploi d'une stratégie OF vers OG favorise potentiellement l'apprentissage visé plus que ne le fait une stratégie OG vers OF, il nous semble que ce sont les facteurs avancés ci-avant qui pèsent de manière plus importante sur le choix des stratégies qui vont être en jeu dans les moments collectifs. Par contre, c'est surtout pour fournir des éléments de réponse à la deuxième question ci-dessus que la conception du savoir qu'a l'enseignant peut intervenir. En effet, Mme B doute que la réussite des élèves aux exercices prouve que la connaissance visée est en jeu. Elle n'est pas « sûre » que sa démonstration ait été comprise. Elle a moins délégué la responsabilité du savoir, ce qui n'est pas son habitude ni la conception qu'elle a de l'apprentissage et donc de l'enseignement. Or, pour elle, la connaissance en jeu se situe à ce niveau. Autrement dit, si les élèves savent pourquoi une stratégie « automatique » est pertinente, ils peuvent l'utiliser, et cette utilisation atteste alors

[305] Ajoutons que dans la TSD ils sont nécessaires à l'institutionnalisation, en particulier pour la dépersonnalisation des connaissances.

qu’un sens est donné à celle-ci. Le lien chiffres de l’écriture chiffrée/chiffres de la désignation des groupements peut alors être utilisé, même de manière automatisée, puisque la démonstration de sa correction aura été faite.
Mme H. a, quant à elle, entraîné les élèves à des exercices OF vers OG, qui met *a priori* effectivement en jeu l’interprétation multiplicative visée. Or les entretiens post-séances, mais aussi notre analyse, indiquent que pour Mme H l’écriture chiffrée est avant tout la forme écrite de la désignation parlée en France. Ainsi, elle peut supposer que la réussite aux exercices de la séance 4, même en utilisant directement les chiffres, convoque chez les élèves une interprétation multiplicative. Ceci explique qu’elle estime avoir atteint l’objectif cognitif de la séquence. Par ailleurs, elle sait pouvoir compter sur « des entraînements futurs qui permettent de consolider les connaissances des élèves ». Ceci fait le lien avec la suite.

Le temps, la gestion de l’hétérogénéité, l’âge de élèves

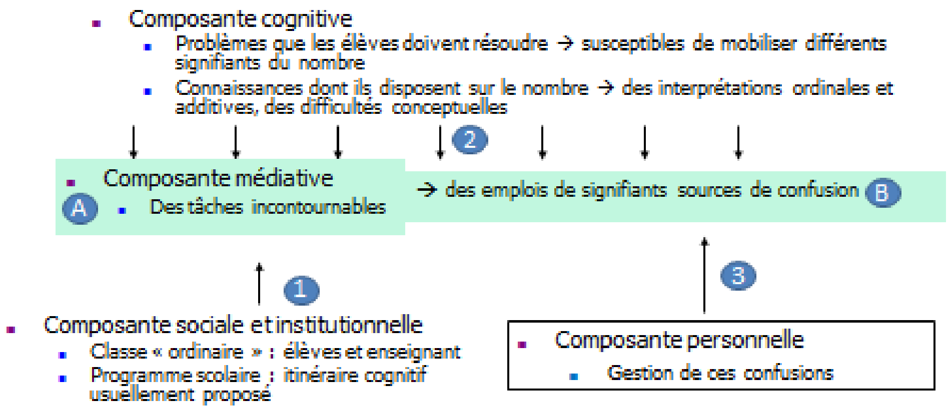
Ce sont en effet ces éléments qui, du fait de la difficulté de certains élèves à réussir les tâches, nous semblent provoquer en particulier un traitement relativement long des séances. Celles-ci sont cependant nécessairement à limiter dans le temps, du fait de recommandations et contraintes institutionnelles qui sont traduites dans la pratique du métier, mais aussi de l’âge des élèves. L’âge influe non seulement sur la durée des séances mais aussi sur les possibilités d’expression et sur les capacités de concentration. Les séances proposées ont ainsi été estimées par les enseignantes comme trop longues. Elles ont cependant tenté de préserver des contrats dans lesquels la responsabilité du savoir est partagée. Ceci peut éclairer ainsi le fait que les séances ne se terminent pas en général par une mise en relief du savoir, mais que celui-ci est plus volontiers repris en début de chaque séance. Par ailleurs, les connaissances des élèves influencent sensiblement la durée qu’il leur faut pour réaliser les tâches proposées (nous pensons aux difficultés conceptuelles). L’hétérogénéité de ces connaissances entraîne alors une disparité chez les élèves de la durée à réaliser les tâches. Ceci peut expliquer de nombreux rappels à l’ordre (malgré un climat général de travail), mais aussi certaines décisions. Celle par exemple prise par Mme B. d’introduire des séances intermédiaires et de proposer un étayage. En ce qui concerne Mme H, elle sait pouvoir compter sur « des entraînements futurs qui permettent de consolider les connaissances des élèves ». En outre elle passe significativement plus de temps auprès des élèves en difficulté.

4.3 Mise en forme de certains résultats

Différentes interprétations sont susceptibles d’être relevées pour un même signifiant, dans un même moment et pour des acteurs différents. En conclusion à ce chapitre nous proposons de comprendre certains éléments dégagés en insistant sur des moments particuliers, les phases collectives, dans lesquelles il nous ait apparu que les enseignants étaient contraints par certains paramètres de la situation (au sens large). Nous allons utiliser les composantes de la double approche avec deux schématisations sous la forme de tableau.

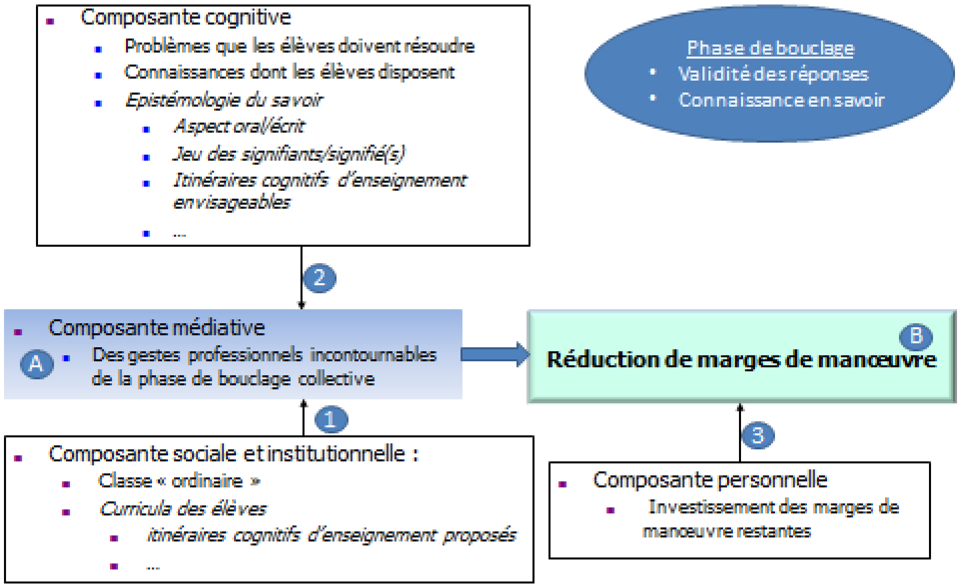
Tableau 1

Compréhension des déroulements en classe :
des emplois de signifiants sources de confusions
lors de tâches incontournables de l'enseignant



Ce premier tableau met le focus sur la survenue de confusions relatives à la notion enseignée. Les contraintes analysables par la composante institutionnelle (enseigner à tous les élèves d'une classe selon des prescriptions institutionnelles, sans en délaisser aucun) entraînent (flèche 1) que les enseignants doivent réaliser des tâches incontournables (repère A) de leur métier dans des moments collectifs (donner des informations sur la validité des réponses et procédures, faire le lien avec le savoir et ceci indépendamment de la manière de s'y prendre …). Les enseignants vont devoir alors utiliser des signifiants qui sont disponibles aux élèves ou/et susceptibles d'être mobilisés dans les tâches qui leur sont proposées (composante cognitive). Ceci est alors (flèche 2) source de confusions (repère B). Le schéma met l'accent sur le fait que les enseignants (composante personnelle) doivent composer avec cette situation (flèche 3).

Tableau 2 **L'effet bouclage**



Ce deuxième tableau met l'accent sur la réduction de marges de manœuvre à des moments particuliers des déroulements en classe, réduction qui va alors favoriser des confusions dans le contexte de l'enseignement de la numération aux CP. Ces moments sont analysables par l'outil « phase de bouclage » que nous avons constitué dans la thèse (voir chapitre 6, paragraphe 2.2 b). Nous rappelons simplement ici que sont en jeu deux niveaux de conclusion imbriqués, et que l'aspect collectif est essentiel. Le mécanisme est le même que pour le tableau précédent. Cependant, dans celui-ci nous retenons les éléments de la composante cognitive qui sont susceptibles de jouer sur la réduction de marges de manœuvre et non sur ceux qui vont entraîner des occurrences de confusion. Nous nommons ce mécanisme l'« effet bouclage », afin de ne pas mettre l'accent sur les produits éventuels au niveau cognitif. Il est en effet envisageable que des déroulements en classe puissent être analysés comme relevant de cet effet, sans que ceux-ci ne génèrent des confusions.

Que ce soit relativement au tableau 1 ou au 2, la question se pose de la généralisation de ces résultats, de cet « effet ». Peut-on les considérer comme une forme de contrainte du métier ? Nous ne traitons pas cette question, mais il nous semble que notre analyse a montré qu'ils pourraient être rencontrés dans l'enseignement « ordinaire » pour d'autres classes de CP, d'autres niveaux que le CP, voire concerner d'autres notions à enseigner, celles comportant certaines caractéristiques communes à l'écriture chiffrée (nous pensons par exemple aux fractions).

CHAPITRE IX
Perspectives de recherche : propositions pour une ingénierie didactique

Ce neuvième et dernier chapitre de la thèse est à part, puisque son rôle n'est pas d'établir des résultats, mais de dégager des perspectives de recherches à partir de l'ensemble du travail effectué. Après avoir dressé dans un premier temps un bilan des différents apports de la thèse dans l'optique de ce chapitre (§1), nous allons exposer une proposition (§2) qui sera analysée afin d'élaborer des questions qui se posent pour de futures recherches (§3).

1. Position du problème d'enseignement

Nous allons reprendre les résultats obtenus jusqu'à présent en orientant leur présentation par rapport à l'objectif de ce dernier chapitre.
La première partie de la thèse nous a permis de distinguer les numérations en jeu en CP d'un point de vue des principes mathématiques sous-jacents, mais aussi de la mise en signes de ces principes. Nous avons dégagé une interprétation de l'écriture chiffrée que nous avons qualifiée de référence. La décomposition dite polynomiale d'un nombre est utilisée pour une mise en signes mobilisant des chiffres (representamens des coefficients) et une disposition spatiale spécifique (aspect positionnel entre autres) pour indiquer la correspondance entre un coefficient et l'ordre auquel il se réfère (la puissance de dix). En ce qui concerne la numération parlée, c'est l'interprétation arithmétique multiplicative qui est la plus proche de cette interprétation de référence, même si les deux numérations ont des origines historiques et des usages différents. En effet la partie mathématique peut y être aussi analysée comme basée sur la composition dite polynomiale. C'est alors la mise en signes qui diffère essentiellement, c'est ce qu'a permis de mettre en évidence une analyse syntaxique. Pour les nombres inférieurs à cent, ce sont en fait les autres interprétations qui sont les plus pertinentes en ce qui concerne la numération parlée en France (et donc y compris des interprétations ordinales). Par ailleurs, les procédés « concrets » de mise en signes du cardinal d'une collection peuvent être formellement proches, bien que n'étant pas motivés par les mêmes raisons. En particulier, il n'est pas possible d'associer de manière bijective un procédé à une interprétation.
Au niveau du sujet, nous avons pu cependant traduire cette différence. Il s'agit de la distinction entre la stratégie « organiser/configurer pour désigner » et un comptage utilisant des groupements de dix. La différence essentielle est que, dans la première, l'organisation est une étape pour dénombrer, la suivante consistant alors à coder l'organisation obtenue. Dans la seconde, le comptage, il n'est pas nécessaire de prendre en compte une organisation finale. La structure de la collection change au fur et à mesure du procédé de comptage. Fondamentalement, à chaque étape, deux sous-collections sont distinguées : celle des éléments déjà énumérés, celle de ceux qui ne le sont pas. Les mots prononcés permettent d'obtenir une désignation du cardinal de la collection des objets qui ont été déjà énumérés successivement, ce qui n'est pas le cas pour « organiser/configurer pour désigner ». Ceci a pour conséquence que, dans le premier cas, des questions propre à la mise en signes se posent dans la deuxième étape, alors que, dans un comptage, elles ne sont pas distinguables. Ceci peut avoir alors un intérêt pour l'enseignement, « organiser/configurer pour désigner » permettant par exemple de faire apparaître des choix spécifiques à la mise en signes menant aux écritures chiffrées.
Par ailleurs, nous avons analysé l'enseignement de la numération à l'aide de la notion d'itinéraire cognitif d'enseignement. L'analyse des recherches nous a conduit à en définir trois types. Le premier et le second utilisent de manière essentielle une interprétation multiplicative d'un système de numération orale. Il s'agit d'utiliser la numération écrite chiffrée en tant que forme écrite de la numération orale. Les écritures chiffrées peuvent alors être interprétées de manière multiplicative. Les deux itinéraires se distinguent du fait que le second utilise une numération annexe relais « régulière » en outre de la numération en langue maternelle (indo-européenne). Au niveau de l'enseignement, nous avons souligné que

l'emploi de la numération parlée orale permettait d'utiliser les acquis conceptuels des élèves sur le nombre. Cependant ils ne facilitent pas le questionnement des propriétés mathématiques, comme par exemple l'utilisation de groupements, de cardinal identique et de manière maximale. Ces propriétés sont en effet utilisées « en acte » dans les numérations orales, et *a priori* ces deux itinéraires ne prévoient pas de questionner ces « choix ». Ils ne facilitent pas non plus l'étude des spécificités de la mise en signes de notre système de numération : le nombre et la graphie des chiffres, leur organisation spatiale (en particulier leur alignement dans un ordre) et le zéro. En outre, et cette question est liée à ce qui précède, la place de l'écriture chiffrée ne nous semble pas être fixée avec précision par l'itinéraire. Est-elle la forme écrite de la numération parlée, forme qu'il s'agit de décrypter en essayant de comprendre comment on passe des mots aux chiffres ? Ou bien les deux numérations sont-elles issue d'une même troisième numération, que ce soit une numération « régulière » ou « en unités » ? Nous avons montré qu'historiquement aucune des deux propositions n'est exacte.
Il est toujours possible d'aborder ces propriétés ultérieurement. De manière ostensible, ou, en accord avec notre cadre théorique issue de la théorie des champs conceptuels, grâce à l'utilisation de la numération écrite chiffrée dans des problèmes divers, permettant d'utiliser de manière pertinente des théorèmes-en-acte. Cependant nous nous posons la question de savoir s'il est possible de les aborder dès le CP, au moment où les premiers éléments de l'interprétation de référence se constituent. L'hypothèse sous-jacente est qu'une telle approche est susceptible de faciliter les apprentissages futurs des élèves.

Par ailleurs, nous avons mis en évidence un problème spécifique à l'enseignement en classe, celui des emplois multiples des interprétations dans les différentes phases d'une séance, emplois qui peuvent être sources de difficultés d'apprentissages et d'enseignement. Nous avons indiqué le rôle joué par les tâches proposées aux élèves et les ressources diverses utilisées par les enseignants.

Un autre itinéraire est-il possible ? Vers de nouvelles questions pour la recherche.

Est-ce qu'il est possible de surmonter les problèmes qui peuvent intervenir lorsqu'on « dit » le nombre, tout en gardant les acquis conceptuels des élèves sur le nombre qui ont été véhiculés entre autres par le langage que constitue la numération parlée ? Il nous semble que l'itinéraire proposé dans Cap Math nécessite une introduction de la numération parlée en France dans une interprétation arithmétique multiplicative de manière plus longue que celle envisagée par le manuel[306] puis d'y associer ultérieurement l'écriture chiffrée. En considérant l'analyse des échanges en classe et de leur gestion par les enseignants, la difficulté reste cependant de trouver des situations dans lesquelles l'emploi des interprétations anciennes ne va pas constituer un obstacle, à la fois du côté des tâches proposées que de celui des débats qu'elles peuvent susciter dans les moments collectifs. La seule référence à « Cap Maths » ne permet certainement pas d'indiquer toutes les possibilités des deux premiers itinéraires. Nous savons qu'il existe un nombre important de ressources et situations pour la classe, étudiées et développées. Notre but est d'investiguer une nouvelle piste, car c'est elle qui est apparue comme moins explorée bien qu'elle offre *a priori* des avantages par rapport aux autres. En effet, dans les itinéraires 1 et 2, nous avons signalé que la maximalité, l'utilisation de mêmes groupements (de dix), voire l'ordre des representamens, étant « de fait » dans les numérations parlées, il est difficile de les questionner. Par ces itinéraires, il nous semble donc plus difficile d'éclairer toutes les dimensions de l'interprétation de référence de l'écriture chiffrée. Est-il possible dès son introduction d'aborder (aussi) ces caractéristiques ?

[306] Les élèves ont des difficultés importantes et persistantes à considérer que des groupements puissent être utilisés dans des signifiants du nombre.

Ceci renvoie alors à la question suivante : est-il possible en classe d'introduire la numération écrite chiffrée sans l'associer à une numération parlée (quelle qu'elle soit) ? Qu'y « gagne »-t-on ? Qu'y « perd »-on ? En effet, ce choix n'est pas neutre, puisqu'*a priori* il comprend l'inconvénient de mobiliser plus difficilement les connaissances des élèves sur le nombre, celui-ci ayant été abordé à la maternelle principalement via la numération parlée (interprétation ordinale). Ces questions générales peuvent être comprises à l'aune des résultats obtenus au fur à mesure de notre recherche et qui ont été rappelés ici. Les réponses demandent un travail de longue haleine, nécessitant maintenant, nous semble-t-il, de tester des situations en classe : ceci dépasse notre travail de thèse. L'objectif de ce dernier chapitre est de « préparer » une future recherche en précisant la teneur des questions qui se posent et les outils méthodologiques pour y répondre. C'est pourquoi nous allons indiquer des éléments concrets d'une séquence qui est susceptible d'introduire les écritures chiffrées autrement que par le biais de numérations orales. Nous en proposons ensuite une première analyse *a priori* au regard de nos résultats antérieurs. En particulier, comme pour n'importe quel itinéraire proposé, nous la replaçons dans un dispositif sur un long terme susceptible de pallier les différentes difficultés précitées.

2. Une proposition pour l'enseignement

Une proposition complète et détaillée nous semble inenvisageable, trop de paramètres sont susceptibles d'entrer en ligne de compte. La séquence que nous proposons est le cœur d'une proposition d'itinéraire cognitif d'enseignement qui doit permettre de poser des questions dans des perspectives de recherche. La finalité est de proposer une alternative « réalisable » en classe pour les enseignants et susceptible de faciliter les apprentissages des élèves. La séquence a été élaborée en prenant en compte l'étude faite dans la thèse et en s'appuyant sur la TSD. Elle sera discutée dans le paragraphe 3.
La séquence est divisée en deux. Les étapes 1, 2 et 3 amènent à faire apparaître comme utile un certain type d'organisation. Les étapes 4 et 5 abordent le problème du passage au codage écrit de ces organisations.

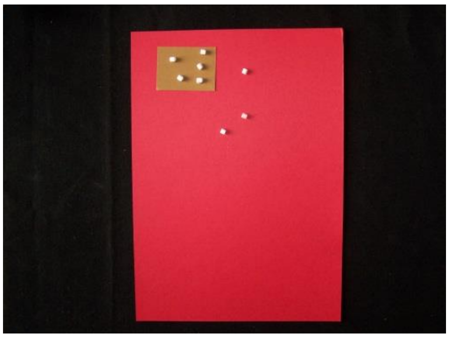
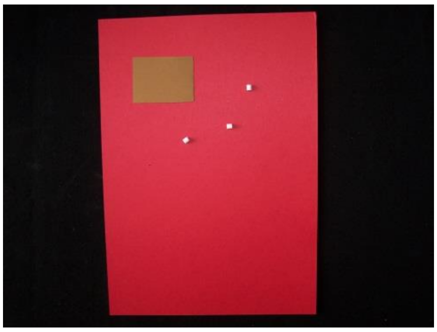
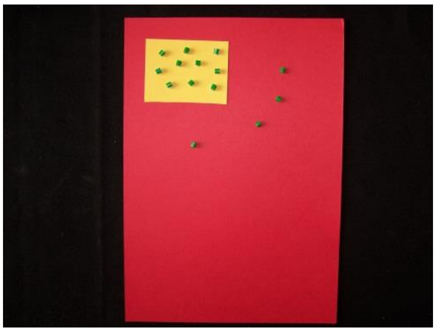
2. 1 La situation

Pour les trois premières étapes, la séquence est fondée sur une situation que nous décrivons tout d'abord. Au cours de cette séquence les variables didactiques sont choisies de façon à faire évoluer les connaissances en jeu.
Dans les deux dernières étapes, les étapes 4 et 5, afin de rendre utile le passage à l'écrit, des situations de communication ou/et nécessitant de garder une trace mémorielle à plus ou moins long terme sont installées. Elles peuvent reprendre le contexte de la situation des trois premières étapes.

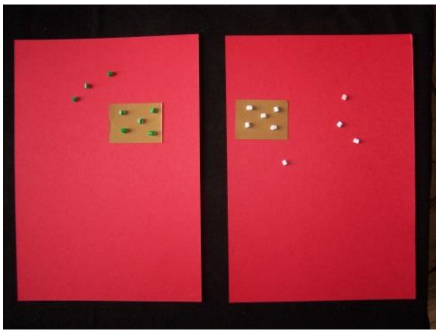
Description de la situation

Jeu :
Il s'agit de comparer des collections de cardinal proche, le plus souvent au tableau.
Milieu matériel :
Des objets déplaçables constituent deux collections d'objets (par exemple des « petites » perles) occupant deux espaces distincts du tableau.

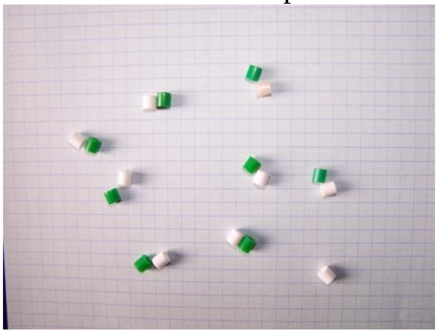
Le milieu matériel évolue au cours de la séquence. Ainsi un groupement peut être matérialisé en fixant les objets qui le constituent sur une feuille amovible. Cette feuille peut ensuite être retournée, signifiant toujours le groupement, sans que les objets soient visibles.

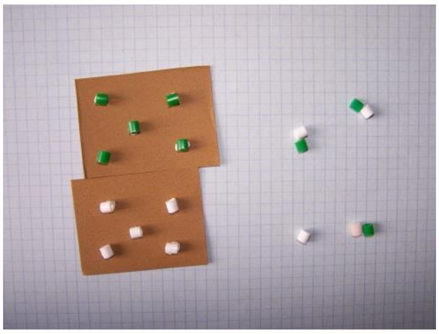





Règles et conditions du jeu :
Les deux collections ne sont pas visibles longtemps. Elles apparaissent simultanément pendant un certain temps, puis elles sont cachées. La question posée aux élèves est « Où y-en-t-il le plus ? ». La durée pendant laquelle les collections restent apparentes ne doit pas permettre de rendre efficace *a priori* (car non matériellement réalisable) une stratégie de dénombrement par comptage un à un. La tâche ne peut être donc réussie que sous certaines conditions, qui ne sont pas nécessairement initialement réunies. La règle du jeu précisée aux élèves est qu'ils doivent proposer une solution pour que tout le monde puisse avoir la bonne réponse. La seule variable qu'ils peuvent utiliser est la disposition des objets.
Validation :
Les éléments des deux collections sont rapprochés successivement (par exemple au centre du tableau), un objet d'une collection puis un de l'autre, afin de ne pas favoriser le comptage. Par la suite ce sont les groupements entiers qui peuvent être mis en bijection.
Par exemple partir de :



Différentes validations sont possibles :





Variables didactiques :
Le nombre des objets, la nature des groupements, le nombre de groupements.

Ce jeu est court mais peut se répéter souvent, sur une durée d'environ deux mois[307]. Il peut devenir un rituel. Il est généralement proposé simultanément à tous les élèves de la classe, mais peut aussi se décliner de manière plus individuelle. Les propositions des élèves peuvent être testées au fur et à mesure. Ces propositions peuvent avoir été produites collectivement par la classe entière ou par des groupes d'élèves qui peuvent ainsi confronter leur production.
Les sous-étapes de la progression sont marquées généralement par un changement de variable opéré par l'enseignant ou à la demande des élèves (disposition des objets et nombre).
Voici un tableau qui permet de présenter les différentes étapes.

[307] Par exemple après les vacances de la toussaint.

Les étapes	Variables	Variables de l'organisation en classe[308]
1. Faire ressortir **l'utilité du groupement** pour la comparaison visuelle de collections 2. Faire ressortir l'utilité du groupement pour la comparaison visuelle de collections : **un même type de groupements, la maximalité.** 3. Faire ressortir l'utilité du groupement par comparaison visuelle de collections : **le groupement de dix.** 4. **L'utilité d'une écriture** des collections organisées (pour communiquer, se souvenir) et son **choix.** Propositions diverses d'écritures: discussion sur leur pertinence à résoudre des problèmes (compréhensibles par tous, non ambigües). 5. **L'écriture chiffrée usuelle** : la **position** des chiffres, la nécessité d'un chiffre pour marquer l'absence, le **zéro**.	<u>Variables fixées</u> : Le nombre de collections à comparer est toujours de deux. Les collections doivent être visibles simultanément ce qui contraint entre autre à considérer la position des élèves par rapport aux deux collections et l'écartement entre les deux collections. Les collections sont manipulables (pour une possible réorganisation et pour la validation) mais pas au moment d'effectuer la comparaison[309]. <u>Variables</u> sur lesquelles l'enseignant peut jouer mais pas l'élève : **Nature** des objets des deux collections à comparer et des supports utilisés : taille, forme, couleur, hétérogènes ou non, familiers ou non, figuratifs ou non. **Durée** pour effectuer la comparaison **Cardinal** des collections <u>Variables</u> sur lesquelles les élèves peuvent jouer après un premier essai ou pour anticiper : **Disposition spatiale** : quelle organisation ? (groupements ou non).	**Modalités** : collectif, groupe ou individuel. **Durée, fréquence** et **moment** des séances : à fixer dans la journée, dans la semaine, dans l'année. **Programmation** de la progression dans l'année (possibilités d'insérer des séances complémentaires pour certains élèves pour tous et selon différents mésocontrats : rappel, entraînement, réinvestissement des connaissances). **Acteurs** (enseignant, élève, groupe, classe entière) selon la tâche : qui propose, qui répond, qui organise les collections ? **Nombre d'essais** pour des tâches mettant en jeu des stratégies similaires. **Le mode de validation** est l'association terme à terme, des unités puis, progressivement, des groupements (l'utilisation de désignations parlées des nombres inférieurs supérieurs à dix n'est pas nécessaire). Mode d'**institutionnalisatio**n : en ce qui concerne les phases de conclusion, la mise en forme du savoir n'a pas nécessairement lieu à la fin de chaque séance et peut prendre différentes formes (affichage, tableau, traces écrites sur un cahier), sur différentes durées. Les **évaluations** : les séances collectives ne permettent pas à l'enseignant d'évaluer chaque élève.

[308] Les microcontrats et mésocontrats que la situation tente de favoriser sont ceux permettant une dévolution de la situation aux élèves et permettant que l'enseignant soit informé des difficultés des élèves afin qu'il puisse adapter les séances au fur et à mesure.
[309] A noter que la collection comportant le plus d'éléments ne doit pas toujours se trouver à la même place au tableau.

2.2 Présentation détaillée des étapes

La description que nous faisons indique les différentes étapes et sous-étapes ainsi que des éléments du rôle prescrit à l'enseignant et attendu des élèves. Nous avons choisi une description « vivante » qui permette au lecteur de se rendre compte des déroulements prévus, la finalité étant l'expérimentation. Certains éléments d'analyse sont déjà repérables.
Nous allons principalement indiquer la progression concernant les variables didactiques s'agissant du cardinal des collections que l'enseignant propose successivement ainsi que les propositions attendues des élèves. Nous détaillons aussi certaines étapes afin de nous permettre d'indiquer comment nous avons pris en compte certains résultats de la thèse, notamment concernant l'âge des élèves (rythmes, possibilités d'expression, de concentration) ou leurs difficultés à considérer les groupements et les unités comme outils de dénombrement et par suite comme signifiant du nombre. Les choix que nous avons adoptés sont motivés par des résultats obtenus précédemment dans notre travail, mais aussi par le fait que nous pensons à une expérimentation dans une classe « ordinaire », sans nécessairement un pilotage quotidien par un chercheur (qui pourrait alors faire des propositions après une analyse de ce qui s'est passé à chaque séance). Ces choix sont analysés ultérieurement, dans le paragraphe 3. Notons cependant que nous n'avons pas indiqué tous les moments d'institutionnalisation qui sont susceptibles d'être proposés. Nous en discutons aussi ultérieurement.

a. Les trois premières étapes : la nécessité d'organiser, le choix de l'organisation

Nous rappelons que la validation se fait ici toujours par une procédure terme à terme, d'abord unité par unité puis groupement par groupement. Par ailleurs, les séances sont conçues pour être courtes (quelques minutes, pour quelques comparaisons) mais fréquentes (cela peut aller jusqu'à deux fois par jour, une fois le matin et une l'après-midi). L'accent est mis sur les échecs et réussites (validation par le milieu matériel), sur les problèmes qui se posent au fur et à mesure et les moyens de les résoudre. Les débats ne portent pas en général sur l'explication des procédures.
Par ailleurs, nous indiquons les différents contrats didactiques que nous envisageons *a priori*. La proposition est élaborée pour que leur adoption en soit facilitée.
Finalement nous allons identifier trois « ruptures » A, B, C qui correspondent à des choix dans notre proposition, choix qui reflètent des points sensibles. En effet la solution donnée au problème posé par l'évolution de la situation n'apparaît pas nécessairement comme la seule ou la plus efficace. Nous discutons ces choix dans le § 3.

1ère étape : Faire ressortir **l'utilité du groupement pour la** comparaison visuelle de collections

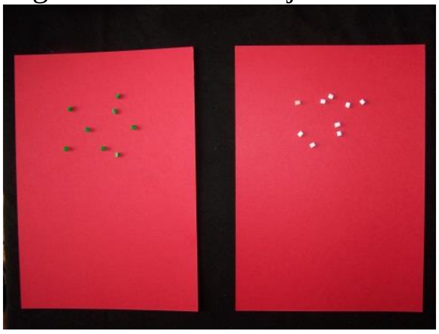
Le mésocontrat envisagé est celui d'une dévolution d'une première situation.

1.1 : S'approprier les règles du jeu

Il s'agit de comparer des collections non ordonnées de 3 ou 4 éléments. Dans un premier temps, les élèves peuvent répondre correctement sans dénombrer, par « subitizing ». Certaines collections ont le même nombre d'éléments, pour que « égal » soit une possibilité. En effet plus tard quand les collections vont être de cardinal proche, il faut que les élèves puissent avoir cette possibilité. Le but est ici de préparer la suite, en particulier, les élèves doivent comprendre la tâche (comparer de manière visuelle, puisqu'il n'est pas nécessaire de compter et ensuite donner sa réponse) et la validation **(règles du jeu).** Il n'y a donc pas de difficultés *a priori* car jusqu'à 4 les élèves peuvent reconnaître globalement le nombre d'éléments de la collection (subitizing). Certains peuvent compter (directement ou à partir d'une image mentale). Dans sa gestion de séance l'enseignant ne doit pas valoriser cette procédure, elle ne doit pas apparaître comme nécessaire[310]. La validation matérielle terme à terme apparaît comme un moyen « objectif » qui permet d'accéder à la validité des réponses sans avoir à fournir de preuves intellectuelles (comme le comptage).

1.2 : Faire apparaître la difficulté

Les deux collections comportent respectivement successivement 5 et 6 objets, 6 et 7 objets, 6 et 6, puis si nécessaire 5 et 5, 7 et 7. Elles sont présentées de sorte que les stratégies d'évaluation basées sur le subitizing et celle de comptage un à un soient bloquées, mais aussi celles de calcul. Ainsi il ne faut pas par exemple qu'une collection constituée de 9 objets soit présentée en deux groupes distinguables de 5 et 4 objets[311].



Il est vraisemblablement nécessaire de faire plusieurs exercices pour que les élèves s'aperçoivent qu'ils ne peuvent pas être sûrs de leur réponse (ce qui peut aussi être attesté par les différentes réponses recensées dans la classe). L'enseignant fait ressortir dans son bilan que la majorité des élèves n'ont pas eu 100% de réussite. La question posée est celle de trouver un moyen d'augmenter la réussite pour tous, d'être plus sûr de sa réponse : la réponse est étudiée dès la séance future.

1.3 : faire apparaître l'organisation en constellation (5 d'un côté et 6 de l'autre) comme solution au problème, donner des nouvelles règles du jeu.

Une fois que les élèves ont perçu la difficulté à comparer sans organisation (ils n'identifient cependant pas encore nécessairement que c'est l'organisation qui va résoudre le problème), c'est le moment de proposer d'un côté une constellation du dé 5 et d'un autre une du dé 6[312] (Rupture A). Ils devraient alors réussir si les constellations du dé sont suffisamment connues.

Dans la **nouvelle règle du jeu** indiquée aux élèves, il leur est possible de demander de présenter les deux collections d'une certaine manière, mais il faut alors qu'ils le disent avant à celui qui prépare le jeu (l'enseignant pour l'instant). En situation de formulation, une **autre règle du jeu** à (ré)affirmer est que le but est collectif : « *presque tout le monde doit réussir* », « *on doit trouver cela facile* ». Les élèves doivent comprendre que ce qu'ils proposent n'est pas uniquement valable pour eux, mais pour tout le monde (dépersonnalisation de la connaissance). Pour l'enseignant, ce sera aussi un moyen de gérer la part de hasard dans les réponses.

---

310 Etre capable de dire qu'il y a quatre, trois, deux ou un objet, n'indique pas forcément qu'un comptage a été utilisé, puisque justement le « subitizing » permet d'accéder directement à une information sur le cardinal de la collection.

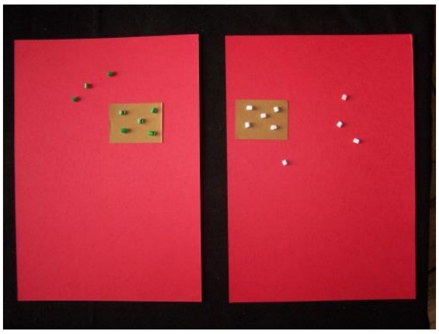
311 Il peut être nécessaire pour mieux faire apparaître le problème de considérer des collections jusqu'à huit, voire neuf objets, la différence entre deux collections n'excédant pas un.

312 L'alternative étant de laisser les élèves proposer leur solution. A noter ici que la constellation signifie « il y en a cinq ». Autrement dit, le groupement est induit par la disposition des 5 éléments, plus tard il faudra un code pour signifier qu'on a un groupement de dix, la constellation de dix n'étant pas identifiable par « subitizing culturel ».

1.4 : tester l’efficacité de l’organisation en constellation du dé 5 comme solution au problème.

Par la suite nous allons adopter une convention pour indiquer les différentes propositions. Le cardinal d’un groupement visible au tableau est indiqué par un nombre **en gras**, alors que le nombre qui suit indique le nombre d’éléments non organisés qui reste. Par exemple dans la comparaison (**5**, 3) et (**5,** 2), le 5 en gras indique un groupement de cinq objets (ici c’est une constellation de 5), le 3 et le 2 indiquant que dans les deux collections il reste respectivement 3 et 2 objets sans organisation repérable *a priori*.

Les mésocontrats envisagés sont ici ceux de pseudodévolution ou de réinvestissement de connaissances.
Il s’agit tout d’abord de comparer des collections de 6 à 9 objets non ordonnés (avec au plus un objet d’écart). S’ils n’ont pas pensé à demander l’organisation par constellation, les élèves devraient échouer en nombre significatif. La règle du jeu peut être rappelée : veulent-ils demander quelque chose à celui qui va proposer le nouveau jeu (l’enseignant ici) ? La réponse attendue est : « faire comme le dé » (l’enseignant ne demande pas ici s’ils veulent le 5 ou le 6).
Ensuite sont proposées des comparaisons de 6 à 9 utilisant toujours un groupement de 5 en constellation du dé et 0, 1, 2, 3 ou 4 restants non organisés (Rupture A, suite). L’enseignant n’organise pas les collections si les élèves ne le demandent pas. Il faut que tous les élèves réussissent : la stratégie efficace attendue étant de ne considérer que des éléments restants à côté de la constellation[313]. A ce moment, il est possible, de faire verbaliser les élèves sur « comment ils font », cependant le but n’est pas de favoriser le calcul. La diffusion de stratégies a pour vocation de rendre mobilisable celle attendue. Elle peut apparaître comme plus efficace et plus sûre car elle nécessite la première étape, reconnaissance du nombre d’objets non groupés par une évaluation basée sur une part de subitizing, mais ne nécessite pas la deuxième, le calcul de cinq plus... Une fois celle-ci diffusée, un certain nombre d’essais peut permettre aux élèves de vérifier que cette procédure est plus efficace que le calcul. La validation terme à terme est toujours utilisée. La stratégie précédente peut être mise en parallèle avec le fait qu’il est inutile de « défaire le cinq », il suffit de considérer les éléments qui restent. A remarquer qu’ainsi, cela suppose de considérer la constellation de cinq comme « un » (échange cinq contre un), mais sans la considérer au même niveau que chaque objet non groupé. Ici est introduite l’utilisation d’**une feuille amovible sur laquelle sont placés systématiquement les objets groupés,** ici encore en constellation, les autres restant sur le tableau à côté de cette feuille.



[313] Il y en a cependant deux autres. Une première consiste en un calcul (cinq plus ...). Une autre, erronée, consiste à considérer qu’une constellation est un objet, et ainsi à dénombrer la constellation de 5 et les éléments restants. Par exemple dans la comparaison **5**, 3 et **5,** 2, un élève pourrait considérer 4 objets d’un côté (la constellation et les 3 seuls) et 3 de l’autre (la constellation et les 2 seuls).

1.5 : Evaluation des connaissances des élèves par l'enseignant

La difficulté est de trouver une évaluation individuelle qui corresponde à l'activité collective qu'ils ont faite. Une évaluation sur fiche est par exemple impossible, puisque les collections ne doivent être visibles qu'un bref instant. Le but est non seulement de savoir s'ils réussissent à indiquer toujours la bonne réponse, mais aussi de voir s'ils ont compris la nécessité d'organiser. On peut leur demander par exemple de préparer l'activité pour les autres (sans forcément la soumettre ensuite aux autres) pour voir s'ils font des (ré)organisations par constellations. Il est aussi nécessaire de voir comment ils valident leur réponse en leur laissant faire la comparaison terme à terme.

Au terme de cette évaluation, il peut être nécessaire de faire une pause dans le cas ou certains élèves auraient des difficultés.

2ème étape : Faire ressortir l'utilité du groupement par comparaison visuelle de collections : **un même type de groupement, la maximalité.**

La validation se fait ici toujours à l'aide d'une association terme à terme. La validation groupement par groupement déjà amorcée précédemment est introduite petit à petit. Pendant quelques séances les deux sont utilisées simultanément.

2.1 : faire apparaître la nécessité d'avoir le même type de groupement dans les deux collections.

Est proposé (**6**, 3), constellation 6 et 3 non ordonnés, à comparer avec (**5**, 4), 5 en constellation 4 non ordonnés. Des réponses différentes devraient apparaître. La validation terme à terme permet de trancher. Les élèves devraient se rendre compte qu'il n'y a pas de chaque côté les deux mêmes constellations. La solution proposée (« Il faut donc se mettre d'accord ») est d'utiliser toujours des constellations identiques.

2.2 : se mettre d'accord sur le groupement à choisir

Des comparaisons suivantes sont proposées

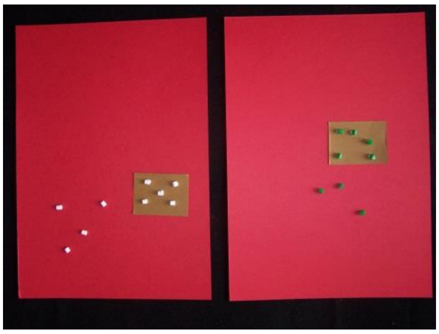
5, 2	**4,** 3
6, 3	**5,** 3
8	9

Il peut être proposé à une partie de la classe d'organiser une des collections et à une autre partie, la seconde collection. Ceci doit amener les élèves à convenir de se mettre d'accord sur le groupement à choisir. Le fait de choisir cinq (du dé) doit apparaître comme une nécessité de choisir une alternative (Rupture A, fin) : six aurait pu aussi convenir, voire un autre groupement[314].

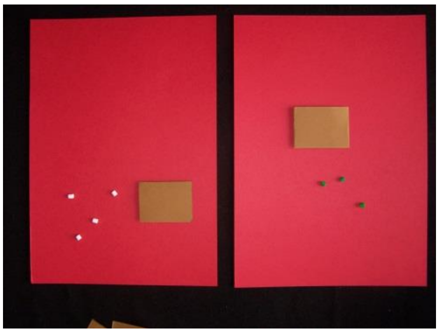
2. 3 : Passage de la constellation du dé 5 au groupement par 5

Les élèves peuvent penser qu'il faut absolument une organisation utilisant des constellations pour résoudre le problème. En fait il faut uniquement savoir qu'il y a le même type de groupements utilisé dans les deux collections. C'est donc le nombre d'objets dans la constellation qui importe et non la disposition en constellation du dé. L'objectif est qu'ils ne se focalisent plus sur la forme de la constellation mais sur le nombre (5) dans la constellation. Pour ce faire, on va proposer des collections qui comportent des groupements de cinq non en constellation.

[314] En toute rigueur, le choix de six, peut amener dans certains cas à comparer cinq éléments seuls avec quatre, ce qui ne peut se faire par une stratégie de subitizing. Le choix de cinq peut donc apparaître le meilleur. Il est possible de laisser les élèves tester les deux possibilités. A remarquer cependant que lorsqu'il va être question de passer à des groupements de dix, cet argument ne sera plus celui retenu.



D’un côté les élèves s’aperçoivent que les stratégies utilisées auparavant sont performantes, d’un autre ils sont troublés par le fait de ne pas reconnaître immédiatement le 5. Il s’agit alors de convenir d’un code qui permette de ne pas avoir à vérifier à chaque fois que le groupement est bien de cinq : la solution est de tourner la feuille qui comporte 5 éléments qui a été introduite à l’étape 1.4.



Cette étape n’est possible que si les élèves ont déjà compris qu’il était inutile de défaire les groupements pour la validation (on compare terme à terme les groupements de 5 puis terme à terme les éléments qui restent).

Par la suite, un mésocontrat de réinvestissement de savoir peut s’instaurer, le nombre d’exercices pouvant varier selon la classe. Les groupements sont retournés, mais une validation terme à terme se fait systématiquement avec les groupements et les éléments restants. Une variation des modalités des exercices est envisageable : individuel, petit-groupes, demi-classe, classe entière. Il est possible de proposer à certains de préparer l’exercice pour les autres afin qu’ils fassent eux-mêmes les groupements.

<u>2.4 : utiliser le même type de groupement dans les deux collections, la maximalité (passer à plusieurs groupements).</u>

Le passage à des cardinaux entre 11 et 14 va entraîner la nécessité d’**un nouveau groupement**. On peut exposer d’un côté 12 de l’autre 13 objets non organisés. Certains élèves devraient être en mesure de proposer de faire un groupement de 5. En reprenant l’exercice, une partie des élèves devraient échouer, mais il est possible que ceux qui ont réussi ne voient (toujours) pas que c’était vraisemblablement dû au hasard. Il est donc possible de donner d’autres propositions, par exemple, 14, 13, pour tester qu’un seul groupement n’est pas suffisant. L’enseignant peut alors poser à nouveau la question « Comment être sûr ? ». Ce qui va être fait à partir d’une autre proposition[315]. L’exercice est alors (re)proposé aux élèves avec les deux collections réorganisées. Il est attendu que les élèves proposent deux groupements. La plupart des élèves devraient alors réussir. La validation se fait toujours terme à terme, certains vont peut-être comprendre qu’il est inutile de défaire les groupements de 5, mais certains en auront encore besoin.

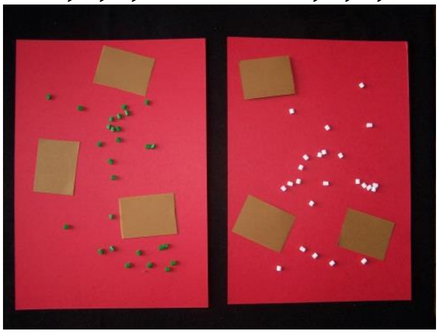
[315] Il est possible ici de charger les élèves de la réorganisation : la moitié de la classe s’occupe d’une des collections, l’autre de l’autre, sans qu’ils puissent communiquer.

L'enseignant peut ici faire un bilan en mettant en relief la connaissance dégagée, la nécessité de faire le plus de groupements possible (maximalité), afin de l'institutionnaliser (vers le savoir).
Par la suite, un mésocontrat de réinvestissement de savoir peut s'instaurer pour des collections de 11 à 14. Il est possible de demander parfois à des élèves de préparer l'organisation pour poser le problème aux autres élèves de la classe. C'est aussi l'occasion d'installer un travail en plus petits groupes. Il est aussi possible de passer rapidement à des collections jusqu'à 24 éléments, toujours avec un écart d'un ou deux éléments. Ceci va alors nécessiter de passer à trois, puis quatre groupements. Le « double » subitizing, des groupements et des objets non groupés, pouvant rester efficace.
Les procédures des élèves peuvent être erronées en particulier pour deux types de raisons déjà évoquées : du fait de ne considérer que les éléments qui restent (non groupés) ou de considérer les groupements et les éléments qui restent comme les mêmes « objets » à compter.

3ème étape : Faire ressortir l'utilité du groupement par comparaison visuelle de collections : **le groupement de dix.**

Deux collections sont présentées :

5, 5, 5, 27 **5, 5, 5,** 24



Il est aussi possible directement de proposer 42 et 39. La solution présentée est simplement pour rappeler que le groupement qui a été choisi est le même, et c'est le groupement par cinq. Ce groupement par cinq peut alors donner l'idée aux élèves de passer ultérieurement à un groupement par dix. Il ne leur permet cependant pas de proposer directement un autre type de groupement.
Une partie de la classe va organiser la première collection, une autre la deuxième. Le résultat attendu est :

5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 2 **5, 5, 5, 5, 5, 5, 5,** 4

La durée d'exposition est telle que toute procédure échoue. L'(in)validation est identique aux précédentes.
Avant la validation, et alors que les collections ne sont plus visibles la question posée aux élèves peut être : « *Comment faire pour que tout le monde réussisse ?* ».
Des élèves penseront peut-être à faire des paquets plus importants, sinon c'est l'enseignant qui propose de faire des groupements plus importants, des groupements de dix (Rupture B).

La classe peut être séparée en deux pour que les élèves proposent leur solution[316]. A noter que dès ce moment, des nouvelles feuilles (par exemple d'une autre couleur ou/et d'un autre format) peuvent être introduites pour indiquer des paquets de dix. Trois cas se présentent :
1er cas : les deux demi-classes font toutes les deux un maximum de paquets de 10, ce qui donne :

10, 10, 10, 10, 2 **10, 10, 10,** 9

Il est alors possible de valider et de formuler dans le bilan le fait que les groupements par dix résolvent le problème quand il y a beaucoup d'objets.
La maximalité peut alors être abordée en proposant ensuite par exemple **10, 10,** 13 et **10, 10, 10,** 2. Cette maximalité peut être institutionnalisée.
2ème cas : les deux demi-classes font toutes les deux des paquets de 10, mais pas de manière maximale. Ce qui permet de questionner la maximalité.
3ème cas : les deux demi-classes font toutes les deux un maximum de paquets de 10, mais utilise aussi un groupement de cinq pour les neuf objets non groupés.

10, 10, 10, 10, 2 **10, 10, 10, 5,** 4

Si les élèves ne le proposent pas, l'enseignant propose de ne faire que des dix et aucun cinq. (Rupture C). Une autre éventualité est de laisser cette possibilité telle quelle. Elle peut être alors rediscutée ultérieurement dans les prochaines étapes. Nous traitons cette question dans l'analyse ultérieure.

Le savoir peut être mis en forme. Il s'agit de considérer comme une solution pertinente au problème de comparaison de deux collections la stratégie consistant à les organiser par groupements de dix, de manière maximale. Les séances suivantes peuvent être menées en installant des mésocontrats de réinvestissement et de reconnaissance de savoir ainsi que d'entraînement. Des contextes différents peuvent être sollicités, ainsi que du matériel : nous pensons en particulier au matériel usuel de base dix (celui que Fuson mentionne dans ses recherches). Les problèmes posés restent essentiellement des comparaisons de cardinal de collections manipulables puis figurées[317], afin de ne pas solliciter la numération parlée en France. Certains peuvent mener en particulier à faire des échanges dix contre un comme

[316] L'enseignant doit veiller à ce moment au fait qu'il n'y ait pas de problèmes de dénombrement jusqu'à dix.
[317] Dans ce cas peuvent se poser des problèmes d'énumération et de matérialisation des groupes constitués.

procédé pour préserver ou indiquer une organisation d'une collection (ce qui fait écho aux feuilles utilisées au tableau pour indiquer des groupements de dix).

b. Les deux dernières étapes : la nécessité d'écrire, le choix de l'écriture

Ici aussi, nous allons identifier des ruptures, D et E, qui correspondent à des choix dans notre proposition, au moment où la solution prévue dans l'itinéraire pour résoudre le problème n'apparaît pas nécessairement comme la seule ou la plus efficace. Nous discutons de ces choix dans le § 3.

4ème étape : **L'utilité d'un système d'écriture pour coder** des collections organisées (pour communiquer, se souvenir) et son **choix**

Dans cette étape, beaucoup de situations sont envisageables. Nous proposons celles qui réinvestissent le contexte précédent.
Le principe général est de mettre les élèves en position de devoir coder les organisations dont l'utilité a été précédemment institutionnalisée : pour communiquer (avec une autre classe par exemple) ou pour se souvenir (préparer les collections à comparer la veille pour le lendemain, le matin pour l'après-midi, élaborer un affichage de référence). D'après les résultats de la première partie de la thèse, et des analyses en classe (les 2ème et 3ème séances de Mme H.), les propositions probables des élèves sont des productions graphiques de type 1 ou 2 ou bien hybrides. Dans le cas où celles-ci ne seraient pas produites, il est toujours possible que l'enseignant en propose (rupture D). Par la suite, il s'agit dans le cadre de la TSD de construire des situations qui permettent d'engager les débats sur leur pertinence à résoudre des problèmes, en outre elles doivent être compréhensibles par tous et non ambigües. Ceci peut être envisagé à nouveau via des comparaisons comme dans la dernière étape, cette fois-ci en utilisant ces productions graphiques. Les questions qui se posent concernent d'une part le choix de productions graphiques (elles doivent être identifiables rapidement pour tous) et d'autre part le choix de celle qui est la plus à même de permettre de réussir la tâche. Une production graphique de type 2 (qui utilise donc des chiffres associés à des ordres, ces derniers étant indiqués par des signes plus ou moins figuratifs) peut ainsi apparaître comme la solution. Une fois mise en forme cette connaissance, il est possible de proposer des séances dans lesquelles sont installés des mésocontrats de réinvestissement de connaissances ou d'entraînement.
Nous ne détaillons pas cette séquence, car il s'agit essentiellement de reprendre des exemples précédents, les collections étant cette fois-ci (déjà) mises en signes au lieu d'être manipulables ou figurées.

5ème étape : L'écriture chiffrée usuelle : la position des chiffres, la nécessité d'un chiffre pour marquer l'absence, le zéro

La dernière étape concerne le passage d'une production graphique de type 2 à l'écriture chiffrée. Nous proposons comme solution d'utiliser la calculatrice. La tâche proposée aux élèves consiste à indiquer sur l'écran le cardinal d'une collection d'entre 61 et 99 objets (mais dans un premier temps ni 70 ni 80). Ils disposent de cette collection (sans en connaître une désignation du cardinal) et par exemple d'un matériel de type base dix. Le but est alors d'utiliser l'écran de la calculatrice[318] pour inscrire un message permettant à un autre groupe de constituer une collection équipotente. La validation matérielle se faisant ensuite par bijection. La solution attendue est l'écriture chiffrée, c'est-à-dire la solution positionnelle. Cependant d'autres solutions peuvent être proposées par les élèves, ce qui peut amener l'enseignant à proposer lui-même cette dernière (Rupture E). Se pose immédiatement le problème d'adopter une convention sur l'ordre des chiffres : le premier qui est tapé sur la

[318] Le signe + n'ayant pas encore été introduit ou rendu non accessible sur la calculatrice.

calculatrice étant relatif aux groupements de dix, le deuxième aux objets non groupés. C'est ainsi que l'écriture chiffrée est institutionnalisée. Le même problème peut être alors repris pour des collections dont le cardinal est un nombre de dizaines entier, sans unité, afin d'introduire la nécessité du zéro, ce qui explique en particulier l'écriture « 10 » de « dix ».

3. Analyse et perspectives de recherche

Ce paragraphe a pour but de dégager des questions qui permettent d'envisager de poursuivre la recherche en testant notre proposition dans des classes.

3.1 Analyse didactique de la proposition

Nous l'analysons par rapport à notre étude précédente et plus particulièrement dans le cadre de la théorie des situations en ce qui concerne les étapes 1 à 3. Les descriptions données précédemment nous permettent d'expliquer et justifier des étapes proposées (§a) et d'en indiquer certaines limites ou écueils (§b). Nous analysons la séquence elle-même et indiquons ensuite des éléments qui permettent de la replacer dans une progression sur l'année de CP (§c).

a. Analyse de la séquence proposée

Afin de faire ressortir comment les résultats et questions de la thèse sont pris en compte, nous allons tout d'abord faire une brève analyse globale, puis ensuite plus ciblée en séparant celle des trois premières étapes et celle des deux dernières. Le but est de faire apparaître des questions qui peuvent être posées dans le cadre de recherches futures.

<u>Cohérence de l'ensemble des étapes avec notre étude de la numération écrite chiffrée : coder des organisations.</u>

Les organisations ne sont pas vues comme issues d'un comptage, comme ce peut être le cas quand est utilisée la numération parlée en France dans une interprétation arithmétique multiplicative, mais comme une nécessité pour réussir la tâche. La différence est que l'élève a pour but d'organiser la collection (et non de compter). La notion d'organisation à l'aide de groupements n'est pas abordée à travers les activités de comptage. Cette organisation restant nécessairement visible, ce qui n'est pas forcément le cas pour tous les comptages[319], il est plus facile alors pour l'enseignant de s'y référer. Ainsi la stratégie favorisée est « organiser/dénombrer pour désigner » indiquée dans le §3.1 du chapitre 4. Nous avons relevé dans les recherches et dans nos analyses en classe la difficulté des élèves à concevoir une « désignation des groupements » comme étant un signifiant du nombre. La stratégie favorisée est susceptible d'aider les enseignants confrontés à ce problème en classe.
L'utilité d'une organisation régulière qui utilise un même type de groupements puis celui-ci de manière maximale est abordé via la résolution de problèmes (ce sont des solutions pour résoudre les problèmes posés), ce qui s'inscrit dans le cadre de la TSD.
Ensuite la question que posent les problèmes à résoudre met en jeu le codage des organisations, leur mise en signes (et non de comprendre un code ou de le déchiffrer). Les différentes possibilités envisagées sont issues du travail de la première partie de la thèse (Chapitre 2 et conclusion) et de l'analyse en classe (Chapitre 8, analyse de la classe de Mme H.). Le dernier passage consiste à choisir parmi les possibles le système d'écriture chiffrée, mettant en relief la différence entre une production graphique de type 2 et ce système : la position des chiffres et la nécessité d'un signe pour marquer l'absence d'unités.

[319] Ceci a été mis en évidence dans les procédés de mise en signes de la première partie de la thèse.

Analyse des trois premières étapes :

- Un milieu susceptible de rétroactions.

Les tâches proposées aux élèves dans ces trois premières étapes consistent à comparer des collections figurées. Nous avons indiqué les trois variables didactiques : le nombre d'objets par collection (et la différence de nombre entre deux collections), la disposition spatiale des objets et enfin le temps d'exposition des collections. Il faut y ajouter des variables de situation : la nature des objets (plus ou moins figuratifs, hétéroclites, plus ou moins « petits », plus ou moins familiers) et l'emplacement des élèves par rapport aux collections présentées (ce qui peut jouer sur le fait qu'ils voient en premier plutôt l'une des collections que l'autre). A noter qu'en ce qui concerne la gestion, les situations proposées peuvent comprendre des résolutions individuelles ou collectives des tâches. En outre elles permettent de poser le même problème à plusieurs reprises en jouant sur des variables didactiques (après par exemple un échec dans le cas où des organisations par groupement n'ont pas été faits). Nous n'allons pas discuter de ces derniers paramètres dans notre analyse didactique mais les indiquons car ils peuvent influer sur le déroulement en classe.
Si nous nous référons à l'ensemble des stratégies et cheminements que nous avons déjà indiqués dans le chapitre 4 pour résoudre des problèmes de comparaison, du fait en particulier de la durée d'exposition, ce sont des stratégies basées sur une part de subitizing ou « double subitizing » qui sont les plus efficaces. Ce sont donc des agencements spatiaux qui sont la clé de la réussite, et c'est cette variable que peuvent modifier les élèves. Le milieu matériel installé permet (à l'enseignante et aux élèves) de valider ou d'invalider les propositions des élèves par association terme à terme. En conséquence, les situations ont un certain potentiel a-didactique, les différents contrats annoncés sont donc potentiellement réalisables. Les solutions amènent à faire des choix qui vont être adoptés au fur et à mesure et vont donc s'intégrer aux paramètres de la situation (aux règles du jeu). Cependant, la situation n'assure pas que ces choix soient toujours perçus comme étant les seuls moyens efficaces pour résoudre la tâche. En particulier trois passages constituent ce que nous avons appelé des ruptures : ruptures de contrat dues à la situation (c'est l'enseignant qui décide), ruptures qui font écho aussi à des considérations épistémologiques (obstacles).

- Des situations qui nécessitent des groupements sans l'emploi de la numération parlée en France.

Les situations prennent en considération le problème que les enseignantes ont rencontré pour que les élèves envisagent d'indiquer des quantités autrement que par une désignation parlée en France (de type « ... paquets de dix et .... boutons » de la séquence Ziglotron). En effet, tout d'abord ce ne sont pas des stratégies de comptage qui sont en jeu pour résoudre le problème, puisqu'il est même impossible de les mener à leur terme. Ensuite, les désignations parlées en France ne servent pas pour la validation. Même si les élèves (voire l'enseignante) les utilisent, dans la validation proposée l'argument en jeu est la bijection « matérielle » (association objet par objet) entre les deux collections. De plus, si la solution au problème proposé consiste tout d'abord à grouper ensemble des éléments (perception spatiale), ensuite la stratégie pour résoudre la tâche est de considérer ces groupements (ainsi que les éléments restant seuls) comme des objets dénombrables (mais de deux types différents, les dizaines et les unités), ce qui est ensuite encouragé dans la validation. Petit à petit il est possible de valider par association terme à terme de groupements que l'on déplace comme un objet. Qui plus est le fait d'utiliser ensuite un matériel qui permet de faire disparaître à la vue la quantité que ces groupements contiennent participe à cette conceptualisation des groupements comme objet dénombrable. Nous avons donc pris en compte la difficulté signalée dans les recherches et que nous avons identifiée dans les séances filmées. Il s'agit de celle consistant à nommer des cardinaux ou/et dénombrer des collections par des signifiants de type « organisation des groupements ». Finalement, la durée et la progressivité de l'apprentissage consacré à

l'utilisation de groupements (sans autres enjeux) est susceptible de favoriser cette conceptualisation[320].
Ainsi, du fait de la nature des stratégies efficaces à la réussite des tâches et des modes de validation, les situations proposées sont susceptibles de limiter les interactions en classe dans lesquelles interviennent les désignations parlées en France des nombres au-delà de dix ainsi que de favoriser l'utilisation des signifiants mettant en jeu des groupements. Nous notons qu'un « effet bouclage » peut intervenir, mais il ne provoquerait pas alors des confusions dans les interprétations utilisées.

Analyse des deux dernières étapes : des tâches qui n'assurent pas que les stratégies visées soient perçues par les élèves comme les plus efficaces
La nature des tâches change à partir de l'étape 4. Il s'agit cette fois-ci de mettre en jeu des codes écrits qui vont permettre soit de communiquer, soit de se souvenir. Nous avons évoqué des situations susceptibles de s'inscrire dans un contexte proche de celui des tâches des trois premières étapes. Une fois les codes proposés par les élèves (ou l'enseignante, la rupture D), il s'agit tout d'abord de comparer des signifiants entre eux. La variable temps nous semble susceptible de mener au premier objectif : choisir un code commun et suffisamment lisible. Le fait de proposer des collections importantes (au-delà de cinquante) ou comportant un nombre d'objets isolés supérieur à quatre permet de favoriser la survenue de productions graphiques de type 2, puisque les objets à considérer ne sont plus dénombrables par une évaluation basée sur une part de subitizing. La dernière étape est abordée via une contrainte matérielle (écrire un message à l'aide de l'écran de la calculatrice) qui bloque les représentations figurées des élèves (par exemple de types « barre », « carré », « rectangle » qui ont été observés dans les séances filmées). Cependant, elle ne bloque pas l'utilisation de symboles accessibles sur la calculatrice (., /, +, -, etc.), même s'ils sont moins nombreux que ceux accessibles sur un ordinateur (les lettres en particulier). Des écritures comme 6/5 (ou 5/6), voire 60+5, 5+60 sont susceptibles d'être produites. Si de surcroît aucune écriture attendue n'est produite par les élèves, 65 dans notre exemple, le professeur peut être amené à changer de contrat (rupture E), les rétroactions du milieu matériel et les connaissances anciennes des élèves n'étant pas nécessairement suffisantes pour que la connaissance visée apparaisse comme solution du problème.

b. Les écueils, les limites

L'analyse précédente a mis en exergue en quoi notre proposition prend en compte les résultats précédents de la thèse. Elle en indique aussi des limites.
Il est impossible de refaire faire aux élèves le chemin historique, car même en privilégiant un point de vue épistémologique mathématique (et donc moins les circonstances historiques) l'écriture chiffrée n'est réellement utile que pour des problèmes qui ne sont pas au programme de CP (les « grands » nombres surtout dans les problèmes de la structure multiplicative, les techniques de multiplication et de division en particulier). Ceci explique en partie certaines limites dans les choix opérés. Nous allons les indiquer plus précisément en considérant les cinq ruptures signalées. Rappelons que nous avons employé le mot rupture pour évoquer à la fois l'épistémologie des savoirs en jeu et les contrats didactiques, c'est ce que nous développons dans les lignes qui suivent.

[320] Les séances sont conçues pour être courtes, afin de prendre en compte les capacités de concentration en classe d'élèves de cet âge, mais nombreuses, et leur fréquence peut être quotidienne. Le jeu peut être ritualisé.

Rupture A : dans les étapes 1.3, 1.4 et 2.2, les constellations 5 du dé sont proposées en partie à l'initiative de l'enseignant comme solution au problème de cardinaux entre six et neuf.
L'alternative dans l'étape 1.3 est de laisser les élèves faire ces propositions, par exemple en les laissant eux-mêmes manipuler les collections[321]. Ceci n'assure cependant pas qu'une solution puisse être trouvée. En effet, il est possible que les élèves proposent des solutions qui conviennent pour les nombres en jeu (par exemple disposer les objets de chaque collection en deux lignes verticales ou encore faire deux paquets, afin de procéder à un calcul mental) mais qui devront être abandonnées plus tard. La situation proposée ne permet pas ici de bloquer ces propositions. Cependant une telle alternative a l'avantage de poser explicitement le problème de comparer les stratégies à utiliser. Elle consiste donc finalement à laisser les élèves faire des propositions, les tester, puis si la proposition attendue (groupement) ne survient pas, de la fournir. Le deuxième aspect de cette première rupture est le choix de cinq. Celui-ci est en effet adapté à la tâche proposée car des recherches antérieures ont montré que le subitizing est une stratégie efficace pour dénombrer jusqu'à quatre objets : au-delà il faut en utiliser une autre. Comme nous visons la stratégie de groupement, le fait que les connaissances sur les constellations du dé soient disponibles fournit ainsi une solution qui amorce un passage vers la notion de groupement (poursuivi tout le long de la séance). Cette solution est susceptible d'apparaître aux élèves comme la plus efficace. Toute autre proposition de groupement supérieur ne permet pas aux unités restantes (non groupées) d'être dénombrées par une évaluation basée sur une part de subitizing alors que pour un groupement inférieur (deux, trois, quatre) le champ numérique dans lequel il est efficace est plus restreint[322]. Nous avons mis en avant ce choix, qui est donc discutable, pour ne pas étendre en longueur le travail sur des groupements autre que dix. En outre, les arguments utilisés dans les alternatives ne sont pas ceux qui vont intervenir pour le passage aux groupements de dix, ce qui nous amène à considérer la rupture B de l'étape 3.1.

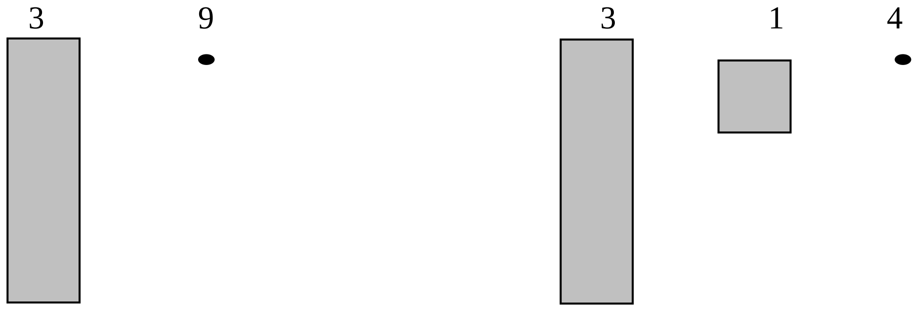
Rupture B : le choix de l'enseignant de groupements de dix comme solution au problème posé par des collections de cardinal supérieur à vingt-quatre.
Le problème des collections importantes (au-delà de quatre groupements de cinq et quatre objets non groupés) est posé dans l'étape 3 par la comparaison de collections non organisées telles que **5, 5, 5,** 27 et **5, 5, 5,** 24. En accord avec la TSD, nous avons privilégié un saut informationnel qui incite les élèves à faire des groupements, et nous n'avons pas décidé de proposer aux élèves par exemple directement **5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5,** 2 et **5, 5, 5, 5, 5, 5,** 4. Cependant, il est aussi possible de proposer directement 42 et 39 objets non organisés. Ceci laisse théoriquement la possibilité aux élèves de faire d'autres groupements que de cardinal cinq, et de revenir ainsi à des questions qui ont été déjà traitées. Il nous semble cependant que si les élèves suivent la règle du jeu, ils vont constituer des groupements de cinq, puisqu'ils se sont mis d'accord. Ainsi il n'est pas nécessaire didactiquement de proposer **5, 5, 5,** 27 et **5, 5, 5,** 24.
Des stratégies basées sur des éléments de (double) subitizing ne sont plus opérantes. Une solution consiste à changer de groupements de base en utilisant un plus grand.
Le fait d'imposer ensuite dix est une nécessité épistémologique et il nous semble donc nécessaire de le faire apparaître comme un choix conventionnel.

[321] Ceci permet en outre de leur indiquer que c'est sur cette variable qu'ils peuvent jouer. Dans le cas d'une indication verbale, il peut être plus difficile de formuler cette nouvelle règle sans fournir la solution.
[322] Par exemple pour quatre, le seuil d'efficacité est atteint pour des collections organisées en cinq groupes de quatre, puisqu'elles ne sont plus perceptibles par subitizing. A noter que le choix d'un même type de groupement pour chaque collection est discutable. (**5**, 4) et (**6**, 3) permet par exemple un calcul mental. La deuxième étape peut s'effectuer alors selon une autre modalité. Au lieu que ce soit l'enseignant qui propose les organisations, deux groupes distincts d'élèves peuvent s'en occuper. Cela peut les amener à être obligé de se mettre d'accord sur le type de groupement à choisir. Ceci peut être placé avant l'étape 1.5.

Par contre, dans la situation qui est présentée, un autre choix que l'augmentation du cardinal du groupement peut être envisagé pour résoudre le problème des « grands » nombres. Il est possible de le résoudre par l'organisation (***5, 5, 5, 5, 5*), 5, 5, 5,** 2 et (***5, 5, 5, 5, 5*), 5,** 4, c'est-à-dire en utilisant un groupement de groupements. Ainsi, la solution retenue ne permet pas d'aborder une caractéristique importante du principe de base qui est sous-jacent à notre numération écrite chiffrée : le groupement de groupements, c'est-à-dire le passage à un ordre supérieur. Cependant, ce passage est actuellement peu envisageable au CP en base dix, puisque les nombres étudiés sont inférieurs à cent. Nous avons privilégié un accès plus rapide aux groupements de dix puis à l'écriture chiffrée, sachant que ce point (groupement de groupements) est susceptible d'être abordé en fin d'année ou dans la classe supérieure[323]. Le fait d'imposer dix, permet effectivement de résoudre les problèmes posés d'une manière différente que le groupement de groupements. Notons qu'*in fine,* dans le problème de comparaison proposé aux élèves, aucune de ces solutions ne peut convenir pour les grands nombres. D'un côté il va falloir multiplier le nombre de subitizing, de l'autre il va falloir non seulement à chaque fois changer de type de groupements, mais en plus les objets non groupés vont demander un dénombrement. Les deux augmentent le temps nécessaire à la réussite de la comparaison. Cependant, une autre solution est encore possible, qui peut d'une certaine manière pallier jusqu'à un certain point les inconvénients des deux premières, c'est une organisation de type (**10**, **10**, **10**, **5**, 4) au lieu de (**10**, **10**, **10**, 9), ce qui nous amène à une troisième rupture, la rupture C.

<u>Rupture C</u> : après avoir utilisé de manière maximale les groupements de dix, imposer de ne pas grouper les éléments restants (avec un groupement de cinq).
L'étape 3 aborde le problème de comparer des collections organisées à l'aide de groupements de dix et dont les éléments non groupés ne sont plus dénombrables par une évaluation basée sur une part de subitizing. Le groupement de dix est introduit. Dans le cas où il reste plus de cinq objets non groupés, le groupement de cinq est utilisable. Nous avons proposé que l'enseignant choisisse de retenir la solution consistant à utiliser le maximum de « dix » et aucun autre groupement. La possibilité d'utiliser cinq le cas échéant pour les éléments non groupés, par exemple (**10**, **10**, **10**, **5**, 4) au lieu de (**10**, **10**, **10**, 9), n'a pas été retenue. La situation mise en place ne nous semble pas propice à justifier que l'organisation (**10**, **10**, **10**, 9) soit la plus efficace. Bien au contraire, celle-ci demande un dénombrement qui nous semble plus coûteux en temps qu'un subitizing sur trois types d'« objets » différents (les groupements de dix, de cinq et les unités). A noter qu'en outre, des procédures de subitizing échouent aussi. Ceci explique la survenue de cette rupture. Des situations alternatives sont possibles. Par exemple, il peut s'agir de ne pas trancher dans l'étape 3, en mettant en relief dans les deux possibilités, (**10**, **10**, **10**, **5**, 4) et (**10**, **10**, **10**, 9), les avantages et les inconvénients. Ces organisations peuvent aussi être utilisées pour poser le problème du passage à l'écrit de l'étape 4. Des productions graphiques de type 2 comportant des groupements de dix et de cinq peuvent être questionnées. Par exemple, entrent en « concurrence » d'une part une production comportant un rectangle et un point, aux cotés desquels sont écrits respectivement 3, 9 et d'autre part une production comportant un rectangle, un carré et un point, aux cotés desquels sont écrits respectivement 3, 1, 4.

[323] En effet, dans les programmes actuels (2008), il est recommandé d'étudier en CP les nombres inférieurs à 100, mais le programme du cycle 2 (qui comprend le CP et l'année qui suit, le CE1) laisse la possibilité d'aborder les nombres supérieurs à 100 dès le CP. A noter qu'un tel passage était envisagé à l'époque des « maths modernes » puisque des bases plus petites étaient étudiées.



Cette dernière production peut être ainsi considérée comme moins efficace, car elle comporte la présence ou non d'un groupement de cinq (signifiée dans notre exemple par le 1 de 3, 1, 4). Cette information peut apparaître comme non nécessaire. Ceci nous amène à discuter des deux ruptures dans les deux dernières étapes.

Rupture D : proposer des productions graphiques ou des codes écrits pour transcrire les organisations.
La rupture D, dans la $4^{\text{ème}}$ étape, ne va pas nécessairement survenir. Elle vient du fait de la nature de la connaissance produite. Rien n'assure en effet que les élèves parviennent aux productions attendues (en particulier celles de type 2). Cependant si nous considérons les productions des élèves de la classe de Mme H dans la situation étudiée au chapitre précédent, la situation que nous proposons permet d'envisager leur survenue, en particulier du fait que les groupements sont utilisés pour résoudre les problèmes, de manière progressive et sans faire appel à la numération parlée en France (interprétation ordinale ou/et arithmétique additive).

Rupture E : le passage aux écritures chiffrées à partir des productions graphiques de type 2.
Du fait de l'emploi de la calculatrice, la tâche que nous avons indiquée ne peut pas être réalisée à l'aide de codes utilisant des signes figuratifs pour les ordres et incite à utiliser uniquement les chiffres. Cependant d'autres signes sont accessibles, ce qui peut mener par exemple à des solutions comme 3/7, (7 ; 3) ou 30+7. Dans la situation dont avons ébauché la description, le milieu n'assure pas que la production visée soit considérée comme (la meilleure) solution, ni même qu'elle advienne. En outre, ce milieu ne permet pas de questionner le choix de l'alignement comme mode de disposition des écritures chiffrées sur une feuille. Des situations alternatives peuvent être envisagées : ne laisser d'accessible que les chiffres sur la calculatrice, voire donner à comparer différents systèmes d'écriture. Il reste que l'étude de la première partie de la thèse nous indique que le système positionnel des écritures chiffrées ne peut être considéré comme réellement le plus performant que pour résoudre des problèmes qui ne sont pas au programme de CP, tels que ceux afférents à l'écriture des grands nombres ou/et à des techniques opératoires pour la multiplication (et plus encore la division). La dernière rupture, la rupture E de la $5^{\text{ème}}$ étape, est associée à des obstacles épistémologiques. Ceci contraint la recherche de propositions permettant de faire apparaître l'écriture chiffrée comme la meilleure solution pour résoudre un problème afin d'aborder toutes les propriétés propres à celle-ci que nous avons dégagées dans l'interprétation de référence

D’autres écueils non tous liés directement à des considérations épistémologiques.

- Le cas particulier de dix

Les groupements de dix sont nécessaires. Il nous semble difficile de ne pas indiquer leur cardinal par le mot « dix ». Ultérieurement cependant le mot dizaine peut être employé pour distinguer le nombre dix du groupement comportant dix objets. La situation que nous avons proposée permet de faire apparaître ces groupements de dix comme des outils pour résoudre des problèmes, outils qui sont matérialisés, donnant ainsi du sens au mot dizaine. Il n’en reste pas moins que dans ces explication il peut arriver que l’enseignant écrive « 10 », c’est un écueil qui nous semble difficile à éviter. Par ailleurs, dans les situations proposées, les désignations parlées utilisées sont, un, deux, trois,..., neuf, mais aussi dix. Ceci peut faire apparaître ce dernier nombre au même niveau que ses prédécesseurs, alors que ce n’est pas le cas dans le système de numération des écritures chiffrées. La numération parlée en France (dans son interprétation ordinale) est utilisée *a priori* uniquement comme outil pour constituer ou vérifier des groupements de dix. Ainsi, une difficulté supplémentaire peut apparaître quand est abordée l’écriture chiffrée « 10 », plus encore que pour les écritures des nombres déjà connues des élèves. Un autre choix de compteur est théoriquement envisageable (voir le deuxième chapitre de la thèse). Celui pour lequel nous avons opté vient du fait que la comptine numérique est disponible aux élèves. Un autre compteur demande un apprentissage spécifique qui peut générer des difficultés potentielles pour la transposition didactique de la proposition auprès des enseignants.

- Un milieu matériel complexe à gérer

L’importance de la disposition des objets des collections présentées et de la durée d’exposition joue de manière importante sur les stratégies mobilisables et leur efficacité. Si, dès que les collections sont suffisamment importantes (y compris les groupements quand ils sont constitués), les stratégies de comptage semble pouvoir être bloquées, il est possible cependant que des stratégies de calcul puissent apparaître au lieu des évaluations basées sur le subitizing (simple ou double) envisagées. Les élèves n’ont cependant pas des habiletés de calcul développées, ce qui relativise l’émergence de cette possibilité. Il n’en reste pas moins que la durée d’exposition peut être un paramètre difficile à gérer, en particulier dans le simple et double subitizing puis dans la comparaison de productions graphiques. Le fait qu’une règle du jeu consiste à rendre collective la réussite de la tâche, peut permettre de procurer une certaine « marge d’erreur » à l’enseignante en ce qui concerne cette durée. Les conditions matérielles sont des paramètres avec lesquels il faut aussi compter (disposition des objets, forme, taille, couleur, disposition des élèves par rapport aux collections, etc.), ce qui peut rendre complexe l’installation du milieu.

- Le travail des élèves sans l’enseignant : un milieu qui évolue

Nous envisageons aussi des situations où les élèves sont seuls, en particulier pour la validation. Certains peuvent alors l’effectuer par comptage. La situation installée dans ces séances ou l’enseignant n’est pas là pour imposer une validation par bijection n’assure pas que la numération parlée en France ne soit pas utilisée. Ceci pose le problème de rendre disponibles (ou tout au moins mobilisables) pour les élèves le recours à des validations terme à terme, même quand ils sont seuls. Est-ce que les séances collectives de la séquence proposée sont suffisantes ?

- De la comparaison à une indication de la différence

La bijection utilisée dans la validation matérielle peut mener les élèves et/ou le professeur à transformer le problème de comparaison en un problème de la structure additive. En effet, la question posée peut devenir : « combien il y en a en plus ou en moins ? ».

- Les expressions mobilisables par les élèves, les formes prises par les mises en forme des connaissances

« Combien », « plus », « moins », « autant », « égal », « dizaine », « unité », etc. sont des mots qui sont susceptibles d'être utilisés par les élèves et/ou l'enseignant. Leur usage peut entraîner des incompréhensions à la fois dans la dévolution, dans la validation, mais aussi dans la phase de bouclage (débats intellectuels). Se pose en particulier le problème de la mise en forme des connaissances élaborées au fur et à mesure de manière verbale. Nous avons indiqué qu'une possibilité consistait en des affichages, mais, quelle que soit la solution retenue, se pose la question des signifiants utilisés.

Pour éviter ces écueils, il est possible de « préparer » le terrain, ce qui est en particulier l'objet du paragraphe suivant

c. La position de la séquence dans une progression

D'après les éléments théoriques retenus pour appréhender dans notre thèse l'enseignement, l'apprentissage et la conceptualisation, il est nécessaire de considérer les apprentissages sur un temps long et de connecter dans l'enseignement différents aspects des notions abordées (en référence à la TCC) afin de rendre *in fine* disponibles les connaissances. Notre ambition ici n'est pas d'aborder les détails d'une progression sur l'année, mais de resituer la séquence principale indiquée auparavant, en indiquant les grandes étapes que l'itinéraire cognitif d'enseignement que nous proposons impose. Nous allons proposer une ossature de la progression autour de la séquence précédente, considérée donc comme la séquence pivot, afin de faire ressortir les points incontournables inhérents à l'itinéraire, ossature qui va être le support à poser des questions pour de futures recherches dans le paragraphe 3 de ce chapitre.

1. Le renforcement de connaissances afin de les rendre mobilisables dans la séquence présentée ci-avant : le champ numérique est en particulier celui des nombres inférieurs à dix
   Connaissances sur l'énumération.
   Concept de collection.
   Connaissances relatives au dénombrement à l'aide de la comptine numérique.
   Les constellations du dé : les élèves doivent être capables de les nommer, de comparer des quantités figurées par des constellations du dé sans avoir recours à un dénombrement par comptage, tout particulièrement pour les constellations 5 et 6.
   Utilisation de la validation par comparaison terme à terme dans différents problèmes.
   Abord de problèmes de la structure additive
   Approche du calcul mental
2. Construction du code (écriture chiffrée) qui désigne le cardinal d'une collection
   C'est la séquence décrite précédemment.
3. Consolidation : coder et décoder pour résoudre des problèmes
   Variations des problèmes à résoudre
   Changement de contextes
4. La numération parlée en France
   Problème de la structure additive (calcul mental)
   Variations des problèmes à résoudre
   Changement de contextes
5. Le lien avec la numération parlée en France
   L'addition posée versus le calcul mental
   Les nombres au-delà de cent.

Les éléments à insérer dans la progression :

- les désignations orales jusqu'à trente
- les désignations chiffrées jusqu'à 30 : entretien des connaissances de la maternelle, sans enseignement systématique avant la séquence concernant leur émergence comme code d'organisation de collection
- lien écriture chiffrée/désignations orales au-delà de dix,
- les désignations orales au-delà de trente,
- écrire avec des mots les désignations orales,
- les écritures chiffrées pour se repérer, divisées en deux grandes catégories :
  - les écritures gardant une trace de la structure d'ordre sur les cardinaux (inférieur à, supérieur à, égal à) :
    - l'ordre des nombres qui servent dans les mesures (durée, longueur), qui garde encore une trace des unités, l'unité ayant été fixée[324],
    - l'ordre des nombres qui indiquent la succession temporelle d'événements (il a le numéro « 1 » car il est arrivé en 1^er^), ou un rangement spatial (numéro des rues -l'indication de l'ordre n'est pas toujours fiable-, numéro des pages).
  - les écritures chiffrées qui servent à donner des renseignements : il n'y a plus ni de relation d'ordre ou d'indication de quantité (numéro de sécu, numéro de maillot de joueurs, numéro de code barre, etc.).

Avant la séquence pivot (placée en 3), du fait de l'itinéraire cognitif lui-même, il est nécessaire de rendre disponibles des connaissances techniques afin d'anticiper certaines difficultés : énumération, comptine, suite des écritures chiffrées jusqu'à 9, validation terme à terme, résolution de problèmes relatifs aux nombres mettant en jeu des groupements. Ceci va participer à la conceptualisation du nombre afin de ne pas l'aborder uniquement via la numération parlée en France. Le champ numérique est tout d'abord surtout celui des nombres inférieurs à dix et ne concerne pas les nombres au delà de trente : en particulier il est important que les apprentissages ne concernent pas la comptine numérique au-delà de trente, et que seules les écritures chiffrées des nombres inférieurs à neuf soient réellement en jeu[325]. L'objectif est que les problèmes abordés, en particulier les calculs mentaux dans la structure additive, participent à la conceptualisation du nombre sans que ce dernier soit perçu uniquement par les désignations parlées en France.
Après la séquence pivot, les éléments que nous mettons en avant sont à considérer moins comme des étapes qui se succèdent dans cet ordre que comme des nécessités de l'itinéraire. Cependant une étape importante est identifiée, c'est celle dans laquelle les problèmes amènent les élèves à comparer la pertinence des stratégies utilisant les écritures chiffrées et celles utilisant la numération parlée en France. Pour ce faire, les élèves doivent aussi acquérir des habiletés procédurales qui permettent de mobiliser des connaissances dont ils sont sûrs.

La progression que nous proposons ne donne que des axes et permet de présenter certains problèmes. En outre, elle peut servir de base pour en élaborer une de manière plus concrète en vue d'une expérimentation. En effet, seule une recherche basée sur une étude expérimentale en classe nous semble susceptible de répondre aux questions qui se posent à ce stade de la recherche sur le choix et l'agencement des situations à proposer aux élèves en classe.

---

[324] Le mot « unité » est polysémique : chiffre unité dans la numération, unité de mesure (en particulier quand on compte le nombre de dizaines, la dizaine devient l'unité de mesure), élément d'un ensemble quelconque… Ainsi le mot « unité » peut désigner à la fois ce qui reste quand on a organisé une collection en centaines, dizaines, etc. (ce qui va correspondre au chiffre unité de la numération chiffrée) et chacun des éléments de la même collection.
[325] Il n'est pas possible d'éviter que celles-ci soient utilisées dans la date ou autres contextes culturels.

3.2 Des questions pour la recherche

La proposition a un double statut. Elle permet de mettre en exergue plusieurs questions qui alimentent la recherche et a aussi un intérêt méthodologique car elle peut constituer un support « concret » pour une expérience en classe. Après avoir fait un bilan de la proposition (§a), nous proposons deux niveaux de questions qui sont interdépendants : des questions liées à la proposition (§b) et des questions liées à l'itinéraire (§c). Nous allons en indiquer les aspects qui nous semblent les plus représentatifs, sans prétendre épuiser le sujet. Une autre question de recherche peut être explorée, c'est celle relative à l'utilisation de l'effet bouclage (une réduction de marges de manœuvre) comme levier pour construire des situations d'apprentissage robustes. Nous ne développons pas cette possibilité.

a. Bilan de l'analyse

L'analyse précédente met en relief le fait que notre proposition s'inscrit dans l'itinéraire cognitif de type 3. Elle indique une possibilité de réalisation en classe, ce qui constitue déjà une réponse à la question de savoir si cet itinéraire est « réellement » envisageable en classe, question légitime du fait de ne pas le voir apparaître clairement dans les manuels. En outre ce choix est cohérent avec les résultats de la première partie de thèse concernant le lien entre l'écriture chiffrée et l'organisation d'une collection à travers les procédés concrets de mise en signes de son cardinal. En effet, nous avons dégagé le fait que, pour l'interprétation de référence de l'écriture chiffrée, l'organisation était un but à atteindre avant de coder, alors que pour les interprétations de la numération parlée en France[326], l'organisation était une conséquence des structures linguistiques au moment de considérer les procédés concrets de mise en signes. En particulier, dans ces derniers, l'organisation n'est pas obligatoirement encore visible à la fin du procédé, et, si elle l'est, les raisons sont liées à d'autres nécessités, mémorielles en particulier. Ces considérations ont été prises en compte dans la distinction des différentes stratégies de dénombrement que nous avons indiquées dans le chapitre 4, paragraphe 3. En outre ce choix est cohérent avec notre analyse en classe et celle des recherches. En favorisant les stratégies « organiser/configurer pour désigner » il permet théoriquement d'éviter de faire apparaître des expressions de type « désignation des groupements » comme issues d'un comptage. Le nombre est en jeu, mais il n'est pas associé au signifiant constitué du dernier mot obtenu après un comptage ou un calcul. Qui plus est les désignations parlées en France ne sont utiles que pour constituer des groupements. Ceci convoque donc les conceptions anciennes des élèves sur le nombre, les mettant dans un contexte numérique, tout comme le fait le problème de comparaison de cardinal de collection. Cependant, la situation proposée nous semble comporter des potentialités qui font que les interprétations anciennes peuvent moins interférer avec celle qui est visée, à l'inverse de ce qui a été analysé dans les séances filmées en classe. En effet, d'une manière générale nous avons relevé dans l'analyse des séances en classe l'emploi de différents signifiants pour des explications et aides, dans différentes phases, selon différents contrats. L'analyse que nous avons faite de la proposition indique que ceux-ci sont susceptibles de moins intervenir. Ceci est dû au type de problème posé (qui ne peut être résolu par comptage), au mode de validation proposé (qui ne demande pas de signifiant écrit ou oral du nombre, tout en mettant en jeu la cardinalité), mais aussi au fait que les écritures chiffrées n'apparaissent que tardivement dans la progression.

Finalement, différents aspects sont questionnés dans l'interprétation de référence, ce que nous avions analysé à la fin de l'analyse des manuels comme plus problématique dans les itinéraires 1 et 2. A la fois au niveau de la première partie de l'interprétant, groupements,

[326] Comme vraisemblablement dans les systèmes parlés d'autres pays, y compris en Asie, ce qui est d'ailleurs un élément qui distingue une interprétation multiplicative et l'interprétation de référence.

régularités et maximalités, que de la deuxième partie, la mise en signes, discussion sur l'utilisation des ordres et les coefficients, choix de l'ordre et nécessité du zéro.
Nous avons aussi mis en évidence des écueils qui vont alimenter certaines de nos questions.

b. Les questions relatives à la proposition

Si une analyse théorique permet de justifier la proposition, son expérimentation doit permettre de répondre à certaines questions. Est-ce que le milieu et les contrats envisagés permettent que les situations restent problématiques et que les solutions envisagées dans l'analyse *a priori* soient celles qui interviennent en classe ?
De manière plus précise, du côté des élèves : Quelles vont être leurs propositions ? Quels facteurs les influencent-ils ? Le problème se pose en particulier au moment des ruptures, mais aussi dès le début. Ainsi, par exemple, quatre, est-ce bien la « limite » du subitizing[327] ? Qu'en est-il du « double » subitizing[328] ?
Ensuite se posent des questions relatives aux temps dévolus aux « entraînements » et à leur place. Pour qui ? Selon quelles modalités, individuelles, collectives, en groupes ? Selon quelle variété des problèmes ?
En outre, dans les déroulements, quels vont être les signifiants utilisés ? Ceux dont nous avons voulu « retarder » l'utilisation, comme les désignations de la numération parlée en France, vont-ils intervenir ? A quels moments, pour quelles raisons ? Quels en sont les conséquences ? Comment vont intervenir ceux qui sont susceptibles d'être en jeu, des désignations orales des groupements (OG) puis des productions graphiques (GraC) ? Comment organiser la mise en forme des connaissances et de manière plus général le processus d'institutionnalisation ?
Les alternatives et ruptures sont à questionner : en quoi sont-elles nécessaires ? Qu'y perd-on et qu'y gagne-t-on au niveau de la situation, au niveau de l'itinéraire, au niveau des facilités de gestion ? Les deux dernières étapes génèrent des questions spécifiques, par exemple sur l'emploi de la calculatrice. Quelle nécessité, quelles alternatives étudier ?
Finalement des questions se posent sur la progression sur l'année et sa programmation en ce qui concerne la nature des liens entre la numération écrite chiffrée et la numération parlée en France, leur articulation dans le temps. Des contraintes proviennent de l'itinéraire choisi, mais ceci laisse des possibilités. Quelles décontextualisations ? Quelle variété des problèmes à aborder ?

c. Les questions générales relatives à l'itinéraire

<u>Les questions « théoriques »</u> : certaines peuvent s'étudier au niveau de la séquence, d'autres au niveau de la progression sur l'année voire sur un temps plus long.

- Les questions d'essence épistémologique :
  Comment aborder le passage au groupement de groupements ? Est-il nécessaire de considérer les nombres au-delà de cent au CP ? Quand ? Est-ce dès l'introduction de l'écriture chiffrée dans son aspect positionnel ?
  L'interprétation de la numération écrite chiffrée que nous avons définie dans la première partie de la thèse distingue deux parties : les principes mathématiques et la mise en signes de ceux-ci. La proposition que nous avons faite articule ces deux parties de manière successive dans le temps. Est-ce la seule possibilité ? De manière générale se pose la question de l'articulation dans les apprentissages des différents aspects de l'interprétation de référence. Par exemple, le choix que nous avons fait est de construire le code et non pas de « retrouver » sa signification, de le décrypter

[327] Il est possible de s'en assurer auparavant en le prévoyant dans une programmation adaptée. Une alternative envisageable dans la séquence proposée est de considérer des constellations du dé de quatre au lieu de cinq.
[328] Nous n'avons pas trouvé de recherches s'y consacrant.

comme le ferait un archéologue. Les deux premières parties de la thèse légitiment ce choix, mais c'est aussi le cadre théorique de la TSD qui nous y a amené. Nous avons privilégié les situations installant un milieu matériel ayant certaines possibilités de rétroactions et ne proposant pas uniquement un problème intellectuel. Ceci amène à poser des questions de manière différente. Est-il envisageable de combiner les deux approches. ? Par exemple, une fois le code établi, le (re)questionner en le mettant en perspective avec d'autres systèmes de numération pour mettre en exergue certaines particularités du nôtre ?

- Les questions relatives à la place et au rôle des signifiants :
  Quels « relais » sont envisageables, nécessaires, utiles, « nuisibles » ? (intervention d'autres signifiants, liens entre les signifiants écrits et oraux).
  Est-ce qu'au niveau de l'itinéraire, l'écriture chiffrée peut servir de moteur pour rendre disponible la numération parlée en France dans une interprétation multiplicative ? Ou est-ce qu'il faut envisager cette évolution à part, puis étudier les liens entre les deux systèmes de numération ?
  De manière plus générale, comment faire le lien entre la numération parlée en France et la numération écrite chiffrée ? En particulier, une autre façon de percevoir notre proposition, et une autre manière de la justifier d'un point de vue didactique, est de se référer aux jeux de cadre de Douady (1987). Peut-elle être considérée comme la mise en place d'un cadre nouveau à la numération écrite chiffrée, cadre qui pourra jouer de manière dialectique avec celui qui a conduit à l'interpréter comme la forme écrite de la numération parlée en France ? Est-il possible d'envisager un jeu de cadres ?

<u>Les questions « pratiques »</u>

- La réalisation de l'itinéraire au quotidien et sur l'année :
  Certains choix et alternatives de la proposition sont issus de compromis entre les potentialités de la situation (la répartition de la responsabilité du savoir en jeu, le milieu) et des contraintes relatives à l'itinéraire choisi, en particulier d'ordre épistémologique, afin en particulier de faciliter *a priori* la gestion des déroulements par l'enseignant. En outre l'étude faite en classe a montré le rôle joué par l'itinéraire dans les déroulements. Une question qui se pose alors pour un itinéraire cognitif de type 3 est la suivante : Quelles sont les tensions entre les nécessités de l'itinéraire, les choix didactiques et les contraintes propres à la classe ?
- L'existence et l'élaboration d'autres propositions pour réaliser cet itinéraire :
  Ce point est un prolongement de la question précédente. Nous n'avons pas réussi à élaborer de situation « fondamentale » au sens de la TSD qui permettrait d'embrasser tous les propriétés relatives à l'interprétation de la numération écrite chiffrée. Existe-t-il des situations qui permettent de pallier tous les écueils inhérents au savoir en jeu, aux curricula des élèves et à l'enseignement comme gestion d'un milieu dynamique ? Existe-il en particulier des propositions qui permettent de pallier les quatre « ruptures » mises en exergue ?

d. Le problème de l'évaluation de l'itinéraire et de la proposition

Certaines questions liées à la proposition peuvent permettre de répondre à celles concernant les itinéraires de manière globale. Réciproquement des questions liées aux itinéraires sont nécessairement en jeu dans la proposition et ainsi les éléments de réponse à ces premières peuvent procurer des solutions à des problèmes concernant ces dernières. C'est d'une certaine façon ce que notre travail de thèse a contribué à faire.

Le problème se pose de « comparer » l'itinéraire 3 par rapport aux autres itinéraires. La discussion théorique que nous avons menée peut être prolongée mais aussi étayée par des expériences en classe.
Ainsi, les deux premiers itinéraires utilisent des désignations orales des cardinaux mobilisant les connaissances (anciennes) des élèves sur le nombre. Dans un itinéraire de type 3, se pose la question de pouvoir mobiliser ces connaissances alors que ne sont pas convoquées des désignations parlées au-delà de dix. Est-ce que le niveau de conceptualisation du nombre est « suffisant » pour envisager d'introduire les aspects positionnels des chiffres utilisant *a minima* la numération parlée en France ?
Si les élèves ont des connaissances sur les écritures chiffrées, ils peuvent alors les utiliser pour faire des calculs mentaux consistant à employer mentalement des algorithmes concernant des opérations posées. Dans le chapitre 5 concernant les recherches, nous avons vu que résoudre des problèmes de calcul mental à l'aide des repérants/appuis de la numération parlée en France permet de développer des connaissances mathématiques propres : à la fois sur la structuration de l'ensemble des nombres que permettent ces appuis, mais aussi de type algébrique, comme par exemple l'associativité, la commutativité et la distributivité. Le fait de rendre les connaissances relatives à l'écriture chiffrée disponibles plus tôt, peut-il être un obstacle à la disponibilité de celles qui peuvent intervenir par ailleurs dans le calcul mental via la numération parlée ?
Mais se pose aussi la question d'évaluer les apprentissages via l'itinéraire proposé.
Quelle est le niveau de mise en fonctionnement des connaissances produites ? Technique, mobilisable ou disponible ? L'évaluation ne peut qu'être relative à ce qui est visé, ce qui est « gagné » ou « perdu » par rapport à d'autres propositions, que ce soit dans le même itinéraire ou dans d'autres. Mais nous devons aussi considérer les potentialités de transposition dans un grand nombre de classes, la « robustesse » des propositions. Il ne s'agit pas d'en élaborer qui ne sont qu'efficaces dans une classe laboratoire, constituée de « bons » élèves, avec des enseignants formés spécifiquement pendant des années et pilotées par un chercheur ou un formateur.

Signalons pour finir que si notre proposition permet de poser des questions, elle limite aussi d'une certaine manière le champ de questionnement, puisqu'il provient de cette proposition particulière. D'autres interrogations peuvent ne pas nous être apparues, certaines sont susceptibles de surgir au moment d'entreprendre les recherches futures.

Conclusion de la thèse

La question initiale est celle de la compréhension de déroulements en classe de CP relativement à l'enseignement de la numération écrite chiffrée dans ses aspects positionnels. Ceci interroge la place des désignations parlées en France dans l'enseignement de la numération décimale de position. Comment en faire une aide et non un obstacle ? Nous avons choisi de partir d'une étude de la notion d'un point de vue sémiotique et mathématique, et plus précisément d'un point de vue linguistique en ce qui concerne la numération parlée, considérée comme un langage utilisé par les élèves et l'enseignant. Notre approche a consisté à utiliser successivement cette étude à différents niveaux non indépendants, des concepts aux apprentissages puis à l'enseignement. L'enseignement a été lui-même abordé à différents niveaux de transposition du savoir : les recherches, les manuels puis les déroulements en classe. Reconsidérer l'enseignement de la numération au CP par cette approche était susceptible de permettre de faire de nouvelles propositions pour l'enseignement afin de poursuivre la recherche.
Nous allons dans cette conclusion mettre en relief les questions et résultats qui se sont articulés au fur et à mesure. Nous discuterons ensuite des limites de l'approche adoptée avant d'indiquer des suites envisagées à ce travail.

De la non-congruence : deux numérations et différentes interprétations

Deux systèmes sémiotiques pour désigner les nombres interviennent au CP : la numération écrite chiffrée et la numération parlée en France. La sémiotique de Peirce nous a permis de considérer le signe comme une triade : l'Objet (le nombre), les Representamens (les signes dans leur « matérialité » constitués en système), l'Interprétant (la logique qui sous-tend le système de representamens). Nous avons utilisé une méthode d'analyse consistant à replacer les numérations dans des systèmes plus généraux pour en apprécier les particularités. Nous avons procédé en deux temps. Tout d'abord des signes vers les mathématiques, c'est-à-dire que nous avons indiqué quels principes (mathématiques) pouvaient modéliser les numérations afin qu'elles soient non ambiguës, exhaustives et non redondantes. Ceci constitue ce que nous avons appelé la première partie de l'interprétant. Ces modèles mathématiques sont cependant généraux. Ainsi sont-ils susceptibles d'engendrer d'autres numérations que celles qui nous sont données à voir. Etudier les choix spécifiques à nos deux numérations a constitué le deuxième temps de notre analyse, des mathématiques vers les signes. Nous avons la deuxième partie de l'interprétant, l'incarnation de ces principes dans la langue ou l'écriture, la mise en signes.
En ce qui concerne la numération écrite chiffrée, nous avons cherché nos modèles dans la théorie des langages. La première partie de l'interprétant est constituée des principes liés à la décomposition d'un nombre entier selon une échelle de numération régulière et plus particulièrement des principes de base k. La deuxième partie concerne le choix de dix comme base (il est aussi possible de le considérer comme faisant partie de la première partie), celui de n'utiliser que les coefficients pour la mise en signe, puis un choix graphique pour le representamen de chacun de ces coefficients et un dernier concernant leur disposition spatiale. Cette dernière doit permettre de relier les coefficients à leur ordre, ils acquièrent ainsi le statut de chiffre.
Le travail qui a concerné la numération parlée en France a été sensiblement différent du fait que les signes comportent une dimension linguistique. Les modèles mathématiques ne s'imposent pas. Nous avons recherché ceux qui avaient déjà été utilisés antérieurement. Un premier travail a été de les préciser. En utilisant une analyse syntaxique nous avons extrait trois modèles candidats. Ils ont constitué trois possibilités pour la première partie de l'interprétant : des principes arithmétiques multiplicatifs, arithmétiques additifs et ordinaux.

Nous avons utilisé des notions introduites par Cauty. Ainsi, au premier modèle est associée la notion d'appuis et appuyants multiplicatifs, au deuxième celle d'appuis et appuyants additifs, au dernier celle de repérant/comptant. Le deuxième mouvement, des mathématiques vers les signes, nous a permis de dégager la deuxième partie de l'interprétant. Le choix des appuis ou des repérants peut s'éclairer par certaines considérations linguistiques, comme une économie de mots ou des nécessités de non ambiguïté au niveau des concaténations contraignant un certain type de segmentation. Ces explications sont liées aux principes mathématiques mêmes : principe arithmétique additif et ordinal avec repérant d'un côté, principe arithmétique multiplicatif de l'autre. Elles n'ont pas permis d'obtenir des réponses complètes à toutes les questions sur les choix opérés dans la mise en signes. Deux aspects du nombre coexistent, l'aspect ordinal pour les nombres inférieurs à cent, et l'aspect cardinal.
L'étude menée est spécifique à la numération et elle utilise la sémiotique de Peirce sans en reprendre tous les aspects. Nous avons donc préféré utiliser le mot d'interprétation plutôt que celui d'interprétant. Ainsi, nous avons dégagé une seule interprétation pour la numération écrite chiffrée que nous avons qualifiée d'interprétation de référence, tandis que nous avons dégagé trois interprétations principales pour la numération parlée en France[329]. La pertinence de ces dernières a été discutée selon la distance entre la mise en signe constatée dans la numération parlée en France et celle du modèle. Celle-ci diffère selon le champ numérique. L'interprétation (strictement) ordinale domine pour les nombres inférieurs à seize. Entre seize et cent, une interprétation arithmétique additive ou une interprétation ordinale avec repérant est plus pertinente que ne l'est une interprétation arithmétique multiplicative. Cette dernière le devient pour les nombres supérieurs à cent, puis selon une base mille pour les nombres supérieurs à mille.

Nous avons alors comparé les deux numérations. Pour les nombres inférieurs à cent, l'interprétation arithmétique multiplicative de la numération parlée en France est la plus proche de l'interprétation de référence de la numération écrite chiffrée. La première partie de l'interprétant est la même, elle est basée sur une échelle de numération régulière menant à la décomposition dite polynomiale (de base dix). Pour chaque numération cette première partie a été cependant dégagée par deux approches différentes : l'une mathématique via la théorie des langages, l'autre linguistique via une analyse syntaxique. Quant à la deuxième partie de l'interprétant, l'écriture chiffrée utilise uniquement les coefficients de l'échelle de numération, alors que la numération parlée utilise ordres et coefficients.
En qui concerne la numération parlée en France, nous avons mis en évidence que pour les nombres inférieurs à cent, l'interprétation arithmétique multiplicative était moins pertinente que les deux autres. Ce résultat, ainsi que les différences entre l'interprétation de référence de la numération écrite chiffrée et - d'une part l'interprétation arithmétique additive, d'autre part l'ordinale (avec repérants) - éclairent ainsi la non-congruence entre les deux numérations.
En outre, des considérations historiques nous permettent d'admettre que la numération parlée en France et la numération écrite chiffrée ont vraisemblablement quelques origines communes, mais pas d'ancêtre commun et donc *a fortiori* l'une n'est pas fille de l'autre. Toutes les deux ont à voir avec les numérations parlées de langues indo-européennes. Nous pouvons faire l'hypothèse que l'interprétation des premières numérations est avant tout ordinale puis ordinale avec repérants. Elles ont toutes les deux aussi à voir avec les premiers systèmes écrits des nombres. L'émergence de repérants basés sur « dix » ou sur des signes écrits signifiant « dix » étant vraisemblablement la conséquence de systèmes de comptage anthropomorphiques privilégiant les doigts des mains. Ce qui les distingue essentiellement c'est le caractère oral pour l'une et écrit pour l'autre, ce qui contraint les possibilités de type

[329] On peut aller jusqu'à quatre si on distingue ordinale avec ou sans repérants.

de signe. Elles ont toutes les deux évolué concomitamment aux changements des sociétés humaines, et nous retenons pour notre propos qu'elles permettent de résoudre de manière différente et plus performante selon le contexte les problèmes que se sont posés les hommes[330]. Cependant la numération parlée en France (issue directement de la numération parlée latine) et la numération écrite chiffrée (issue de la numération écrite chiffrée indienne ou/et parlée en langue sanskrite) ne se sont côtoyées que tardivement.
Ainsi, si de manière formelle il est possible d'envisager de faire un lien entre les deux numérations via une interprétation multiplicative de la numération parlée, l'étude que nous avons menée met en évidence les différences avec l'interprétation de référence de la numération écrite chiffrée.
Ces différences se lisent en particulier dans les procédés de mise en signes « concrets » d'une collection. Ces procédés sont d'essence théorique, dans le sens où ce sont des algorithmes traduits en termes d'actions qui doivent s'effectuer en considérant une structure sous-jacente de la numération (une des interprétations). Nous avons alors indiqué que, non seulement il est difficile d'associer un unique algorithme à une interprétation (pour des raisons mémorielles en particulier), mais, même à ce niveau non didactique et non psychologique, des « actions » identiques peuvent être la traduction « concrète » d'interprétations différentes. La question se pose d'autant plus au niveau d'un sujet. Pour mener à bien des tâches relatives aux nombres, il emploie des systèmes de numération. Quel est alors le lien entre ces numérations (et les interprétations que nous avons dégagées) et la conceptualisation du nombre ? Ce sont ces questions qui ont été étudiées dans la deuxième partie de la thèse.

De la conceptualisation aux apprentissages et à l'enseignement

Qu'en est-il au niveau de la conceptualisation chez un sujet et plus particulièrement un élève de CP de l'école élémentaire ? La théorie des champs conceptuels nous a aidé à construire des outils méthodologiques pour aborder notre problème. Nous avons élaboré tout d'abord la notion de cheminement cognitif d'un sujet pour résoudre un problème. Ceci nous a permis de préciser ce que nous entendons par utilisation *a priori* de telle ou telle interprétation au niveau d'un sujet. Il s'agit d'un sujet générique résolvant un problème dont l'analyse didactique permet d'inférer que ses connaissances (techniques, mobilisables ou disponibles selon les cas) lui permettent de résoudre ce problème de manière efficace via une stratégie mettant en œuvre des théorèmes-en-acte dont la validité est justifiable par des propriétés de telle interprétation. Une analyse *a posteriori* est susceptible de permettre de confirmer ou d'infirmer l'analyse *a priori*.

Nous avons pu ainsi préciser les interprétations que les élèves de CP emploient *a priori*. Tout d'abord, ils fréquentent les nombres via l'utilisation de la numération parlée en langue maternelle, initialement dans une interprétation ordinale avec repérants. En effet, au CP, les élèves abordent une certaine variété de problèmes relatifs à la structure additive, mais la conceptualisation à ce sujet n'est que partielle. En conséquence, l'interprétation additive de la numération parlée ne peut être, elle aussi, que partielle. Des numérations à structure « régulière » sont susceptibles d'être introduites en classe, il est possible de penser que leur structure « régulière » (les appuis multiplicatifs étant prononcés) leur permet de résoudre les problèmes de la structure multiplicative de manière plus aisée. L'outil dont disposent les élèves a une forme plus « adaptée ». La théorie des champs conceptuels insiste sur les liens entre les signifiants, le signifié(s) et l'ensemble des problèmes qui donnent du sens au concept

[330] Nous ne voulons pas dire que l'évolution constatée a été linéaire, ni que certains systèmes de numération sont supérieurs en eux-mêmes à d'autres, mais que certains sont plus à même de résoudre des problèmes. De manière réciproque les systèmes permettent d'explorer des nouveaux problèmes (en particulier dans le domaine mathématique) du fait de leur structure même.

(la référence). C'est donc en résolvant des problèmes relatifs à la structure multiplicative que les apprenants mobilisent véritablement cette interprétation arithmétique multiplicative, ce qui va dépendre du curriculum des élèves. Les difficultés d'apprentissage relevées par les chercheurs quand il s'agit de mettre en jeu les interprétations arithmétiques des numérations parlées, nous ont donc incité à considérer que l'emploi « arithmétique » au niveau des élèves de CP était à relativiser.
Par ailleurs la conceptualisation même du nombre est un processus encore loin d'être achevé en CP. En sont témoins les connaissances difficilement mobilisables en début de CP relatives à l'énumération ou encore aux groupements comme outil pour résoudre des problèmes. De ce fait, l'interprétation ordinale (avec repérants ou non) peut être considérée comme partielle. En outre, les résultats de recherches antérieures soulignent qu'une difficulté conceptuelle pour un apprenant réside dans le fait d'envisager d'utiliser deux signifiants de la numération parlée pour désigner le cardinal d'une collection : par exemple une désignation des groupements telle que « trois (dix/dizaine) et quatre (uns) » pour désigner trente-quatre éléments. Ainsi le passage à une interprétation multiplicative est problématique chez les élèves.

Nous avons mis en avant des problèmes non arithmétiques qui sont susceptibles d'être proposés très tôt dans l'année aux élèves de CP, puisqu'ils le sont dès la maternelle. Ces problèmes concernent le codage et le décodage du cardinal de collections ainsi que la comparaison de cardinaux. Nous avons décrit les cheminements cognitifs concernant la résolution de ces problèmes non arithmétiques et mettant en jeu les numérations, par exemple à partir de stratégies de base de type OF ou OF°. Ce sont eux qui apparaissent alors dans notre recherche comme susceptibles d'être supports à l'apprentissage des numérations et en particulier de l'aspect positionnel de la numération écrite chiffrée. Nous avons défini une stratégie particulière de dénombrement, « organiser/configurer pour désigner ». Elle permet de distinguer d'un côté les principes mathématiques et d'un autre la mise en signes. Si elle est utilisée, elle favorise l'utilisation d'une interprétation multiplicative ou de référence. Cette étude a été utilisée dans la troisième partie de la thèse.

Trois types d'itinéraires d'enseignement

Nous avons défini la notion d'itinéraire cognitif d'enseignement relatif à la numération écrite chiffrée. Elle permet de tenir compte au niveau de l'enseignement à la fois des cheminements potentiels des élèves pour résoudre un problème et des interprétations des numérations. Nous avons établi une problématique en termes d'organisation de l'utilisation des interprétations des numérations pour faire évoluer celle de la numération écrire chiffrée. Celle-ci est en effet initialement considérée comme la forme écrite de la numération parlée en France, employée principalement dans une interprétation ordinale (avec repérants).

Les deux notions de cheminement et d'itinéraire, utilisées comme outil, ont permis l'analyse des recherches antérieures puis des manuels selon un nouvel angle, donnant ainsi la possibilité de comparer les points de vue qu'ils ont adoptés. Ceci nous a permis entre autres de tenir compte dans les recherches d'une multitude de signifiants. Ils ont été analysés comme prenant place auprès des deux numérations pour aider les élèves à rendre disponible l'utilisation de différentes interprétations des numérations. Nous avons dégagé trois types d'itinéraires différents selon les positions relatives des deux numérations.
Le premier consiste à faire en sorte que les élèves utilisent la numération parlée en France via une interprétation multiplicative. Cette interprétation permet alors de reconsidérer la signification des chiffres de la numération écrite chiffrée, puisque cette dernière est la forme écrite de la première.
Le deuxième type d'itinéraire consiste à introduire une numération orale « régulière », c'est-à-dire dans laquelle les appuis multiplicatifs sont prononcés (comme celles utilisées dans des

pays asiatiques). Son interprétation multiplicative est ainsi théoriquement plus aisée à convoquer. Dans les recherches que nous avons étudiées, l'écriture chiffrée reste toujours la forme écrite du nom des nombres prononcés dans cette nouvelle numération, ce qui permet comme précédemment de faire évoluer l'interprétation de la numération écrite chiffrée. En outre, ici, la numération orale régulière, mise en parallèle avec la numération parlée en France, peut permettre d'utiliser cette dernière dans une interprétation multiplicative.
Le dernier itinéraire est moins identifiable dans les articles que nous avons consultés. Il apparaît cependant comme une possibilité théorique que certains chercheurs envisagent, ou tout au moins n'interdisent pas. Il consiste à ne pas utiliser la numération parlée en France, ni un autre système de numération oral, pour aborder initialement les aspects positionnels de l'écriture chiffrée. Il s'agit de mettre en lien « directement » le code chiffré et l'organisation d'une collection afin de ne pas convoquer chez les élèves les interprétations ordinales ou arithmétiques additives. En proposant en particulier l'étude de différentes bases, l'enseignement des années 70 en France et en Suisse romande, Conne (2001), nous semble emprunter cet itinéraire. Mais celui-ci ne se restreint pas à cette unique possibilité, tout au moins en théorie, la preuve en a été apportée dans le chapitre 9 de notre travail.

Des itinéraires qui offrent des perspectives différentes

Les deux premiers itinéraires sont ceux que nous avons identifiés dans les manuels actuellement disponibles en France. Via les numérations orales, ils ont l'avantage d'utiliser les concepts relatifs aux nombres fréquentés par les élèves en début de CP. Ils nécessitent de faire évoluer l'interprétation d'une numération orale en y associant celle de la numération écrite chiffrée. Cela engage à continuer à envisager la numération écrite chiffrée comme la forme écrite de la numération parlée en France et, en outre, pour l'itinéraire de type 2, comme la forme écrite d'une numération orale annexe. En conséquence, l'interprétation initialement objet d'un nouvel apprentissage est d'essence multiplicative. Dans les deux cas, les apprentissages proposés sur un long terme sont susceptibles de rendre disponible au fur et à mesure l'interprétation de référence. Cependant, certains problèmes sont difficilement abordables, tout au moins initialement : ceux afférents aux choix mathématiques tels que les groupements, les groupements de même cardinal, le cardinal dix ; ceux afférents aux choix de mise en signes qui découlent de l'utilisation exclusive des coefficients pour coder l'organisation, tels que le nombre et la graphie des chiffres, leur disposition spatiale et le zéro. En outre, dans l'enseignement, ces écritures chiffrées peuvent-elles apparaître autres que comme issues de la numération parlée ? L'étude de la première partie de la thèse montre qu'elles ne le sont pourtant pas.
Le troisième type d'itinéraire a l'avantage de pouvoir théoriquement faire apparaître les écritures chiffrées via l'interprétation de référence et de pallier dès le début les « manques » des deux autres itinéraires. Il peut aussi permettre d'éviter les confusions entre les différentes interprétations que peuvent évoquer les noms des désignations parlées en France. Cependant, en minimisant initialement le rôle de la numération parlée en France, le risque majeur que nous avons souligné est de ne pas pouvoir disposer des concepts relatifs aux nombres que celle-ci véhicule.

Les propositions des manuels scolaires en vigueur peuvent être classées dans des itinéraires de type 1 ou 2. Pour deux d'entre eux, un de chaque itinéraire, nous avons étudié la manière dont était investie une certaine marge de manœuvre des itinéraires. Nos analyses ont contribué à établir les constats ci-dessus, mais il est apparu que les interprétations que nous avons dégagées pouvaient intervenir de manière multiple, et non nécessairement à bon escient. Ceci est sensible tout particulièrement dans les séquences clés. Elles concernent le moment de première rencontre avec une interprétation multiplicative de l'écriture chiffrée, c'est-à-dire le moment où chaque chiffre de l'écriture chiffrée est relié à son ordre (dizaine, unité).

Le jeu des interprétations dans la conduite de classe

Au-delà de l'itinéraire, le problème que nous avons identifié au niveau de la classe est de « dire » les nombres, au risque d'évoquer les interprétations anciennes dans les échanges oraux, alors qu'une nouvelle interprétation est visée. Ce problème est particulièrement sensible au moment d'enseigner les aspects positionnels de l'écriture chiffrée. Il est absolument incontournable dans les deux premiers itinéraires bien qu'il se pose de manière différente dans le deuxième si on envisage d'évoquer le nombre par le biais d'une nouvelle numération régulière. Il peut être aussi en jeu dans le troisième du fait que les situations concernent les nombres, nombres qui sont initialement perçus comme confondus avec leur désignation parlée. En outre, les écritures chiffrées et les désignations parlées des nombres sont utilisées par les élèves dans des contextes variés, différentes interprétations sont donc susceptibles d'être convoquées pour un même signe.

L'étude des déroulements en classe a fourni des informations à la fois sur les écueils que peuvent comporter les deux premiers itinéraires et sur les possibilités de réalisation du troisième. Notre étude ne met donc pas le focus sur les possibilités de ces deux premiers itinéraires ni sur les écueils du troisième. Concernant l'introduction de l'interprétation arithmétique multiplicative de la numération parlée en France, ces écueils sont en partie dus aux situations favorisant des stratégies de comptage et aux connaissances anciennes des élèves. Le nombre est assimilé à sa désignation parlée en France. La difficulté conceptuelle consistant à utiliser une désignation de l'organisation comme désignation du cardinal d'une collection reste prégnante pour au moins une partie des élèves. Ceci avait été envisagé par les recherches dont nous avons fait état. Nous avons aussi indiqué les difficultés pour les acteurs de la classe à ne pas faire systématiquement référence dans leurs échanges à l'écriture chiffrée en tant que forme écrite des désignations parlées en France. Par ailleurs, il apparaît que certains aspects de l'interprétation de référence ne sont effectivement pas abordés. Ce sont ceux que nous avons indiqués dès l'analyse de l'itinéraire.

Alors qu'un même manuel est utilisé, l'observation de deux classes montre que l'écriture chiffrée peut ne pas être présentée de la même manière aux élèves. Dans une classe, elle semble un moyen pour faciliter une interprétation multiplicative de la numération parlée, dans l'autre, elle est un moyen pour résoudre « directement » des problèmes, sans passer par la numération parlée, ce lien direct ayant été justifié par ailleurs. Nous avons analysé ce constat comme la conséquence de conceptions différentes des enseignantes relativement au savoir à enseigner. L'emploi de différents moyens selon la classe pour faire en sorte que tous les élèves puissent « réussir » est influencé par les conceptions sur l'enseignement, identiques dans leurs finalités.

Dans les phases collectives, pour les deux classes, ce sont avant tout les validations des productions des élèves qui sont en jeu et elles ne se font pas nécessairement en explicitant les stratégies que ceux-ci ont utilisées. Or, les problèmes qui ont été proposés engagent à utiliser des stratégies favorisant l'emploi d'une interprétation multiplicative, ce que font moins les différents types de validation des productions obtenues. L'analyse a montré que les tâches proposées aux élèves engageaient des stratégies qui servaient *a priori* aux objectifs de la séance, mais que les connaissances anciennes qu'ils pouvaient mobiliser permettaient difficilement à un nombre non négligeable d'entre eux de les utiliser. Les recherches antérieures que nous avons consultées nous permettent d'envisager que ce constat pourrait se généraliser à la plupart des classes. Dans le contrat entre l'enseignant et les élèves, contrat qui nous semble provenir des règles du métier d'enseignant, ce nombre est suffisamment important pour que les enseignants soient contraints d'apporter des changements significatifs au déroulement et aux tâches prévues dans la séquence proposée par le manuel. Par ailleurs, nous avons montré un décalage entre les stratégies utilisées par les élèves et celles qui étaient

potentiellement en jeu dans les validations collectives. Or, celles-ci sont susceptibles d'être support à des formes d'institutionnalisation, ce qui peut générer des difficultés d'apprentissage et d'enseignement.
Nous avons mis en forme certains de ces résultats à l'aide des composantes de la double approche. Un premier tableau met le focus sur le fait que l'enseignant doit composer avec des occurrences de confusions générées par l'utilisation des signifiants, en particulier dans les moments collectifs, quand il doit conclure la séance ou/et la séquence. Le deuxième reprend cette idée en précisant ces moments (analysables par l'outil « phase de bouclage ») et en mettant l'accent sur les éléments relevant de la composante cognitive qui favorisent une réduction de marges de manœuvre. Ceci permet en particulier de définir un « effet bouclage » qui ne génère pas nécessairement des écueils pour l'enseignement ou/et l'apprentissage. Cet effet peut donc être un levier pour élaborer des situations « robustes » en classe ordinaire. Par ailleurs, nous avons mis en évidence l'influence des ressources dont peut disposer l'enseignant dans sa classe : les tâches proposées par un manuel mais aussi les différents signifiants du nombre utilisés.

Une proposition support à de nouvelles questions pour la recherche.

Le chapitre 9 s'est nourri des résultats obtenus au fur et à mesure de l'avancée du travail : du côté du savoir à enseigner et du côté des déroulements en classe de CP. Nous avons investi certaines marges de manœuvre, celles concernant un itinéraire de type 3 favorisant des stratégies « organiser/configurer pour désigner » et limitant dans les situations de classe la survenue des interprétations non congruentes de la numération parlée en France. Dans cette conclusion, nous n'allons pas revenir sur les nombreuses questions qui se posent encore, elles ont été exposées dans le dernier chapitre. Nous voulons mettre en relief que notre proposition est un premier prolongement de notre travail, il appelle de futures recherches. Nous espérons avoir montré que notre ambition n'est ni de « réhabiliter » les « mathématiques modernes », ni de sous-estimer les apports de la numération parlée sur la conceptualisation du nombre. Elle tend à intégrer les deux points de vue. Notre proposition vise à poursuivre la recherche : comprendre ce qui « se passe » en classe, avec comme horizon de permettre de faciliter l'apprentissage et l'enseignement dans une classe de CP de nos jours, d'étudier des phénomènes d'enseignement (l'effet bouclage entre autre) et enfin de poursuivre des investigations du côté des élèves concernant leur conceptualisation du nombre, en particulier à travers l'étude de l'évolution des liens entre procédures et interprétations (au sens de la thèse).

Intérêt du travail entrepris

La démarche consistant à faire une nouvelle étude du contenu mathématique en tant que savoir savant puis savoir à enseigner et finalement savoir enseigné est nécessairement longue. D'une certaine manière, elle est aussi « coûteuse » au niveau théorique. Elle nécessite en effet de mobiliser des notions issues de cadres très différents : mathématique, sémiotique, psychologique et didactique. Ceci demande alors une articulation. Ce coût nous a semblé nécessaire du fait de la nature du problème étudié qui est au carrefour d'approches diverses qui ne sont pas consensuelles sur la manière de surmonter des difficultés persistantes, tant du côté de l'apprentissage que de l'enseignement. Ce problème concerne un savoir naturalisé et dont les signifiants véhiculent des interprétations multiples, non-univoques. Nous pensons avoir montré que notre démarche a produit des résultats.
Tout d'abord nous avons obtenus différents résultats concernant le contenu mathématique, les numérations. Nous avons pu alors reconsidérer l'apprentissage du nombre en privilégiant les relations particulières, signifiants/signifié(s). Ceci nous a permis d'obtenir une grille d'analyse pour classifier les orientations prises concernant l'enseignement au niveau des recherches et des manuels scolaires. L'ensemble de ce travail a permis d'analyser des déroulements en classe dans le cadre de la double approche didactique et ergonomique :

certains gestes professionnels, communs à tous les enseignants, du fait de certaines spécificités du savoir à enseigné, favorisaient l'émergence de confusions chez les élèves.
Un deuxième type de « résultat » vient du fait que nous avons pu élaborer une proposition en direction des enseignants dans des classes « ordinaires ». Celle-ci est légitimée par nos résultats précédents mais, en outre, elle est accompagnée de questions précises et notre recherche fournit un cadre pour les étudier. L'idée d'une telle proposition aurait certes pu germer sans cette thèse, mais les éléments qu'elle rassemble ainsi que la forme des questions qui se posent nous semblent résulter de notre travail. Il s'agit avant tout d'un « résultat » utile à la recherche dans le sens où nous avons élaboré un outil pour poursuivre l'étude.
Finalement notre démarche a produit des outils théoriques utiles pour l'analyse (organiser/configurer pour désigner, itinéraire cognitif d'enseignement, cheminements cognitifs, phase de bouclage) et a exploré des articulations théoriques.

Limites et perspectives

Il nous semble que la nature de nos résultats et certaines limites à notre travail offrent des perspectives pour de nouvelles recherches.

En premier lieu, l'ingénierie à laquelle nous avons abouti est à tester. Ce nouveau travail permettra d'indiquer en quoi notre démarche peut être productive. A la fin du chapitre 9, nous avons soulevé les questions qui pouvaient être étudiées. Nous n'y revenons pas ici. Signalons néanmoins qu'une étude plus approfondie auprès des élèves peut mener à mieux cerner les classes de problèmes du champ conceptuel concernant la numération. C'était une question qui restait en suspens dans le chapitre 4. Par ailleurs, nous avons privilégié l'interprétation de référence dégagée dans la première partie de la thèse, mais d'autres propositions sont envisageables, y compris en considérant celles déjà élaborées. Une interprétation (arithmétique) multiplicative utilisant une numération « en unités » est aussi un choix possible, c'est par exemple celui de Chambris (2008). Son étude concerne cependant prioritairement l'année de CE1, c'est-à-dire celle qui suit le CP, et qui fait donc suite à l'introduction des aspects positionnels de l'écriture chiffrée. Des questions se posent alors : est-il possible de réaliser un itinéraire de type 3 en prenant pour référence une interprétation (arithmétique) multiplicative, avec comme support une numération en unités ? Est-il possible de croiser les deux approches ?
Quelle que soit l'étude menée, il nous semble aussi qu'elle doit aborder la question de la transposition didactique en classe, en particulier via les ressources qui peuvent être proposées à l'enseignant.

Nous pouvons aussi interroger différents points de notre approche. D'autres choix, concernant les cadres théoriques sont envisageables. En outre, il nous semble que chaque partie de la thèse pourrait profiter d'approfondissements spécifiques en particulier grâce à des apports de spécialistes.
Par ailleurs nous avons été amené à définir deux notions d'essence théorique, les cheminements et les itinéraires, notions que nous avons utilisées en tant qu'outils pour analyser l'enseignement. Nous avons voulu d'une certaine manière faire un lien entre les stratégies en référence à la théorie des situations et les théorèmes-en-acte de la théorie des champs conceptuels. Cette tentative nous semble nécessiter une étude complémentaire.
Ces deux outils sont emblématiques du travail que nous avons dû entreprendre pour articuler les cadres théoriques. Nous avons dû tenir compte à la fois de ce que chaque théorie apportait de manière générale et des spécificités de notre objet de recherche. Ainsi certains choix sont susceptibles d'être généralisables, d'autres restent spécifiques. Ceci se cristallise en particulier au moment de l'analyse des déroulements en classe dans laquelle interviennent la théorie des champs conceptuels (cheminements, signifiants, signifié(s), théorèmes-en-acte), la double

approche (tâche/activité, enseignant exerçant un métier, une méthodologie en deux temps utilisant cinq composantes) et la théorie des situations (situation, milieu, contrat). Notre travail profiterait d'une étude critique plus approfondie.

Si chaque partie de notre travail peut être reprise et approfondie, le chapitre 8, celui qui concerne les déroulements en classe nous semble offrir des perspectives particulières. Nous avons le sentiment que l'analyse que nous avons faite nous a beaucoup apporté, mais la richesse des données recueillies ne nous semble pas avoir été complètement exploitée. Nous n'avons pas, par exemple, regardé en détail le décalage entre la tâche proposée par le manuel, celle que l'enseignante a redéfinie et celle effectivement réalisée. Ceci pourrait nous servir pour l'étude de la transposition didactique que nous envisageons via l'ingénierie.

Si notre approche se révèle pertinente pour étudier d'autres problèmes, ceci motiverait aussi l'étude des questions précédentes. Nous pensons que certaines notions à enseigner ont des parentés avec la numération écrite chiffrée au CP. Ce sont celles qui sont susceptibles de mettre en jeu des interprétations multiples qui doivent être différenciées selon la forme écrite et orale. C'est le cas, par exemple, des fractions ainsi que des décimaux pour les élèves de 9-10 ans du cours moyen élémentaire première année (CM1). Les signes écrits disent « autre chose » que les désignations orales, les mots de la langue française. Pourtant ce sont les mots qui vont servir dans la classe à les désigner et à désigner les nombres. Par exemple « $\frac{3}{4}$ » est dit « trois-quarts », « trois quarts », « trois sur quatre », « les trois quarts de », « trois fois un quart », etc. Que donnent-ils à « voir », à comprendre du nombre ? En outre, avant d'être objet d'un enseignement spécifique au CM1, ces mots et ces signes sont « connus » des élèves dans leurs emplois courants, mais pas nécessairement en classe.

Vouloir traiter l'enseignement d'une notion en reprenant une étude « exhaustive » du savoir savant jusqu'aux déroulements en classe comporte le biais de ne pas approfondir chaque étape, en raison de la multiplicité des disciplines connexes convoquées et du temps que nécessiterait une étude approfondie de chaque domaine théorique. Nous soupçonnions que l'étude du savoir fût plus complexe qu'elle pouvait apparaître au premier abord. Mais nous ne doutions pas de l'ampleur qu'elle allait prendre. C'est à partir de celle-ci qu'allait alors être pensée la thèse. Ceci nous a amené à opter pour un plan dont chaque partie nécessitait de nouveaux apports théoriques et dont les conclusions orientaient la suite.
Notre volonté a été de pouvoir rendre explicite nos choix, afin que notre travail soit réfutable (*falsify*) au sens de Popper. Nous espérons que cela a été le cas.
Nous pensons avoir donné des éléments de réponses aux questions initiales, celles concernant le rôle des désignations parlées en France dans l'enseignement de la numération décimale de position pour comprendre les déroulements en classe « ordinaire ». L'expérimentation en classe de l'ingénierie nous semble un prolongement indispensable à notre recherche.

Bibliographie

1. AIGOIN C. & DEBOURG V. (2004) *Du dénombrement terme à terme aux groupements réguliers : un pas nécessaire vers la compréhension de notre système de numération positionnelle !*, Grand N n°73, pp.49-65.
2. BAROODY A.J. & TIILIKAINEN S.H. (2003), cité par Verschaffel & Al. (2006) *Two perspectives on addition development.* In :A.J. Baroody & A. Dowker (Eds.), The development of arithmetic concepts and skills, pp. 75-126.
3. BASSIS O. (2003) *Concepts clés et situations problèmes,* Hachette Education, Paris.
4. BEDNARZ N. & JANVIER B. (1982) *The understanding of numeration in primary school*, Educational Studies in Mathematics, 13, pp. 33-57.
5. BEDNARZ N. & JANVIER B. (1988) A *constructivist approach to numeration in primary school: results of a three year intervention with the same group of children*, Educational Studies in Mathematics, 19, pp. 299-331.
6. BEZOUT E., REYNAUD A. A. L. (1821) *Traité d'arithmétique à l'usage de la marine et de l'artillerie,* par Bezout; avec des notes et des tables de logarithmes, par A. A. L. Reynaud. Paris : Librairie pour les sciences. Disponible sur http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k201342q/f2.table
7. BIDEAUD J., LEHALLE H., VILETTE B. (2004) *La conquête du nombre et ses chemins chez l'enfant,* Presses universitaires du Septentrion, Paris.
8. BRIAND J. (1999) *Contribution à la réorganisation des savoirs pré-numériques et numériques. Etude et réalisation d'une situation d'enseignement de l'énumération dans le domaine pré-numérique,* Recherches en Didactique des Mathématiques, 19/1, pp. 41-75.
9. BRISSIAUD R. (2001) *Enseigner une comptine numérique « à l'asiatique » au CP : pourquoi et comment ?*, XXVIIIème colloque inter-IREM des formateurs et professeurs chargés de la formation des maîtres, Tours.
10. BRISSIAUD, R. (1991) Un *outil pour construire le nombre : les collections-témoins de doigts*. In BIDEAUD J., MELJAC C. & FISHER J.C. (Eds.) *Les chemins du nombre*. Lille : PUL.
11. BROUSSEAU G. (1981) *Problèmes de didactique des décimaux*, Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 2, n° 1. pp. 37-127.

12. BROUSSEAU G. (1995) *Les mathématiques à l'école*. Bulletin APMEP n° 400 Qu'est-ce que faire des mathématiques ?

13. BROUSSEAU G. (1996) *La théorie des situations didactiques*, Cours donné lors de l'attribution à Guy Brousseau du titre de Docteur Honoris Causa de l'Université de Montréal. Disponible en ligne sur : http://daest.pagesperso-orange.fr/guy-brousseau/textes/TDS_Montreal.pdf

14. BROUSSEAU G. (1998) *Théorie des situations didactiques*, La Pensée Sauvage, Grenoble

15. BUTLEN D., MASSELOT P. & PEZARD M. (2002) *Pratiques de professeurs d'école enseignant les mathématiques en réseaux d'éducation prioritaire : cohérence et contradictions, une première catégorisation*, Rapport de recherche, Cahier de Didirem, Irem Paris 7 Denis Diderot.

16. BUTLEN D., DUBUT A, MASSELOT P., NGONO B., PELTIER M-L. & PEZARD M. (2003) *Pratiques de PE enseignant les mathématiques en réseaux d'éducation prioritaire : cohérence et contradictions*, Rapport de recherche, Cahier de Didirem n°44, Irem Paris 7 Denis Diderot.

17. BUYS K. (2001), cité par VERSCHAFFEL & al. (2006) *Mental Arithmetic*, In Van den heuvel (Ed.), Chidren learn Mathematics, pp.121-145, University of Utrech, Freudenthal Institute.

18. CAUTY (1984) *Taxinomie, syntaxe et économie des numérations parlées*, Amérindia, n°9. Disponible sur : http://celia.cnrs.fr/Fr/Amerindia.htm

19. CAUTY (1986) *Taxinomie, syntaxe et économie des numérations parlées*, Amérindia, n°11. Disponible sur : http://celia.cnrs.fr/Fr/Amerindia.htm

20. CAUTY, (1988) *Sémantique de la mise en signes du nombre : une vision ordinale*, Amérindia, n°13. Disponible sur : http://celia.cnrs.fr/Fr/Amerindia.htm

21. CHAMBRIS C. (2008) *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20e siècle. Connaissances des élèves actuels.* 562 pages. Thèse de doctorat. Paris : Université Paris-Diderot (Paris 7). Disponible sur : http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00338665/fr/

22. CHARBONNIER R. (2004) *La route des chiffres*, Irem de Clermont-Ferrand.

23. CHEVALIER C. (2008) *Entrer dans le code écrit : le système de numération au cycle 2*, Actes XXXVème colloque Copirelem, Bombannes.

24. COLLET M. (2004) *Le développement du système en base dix chez les enfants de 1ère et 2ème année primaire*, Unpublished doctoral dissertation, Université Catholique de Louvain.

25. COMITI C., BESSOT A. & PARISELLE C. (1980) *Analyse de comportements d'élèves en cours préparatoire confrontés à une tâche de construction d'un ensemble équipotent à un ensemble donné*, Recherches en Didactique des Mathématiques, vol 1.2, pp. 171-224.

26. CONNE F. (1984) *Calculs numériques et calculs relationnels dans la résolution de problèmes arithmétiques*, Recherches en Didactique des Mathématiques, 5/3, pp. 269-343.

27. CONNE F. (1989) *Comptage et écritures en ligne d'égalités numériques*, Recherches en Didactique des Mathématiques, 9/1, pp. 74-115.

28. CONNE F. (1992) *Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique*, Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 12 n°2.3.

29. CONNE F. (2001) *Evolution de la référence à la réalité dans les manuels suisses romands au cours du XXème siècle*, Actes de la 11ème école d'été de didactique des mathématiques, Corps.

30. CONNE F. (2008) *Coupes sémiotiques*, in Le film de la Classe. Etude sémiotique et enjeux didactiques. Jean-Pierre Sautot, éd., Limoges, Lambert-Lucas, 2008, pp. 105-142.

31. CRUMP T. (1990) *The Anthropology of Numbers*, Cambridge University Press, Cambridge. Compte rendu de CAVEING M., L'Homme 1994, Volume 34, Numéro 130, pp. 155-158. Disponible sur : http://www.persee.fr/web/revues/home/prescript/article/hom_0439-4216_1994_num_34_130_369742

32. DEBLOIS L. (1995) *Le développement de l'écriture des nombres chez Christine*, Revue des sciences de l'éducation, Volume XXI, n°2, pp. 331-351.

33. DEBLOIS L. (1996) *Une analyse conceptuelle de la numération de position au primaire*, Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 16/1, pp. 71-127.

34. DELAPLACE C. & WEIL-BARAIS A. (2008) *L'évolution des connaissances qu'ont les enfants des fonctions cognitives de l'écriture des nombres : apport de l'épreuve DENORECO*, Actes du XXXVème colloque Copirelem, Bombannes.

35. DOUADY R. (1987) *Jeux de cadres et dialectique outil/objet*, Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 7 n°2.

36. DUVAL R. (2006) *Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques ?* Relime, Numéro Especial., pp. 45-81.

37. EVERAERT-DESMEDT N. (2006) *La sémiotique de Peirce*, dans Louis Hébert (dir.), Signo [en ligne], Rimouski (Québec). Disponible sur http://www.signosemio.com

38. FENICHEL M. & PFAFF N. (2004-2005) *Donner du sens aux Mathématiques*, 2 tomes, Bordas.

39. FISCHER J-P. (1990) *Pourquoi les élèves asiatiques surclassent-ils les américains (en maths) ?*, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, IREM de Strasbourg, n°3, pp. 103-141.

40. FISCHER J-P. & BOCEREAN C. (2004) *Impact de la réforme de 1970 sur les connaissances numériques des jeunes enfants*, Annales de didactique des sciences cognitives, vol. 9, pp. 83-100.

41. FLÜCKIGER A. (2004) *Analyse didactique et schème : une étude qui articule théorie des situations et théorie des champs conceptuels*, Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 24, n°2.3, pp. 169-204.

42. FUSON & BRIARS (1990) *Using a base-ten blocks learning/teaching approach for first- and second-grade place-value and multidigit addition and subtraction*, Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 21, pp.180-206.

43. FUSON K., WEARNE D., HIEBERT J., MURRAY H., HUMAN P., OLIVIER A., CARPENTER T., & FENNEMA E. (1997) *Children's conceptual structures for multidigit numbers and methods of multidigit addition and subtraction*, Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 28, n°2, pp.130-162.

44. FUSON K. & LI Y. (2009) *Cross-cultural issues in linguistic, visual-quantitative, and written-numeric supports for mathematical thinking*, ZDM Mathematics Education 41, pp. 793-808.

45. GOELZER H. (1966) *Dictionnaire Français Latin et Latin Français*, Garnier-Flammarion.

46. GRENIER D. (2007), *Cours de master 2 « Eléments d'épistémologie et de didactique »*, université de Grenoble. Disponible sur : http://prevert.upmf-

grenoble.fr/SpecialiteDEMS/Cours%202007/UE1/coursTCC%20Conceptions.pdf

47. GUITEL G. (1975) *Histoire comparée des numérations écrites*, Flammarion, coll. « Nouvelle bibliothèque scientifique », Paris.
48. HACHE C. & ROBERT A. (1997) *Analyse de pratiques effectives en classe de seconde*, Recherches en Didactiques des Mathématiques, Vol. 17, n°3, pp. 103-150.
49. IFRAH G. (1994) *Histoire universelle des chiffres*, Paris, Robert Laffont.
50. KOSYVAS G. (2010) *Dépassement-maintient du comptage au cours de l'analyse et de la synthèse des nombres à l'école maternelle*, Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica) n° 20, G.R.I.M. Department of Mathematics, University of Palermo, Italy.
51. LEFORT J. (1984) *Numération en base trois prime*, L'ouvert n°37, Irem Strasbourg, p. 28-35. Disponible sur http://irem.u-strasbg.fr/php/articles/37_Lefort.pdf
52. LEPLAT J. (2006) *Les contextes en formation*, Education permanente n°166, pp 29-48.
53. LORAUD N. (1995). *β-shift, systèmes de numération et automates*, Journal de théorie des nombres de Bordeaux, tome 7, n°2, p. 473-498. Disponible sur http://archive.numdam.org/ARCHIVE/JTNB/JTNB_1995__7_2/JTNB_1995__7_2_473_0/JTNB_1995__7_2_473_0.pdf.
54. MARCHOT (1897) *La numération ordinale en ancien français*, Zeitschrift für romanische Philologie, tome 21.
55. MARGOLINAS C. (1992) *Eléments pour l'analyse du rôle du maître : les phases de conclusion*, Recherches en Didactiques des Mathématiques, Vol. 12, n°1, pp. 113-158.
56. MARGOLINAS C., CANIVENC B., WOZNIAK F., DE REDON M.-C. & RIVIERE O. (2007) *Les mathématiques à l'école ? Plus complexe qu'il n'y paraît ! Le cas de l'énumération de la maternelle ... au lycée*, Bulletin de l'APMEP, 471, pp. 483-496. Disponible sur : http://www.apmep.asso.fr/IMG/pdf/conf_Margolinas.pdf
57. MARGOLINAS C. & RIVIERE O. (2008) *Les dessous du numérique*, XXXV$^{\text{ème}}$ colloque Copirelem, Bombannes, Bordeaux.

58. MARCHOT P. (1897) *La numération ordinale en ancien français*, Zeitschrift für romanische Philologie, tome 21, Disponible sur : http://fr.wikisource.org/wiki/La_Num%C3%A9ration_ordinale_en_ancien_fran%C3%A7ais
59. MASSELOT P., NUMA BOCAGE L. & VINATIER I. (2007) *Que devient la dizaine dans une séance menée par une débutante au CP ? Croisements de différentes analyses appliquées à un même protocole*, XXXIVème colloque Copirelem, Troyes.
60. NUMA-BOCAGE L. (1997) E*tude de la médiation dans l'enseignement de la numération*. Thèse de doctorat. Université René Descartes (Paris V).
61. PAROUTY V. (2005) *Compter sur les erreurs pour compter sans erreurs : état des lieux sur la numération décimale de position au cycle 3*. 31ème Colloque Inter-IREM des formateurs et professeurs chargés de la formation des maîtres.
62. PEIRCE C.S (1906) *Prolégomènes à une apologie du pragmaticisme*, The Monist, vol.16. Traduction française de Michel Balat. Disponible sur : http://www.balat.fr/
63. PERRIN-GLORIAN M-J., HERSANT M. (2003), *Milieu et contrat didactique, outils pour l'analyse de séquences ordinaires*, Recherches en Didactiques des Mathématiques, Vol. 23, n°2, pp. 217-276.
64. PICHAT M. (2001) *Enjeux socio-cognitifs et épistémologiques d'un développement pragmatique de la conceptualisation en mathématiques*, Disponible sur www.isc.cnrs.fr/ARCo2001/VOdesVF/PICHAT1.rtf
65. POISARD C. (2005), *Ateliers de fabrication et d'étude d'objets mathématiques, le cas des instruments à calculer*, thèse de doctorat, Université Aix-Marseille 1. Disponible sur http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/06/10/97/PDF/ThesePoisardC.pdf
66. RICCO G., MENOTTI G., BOYER C., LARERE C., NUMA BOCAGE L. & ALLENBACH L. (2008) *L'hétérogénéité des rapports au domaine numérique au début et à la fin de la première année de l'école élémentaire*, Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 28, n°3, pp. 279-318.
67. RIGO M. (2003), *Système de numération et régularité des représentations*, Disponible sur : *http://edutice.archives-ouvertes.fr/docs/00/05/46/77/PDF/ITEM_RIGO_TXT.pdf*

68. ROBERT A. & ROGALSKI J. (2002) *Le système complexe et cohérent des pratiques de enseignants de mathématique : une double approche*, Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies vol 2/4, pp. 505-528.
69. ROBERT A. (2002-2003), *Des tâches prescrites aux activités potentielles des élèves- Une analyse des pratiques d'enseignement en classe sur les contenus mathématiques et des séances ordinaires*, Séminaire de didactique des disciplines technologiques, pp. 53-68.
70. ROBERT A. (2007) *Stabilité des pratiques des enseignants de mathématiques (second degré) : une hypothèse, des inférences en formation*, Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 27, n°3. pp. 271-312.
71. RODITI E. (2005) *Les pratiques enseignantes en mathématiques, entre contraintes et liberté pédagogiqu*e, L'harmattan, Paris.
72. ROGALSKI J. (2003) *Y a-t-il un pilote dans la classe ? Une analyse de l'activité de l'enseignant comme gestion d'un environnement dynamique ouvert*, Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 23, n°3. pp. 343-388.
73. ROUCHE N. (1992) *Le sens de la mesure*, Didier Hatier, Bruxelles.
74. SEILER H. (1992) *La représentation iconique dans la numération*, Comptes-rendus des séances de l'Académie des inscriptions et belles-lettres, Volume 136, Numéro 2 , pp. 417-425. Disponible sur : http://www.persee.fr/web/revues/home/prescript/article/crai_0065-0536_1992_num_136_2_15114
75. SHRADER J. & SIEGLER R.S. (1998), cité par Verschaffel & Al. (2006), SCADS : *A model of children's strategy choicies and strategy discoveries*, Psychological Sciences, 9, pp. 405-410.
76. TORBEYNS J., VANDERVEKEN L., VERSCHAFFEL L. & GHESQUIÈRE P. (2006) *Adaptative expertise in the number domain 20-100*, Proceedings of the 30th annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, PME30. Disponible sur http://www.emis.de/proceedings/PME30/5/289.pdf
77. TREFFERS A. (2001), cité par Verschaffel & al. (2006) *Numbers and number relationships*. In M. Van den Heuvel (Ed.), Chidren learn mathematics (pp. 101-120), University of Utrech, Freudenthal Institute.

78. VERGNAUD G. (1981) *L'enfant, la mathématique et la réalité*, Berne, Peter Lang.
79. VERGNAUD G. (1991) *La théorie des champs conceptuels*, Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol.10 n° 2/3.
80. VERGNAUD G. (1996) *La théorie des champs conceptuels*. In J. Brun (Ed). Didactique des Mathématiques. Delachaux et Niestlé. Lausanne.
81. VERGNAUD G., RECOPPE M. (2000) *De Revault d'Allonnes à une théorie du schème aujourd'hui*, Psychologie française, vol. 45, n°1, pp. 35-50
82. VERSCHAFFEL L., GREER B., DE CORTE E. (2006) *Whole number concepts and operations*, in Second Hand Book of Research on Mathematics Teaching and Learning, pp. 557-628.
83. WALTER H. (1977) *L'aventure des langues en occident*, Robert Laffont, Paris.

Manuels scolaires

84. « Cap Maths», édition Hatier (2005), de CHARNAY R., DUSSUC M-P. & MADIER D.
85. « J'apprends les maths avec Tchou », éditions Retz (2009), de BRISSIAUD R., CLERC P. & OUZOULIAS A.

Dictionnaires, atlas et documents officiels

84. *Atlas des Mathématiques* (1997), de REINHARDT F. et SOEDER H, Le Livre de Poche, Librairie générale française, Paris. Edition originale : *Atlas zur Mathematik* (1974), Deutscher Taschenbuch Verlag GmbH & Co. KG, Munich.
85. *Dictionnaire historique de la langue française* sous la direction d'Alain Rey (1991, 1998)
86. GOELZER H. (1966) *Dictionnaire Français Latin et Latin Français, Garnier-Flammarion.*
87. NOEL, F (1833). *Dictionnaire latin français*. Disponible sur http://books.google.fr/books?id=CYkSAAAAIAAJ&printsec=frontcover#v=onepage&q&f=false
88. *Rapport Prost 2001 pour la recherche en éducation.* Disponible sur : http://acces.inrp.fr/eedd/climat/recherche/plonearticle.2007-03-14.4187775276/
89. *Programmes de l'école maternelle 2008*. Disponible sur : http://www.education.gouv.fr/bo/2008/hs3/default.htm

90. *Programmes du cycle 2 de l'école élémentaire 2008* (dont le CP). Disponible sur : http://www.education.gouv.fr/bo/2008/hs3/default.htm

Consultés et non cités :

- ASSUDE T., MERCIER A., SENSEVY G. (2007) *Enseigner les mathématiques au CP : éléments de réflexion*, Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2007, pp. 276-306.
- BARUK S. (2003) *Comptes pour petits et grands*, Magnard, volume 1 et 2.
- BRIAND J., SALIN M.H., LOUBET M. (2004) *Apprentissages mathématiques en maternelle*, Hatier CD.
- CAVEING M. (1976). *Analyse del'ouvrage de Geneviève Guitel, Histoire comparée des numérations écrites*. Revue d'histoire des sciences, Numéro 29-1. pp. 81-86.
- CAVEING M (1994) *Essai sur le savoir mathématiques dans la Mésopotamie et l'Egypte ancienne*, Lille.
- DJEBBAR A. (1999) *Traduction et transmission scientifiques aux VIII-Xe siècles*, L'ouvert n°95, Irem Strasbourg.
- EL BOUAZZAOUI H. (1987), citée par CONNE F. (1989), *Etude de situations scolaires des premiers enseignements du nombre et de la numération. Relation entre divers caractères de ces situations et le sens, la compréhension de l'apprentissage de ces notions*, Thèse de doctorat, Irem de Bordeaux, Université Bordeaux I.
- FAYOL M. (1990) *L'enfant et le nombre : Du comptage à la résolution de problèmes*. Paris : Delachaux et Niestlé.
- FAYOL M., BARROUILLET P. & RENAUD A. (1996) *Pourquoi l'écriture des grands nombres est-elle si difficile ?* Revue de Psychologie de l'Education ; 3 ; 87-107
- GUITEL G. (1966) *Classification hiérarchisée des numérations écrites*, Annales Economies, Sociétés, Civilisations, Année 1966, Volume 21, Numéro 5.
- KAMII C. & RUSSEL K. A. (2010) *The Older of Two Trees : Young Children's Development of Operational Time*. Journal for Research in Mathematics Education, 41(1), 6-13.
- LAPARRA M. & MARGOLINAS C. (2008). Les premiers apprentissages de l'écrit : doxa et malentendus des écrits authentiques. *Actes du colloque Les didactiques et leur rapport à l'enseignement et à la formation*, Bordeaux. Disponible sur : http://www.aquitaine.iufm.fr/infos/colloque2008/cdromcolloque/communications/lapa.pdf

- LEFORT J. (2000) *Y a-t-il un naturel après 3 ?*, L'ouvert n°102, Irem Strasbourg.
- LEMONIDIS C. (2004) *L'enseignement des premières notions arithmétiques selon l'analyse des différentes représentations des quantit*és, Annales de didactique et de sciences cognitives, vol. 9, pp. 101-115. Irem de Strasbourg.
- MA I. (1999), cité par Verschaffel & al. (2006) *Knowing and teaching elementary mathematics. Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Erlbaum.
- MALABRY Y. (2010) *Médiation, conceptualisation et pratiques des enseignants*. Université de Cergy, IUFM de Versailles, Disponible sur http://www.fse.ulaval.ca/ldeblois/pdf/Malabry.pdf
- MARGOLINAS C. (1995) *La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations*, in Margolinas eds., *Les débats de didactique des mathématiques*, pp. 89-103, La pensée Sauvage, Grenoble. Disponible sur : http://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00418815/fr/
- PASTRE P. (2007) *Quelques réflexions sur l'organisation de l'activité enseignante*, Recherche et formations, n°56.
- PEPIN (2003) *Une étrange façon de compter*. Défense de la langue française, n°184, http://www.langue-francaise.org/dlf184.PDF
- RAJAIN C. (2007) *Un itinéraire d'enseignement*. Disponible sur http://xxi.ac-reims.fr/ien_st_dizier/maths/cycle2/EssaiNumeration.pdf
- RIGO (2004), *Automates et système de numération*, d'après une mini-conférence à Société Royale des Sciences de Liège en avril 2004 et sur un exposé réalisé à l'IUFM de Reims en juin 2003 (Integrating Technologies into Mathematics Education). Disponible sur : http://www.discmath.ulg.ac.be/papers/srsl.pdf
- SIEGLER R.S. (2007) *Cognitive variability*, Developmental Science 10/1, pp. 104-109

- *Sur la théorie des situations didactiques, questions, réponses ouvertures, Hommage à Guy Brousseau* (2005) Ouvrage collectif, éditeurs Marie-Hélène Salin, Pierre Clanché, Bernard Sarrazy, La Pensée sauvage éditions, Grenoble

- *Avec Vygotski suivi d'une note de Léontiev sur un séminaire de Vygotski* (1999-2002) Ouvrage collectif, 2ème édition augmentée sous la direction d'Yves Clot, édition La Dispute, Paris.

C’est comme ci,
c’est comme ça,
le conte finit là !

Florence Desnouveaux
La Moufle

UNIVERSITE PARIS.
DIDEROT (Paris 7)

ANNEXES

École doctorale : « Savoirs scientifiques : épistémologie, histoire des sciences, didactique des disciplines »

Doctorat
Didactique des mathématiques

MOUNIER Eric

Une analyse de l'enseignement de la numération au CP
Vers de nouvelles pistes

Thèse dirigée par Mme PERRIN-GLORIAN Marie-Jeanne et M. BUTLEN Denis

Soutenue le 14 décembre 2010

Jury
Mme Teresa ASSUDE, présidente
Mme Lucie DEBLOIS, rapporteur
Mme Claire MARGOLINAS, rapporteur
M. Christophe HACHE, examinateur
Mme Marie-Jeanne PERRIN-GLORIAN, directrice de la thèse
M. Denis BUTLEN, directeur de la thèse

ANNEXES A LA THESE

Annexes du chapitre 3

1. L'origine du nom des désignations orales des nombres en français

Les « définitions » suivantes sont extraites du dictionnaire historique de la langue française sous la direction d'Alain Rey (1998).

Dix : adjectif et nom invariable, « « d'abord dis puis diz, est issu (vers 1050) du latin decem « dix », qui contient la racine indoeuropéenne dekm servant à exprimer la notion de dizaine, et représentée dans le grec deka (déca-) et ses composés (dodéca-). Dix, adjectif numéral cardinal, a développé un sens indéterminé existant déjà en latin, et exprimant une petite quantité (1771, en dix lignes) ou un grand nombre de fois, selon le contexte. A partir du 12ème siècle, le mot est employé aussi comme ordinal. Dix, en composition, forme les noms des adjectifs numéraux de la fin de la première dizaine : dix-sept, contraction de dis e set, dix-huit contraction de dis e uit, dix-neuf, contraction de dis e neuf. ». Dixième, d'abord diseme, disime (XIIème siècle) a supplanté dans ses emplois les plus anciens disme (1080), représentant du latin decimus (dîme). Dizain, d'abord dezen (fin Xème siècle), a signifié d'abord dixième, plus récemment (XVème siècle), strophe ou poème de dix vers. Dizaine (1360,1370), désigne un groupe de dix unités.
Onze : adjectif numéral et nom masculin invariable, « est issu du latin undecim « dix plus un » de unus (un) et decem (dix). ». Nous notons aussi que, bien que tombé en désuétude, le terme « onzaine » existe pour indiquer une quantité de onze notamment pour désigner un chandelier à onze branches.
Douze : adjectif numéral et nom masculin invariable « d'abord duze (1080), est issu du latin populaire « dodeci », contraction du latin classique duodecim « douze », formé de duo (deux) et de decem (dix) à l'exemple du grec dôdeka. ». Nous notons que le terme « douzaine » existe pour désigner une quantité de douze et est encore usité. Douzain est le nom d'une monnaie frappée à partir de François 1er et le nom d'un poème ayant douze vers.
Treize : adjectif numéral et nom masculin, « est issu du latin tredecim, proprement « trois plus un », de tres (trois) et decem (dix). ». Trézain (1276) est le nom d'une monnaie ayant cours au moyen âge.
Quatorze : adjectif numéral et nom masculin invariable, « est issu (XIIème) du latin populaire quattordecim, altération du classique quattuordecim de quattuor (quatre) et de decem (dix). Quatorzième a désigné un impôt (XVème).
Quinze : adjectif numéral et nom masculin invariable, « est issu du latin quindecim « dix plus cinq » de quinque (cinq) et decem (dix). ». Quinzaine est d'emploi encore courant particulièrement pour une période de deux semaines. Quinze est employé dans quinze-vingts dans « l'hôpital des quinze-vingts », du fait qu'il possédait à l'origine trois cents lits.
Seize : adjectif numéral et nom masculin invariable, « réfection (vers 1250) de seze (1155) et seise (vers 1220), est issu du latin sedecim, composé de sex « six » et de decem « dix ». ». Dès les premiers emplois il est numéral cardinal et ordinal. Seizain a désigné un poème de seize vers (1574), le quart d'une once et un droit sur le blé (1611), une ancienne monnaie valant le quart d'un écu (1640) et un drap de laine tissé à 1600 fils (1669). Seizaine est un terme technique désignant une petite corde (1752).
Vingt : adjectif numéral et nom masculin, « est la réfection étymologique (vers 1250) de vint (1080), issu du bas latin classique viginti, composé du nom correspondant à deux, suivi d'une forme signifiant dizaine ; l'unité est représentée par vi-, variante de bi-, bis- (bis) « deux fois » (équivalent du grec di-, dis di-) et la dizaine par –gint « dix », présent dans tous les nombres latins de dizaines (trente, quarante, cinquante, etc.). Bis a des correspondants dans les langues indoeuropéennes comme l'avestique bis, le grec dis, le sanscrit dvijh. ».

Trente : adjectif numéral et nom masculin, « est l'aboutissement phonétique (vers 1050), après trenta, d'un latin populaire trinta, contraction du latin classique tringinta « trois fois dix », dérivé de tres (trois), mot panroman sauf en roumain. ». Depuis le XIXème siècle, l'adjectif cardinal est employé aussi comme ordinal. Trentième, vient de trentiesme (1462), réfection de trentisme (vers 1119), également employé comme nom. Trentain désigne une mesure de capacité (1398). Trentaine « nombre de trente ou environ » est attesté vers 1155.
Quarante : adjectif numéral et nom masculin invariable, « est issu (1080) du latin populaire quarranta, attesté dans les inscriptions de la Gaule au Vème siècle, auquel remonte également l'italien quaranta, l'espagnol cuaranta, le portugais quarenta. Quarranta résulte de la contraction du latin classique quadraginta, d'où quadra(g)inta et quadranta, littéralement « quatre dizaines ». quadraginta est formé de quadra, lequel repérsente sans doute un ancien neutre $k\partial tr$ - tiré de quattor (quatre), et de –ginta. ». Quarantième (adjectif ordinal) est la réfection (XVème siècle) de quarantisme (vers 1190). Quarantaine, d'abord quaranteine (XIIème siècle) désigne un nombre d'environ quarante.
Cinquante : adjectif numéral et nom, « (1080) vient du latin des inscriptions cinquaginta, issu par dissimilation du classique quinquaginta. Le mot est employé comme nom et ordinal (1835) et a produit à son tour l'ordinal cinquantième. ». Cinquantaine est attesté en 1220.
Soixante : adjectif numéral et nom masculin invariable, « représente la réfection (vers 1380) d'aorès le latin de l'ancien français siesante (1080), puis seissante (vers 1130), soissante (vers 1228), issu du bas latin sexanta, contraction du latin classique sexaginta, dérivé de sex « six ». Il est employé comme nom et avec la valeur de soixantième (1871). Le dérivé soixantième (1307) (adjectif et nom), a été précédé par sessantisme (1138) et sexantisme (vers 1200). Soixantaine (1399) s'est substitué à sesanteine (1138).
Soixante-dix : adjectif et nom masculin, « réfection (1550) de seisente dis (vers 1165) et témoin de l'ancien système vicésimal, s'est maintenu et a supplanté septante, qui ne l'emporte qu'en français de Suisse et de Belgique. ».
Quatre-vingts : adjectif numéral et nom masculin invariable, « d'abord écrit quatre vins (12ème siècle), qui a également développé qui a également développé des emplois d'adjectif ordinal et de substantif, donnant quatre-vingtième (1530). L'aire d'emploi de ces deux derniers termes est limitée en Suisse et en Belgique par octante ou huitante et octantième. ».
Quatre-vingt-dix : adjectif numéral et nom masculin invariable (1390), l'aire d'emploi de quatre-vingt-dix et quatre-vingt-dixième « est limitée par nonante et nonantième, plus courant [en Suisse et en Belgique] (mais ignorés en France). »
Cent : nom et adjectif, « est hérité (fin Xème siècle) du latin centum « cent » et, par extension, « un grand nombre », mot ayant des correspondances en sanskrit çatàm, le vieux slave suto, le lituanien simtas, l'irlandais cet, le gothiqie hunda- (allemand hundert, anglais hundred) et le grec he-katon. ». Centime (1793 est la centième partie du franc. Le préfixe centi, sert à désigner la centième partie d'une unité dans le système métrique. Centième (1170) vient du latin centisimus. Centaine (1170) est hérité du bas latin centena, attesté au début du 7ème siècle comme terme militaire pour une centaine d'hommes.
Mille : adjectif numéral cardinal « est issu (1050) du latin mille « un millier, mille », spécialement nom d'une unité de longueur, également employé pour désigner un grand nombre indéterminé. Le mot latin, sans origine connue, d'abord déclinable, a été comme indéclinable, probablement d'après decem (dix) et centem (cent) dont il est le multiple dans la numération décimale. Le substantif qui l'accompagne lui a été apposé. Ainsi s'est établie la différence entre le singulier neutre mille et le pluriel millia : le premier a donné au français l'ancienne forme mil et le second le pluriel mille (1208 ; antérieurement millie, 1080, et mile, 1145). Ce dernier l'a généralement emporté devenant un singulier vers 1360-1370, tout en prenant au premier sa prononciation, mais on rencontre encore mil (d'an l'an mil). […] Sur le latin mille, on a formé l'élément milli-, servant depuis la fin du 18ème siècle à former des

noms indiquant la division par mille d'une unité. […] Millier est issu (1080) soit de mille, soit probablement du latin miliarus attesté dans les inscriptions comme nom masculin au sens d' »ensemble de mille », au lieu du latin classique milliarium. Celui-ci est le neutre substantivé de l'adjectif miliarus « qui contient mille », de mille. […] (1213) est issu du latin millesimus « millième, également substantivé au féminin au sens de « la millième partie ». D'abord attesté sous les formes la millesme (1213), milleime (1226), milime (XIIIème siècle) et milisme (XIIIème siècle), le mot a pris sa graphie moderne par dérivation sur mille au début du XIVème siècle. ».
Million : nom masculin, « d'abord millon (1266) puis million (1359), est emprunté à l'italien milione « mille fois mille » (avant 1350), formé sur mille, de même origine que le français mille, à l'aide du suffixe augmentatif –one. Par extension, million, « mille fois mille » est aussi employé au sens indéterminé d'une très grande quantité (1460), renforcé dans mille millions de (1790). ». […] Il a donné millionième, adjectif (1550). ». Mille millions est désigné par milliard, nom masculin, tiré de million avec le suffixe –ard, sous des formes variées, milliares (1538), miliart (1544), miliard et milliard (1688). Ce dernier a donné milliardième.

2. Compléments sur les interprétations

Ces compléments concernent successivement deux des trois interprétations. Le plan est le même pour chacune.
Dans les paragraphes a, nous indiquons tout d'abord ce qui nous a amené à la définition des types de numération telles qu'ils ont été donnés à lire dans la thèse. Cependant, nous ne disposons pas d'une définition fournie par les mathématiques, comme c'était le cas pour la notion de numération issue de la théorie des langages. Ainsi, nous devons procéder différemment. Nous choisissons d'effectuer un mouvement des signes vers les mathématiques, c'est-à-dire en inférant des principes généraux de types de numération à partir des analyses syntaxiques faites auparavant.
Dans les paragraphes b, nous donnons un algorithme de construction associé qui permet ainsi de retrouver la description des représentamens donnée au début du chapitre 3 (dans laquelle nous avons évité les descriptions trop interprétatives).
Ensuite, dans les paragraphes c, nous étudions en quoi les choix des nombres d'appui additifs sont nécessaires ou arbitraires, amorçant un mouvement des mathématiques vers les signes.

Pour distinguer le nombre x de son représentamen, nous notons ce representamen en italique *x*.

2.1 L'interprétation arithmétique multiplicative

a. Définir une numération arithmétique multiplicative : respect des trois principes (exhaustivité, non ambiguïté, non redondance)

Soit la suite $(\mathrm{M_n})$, n entier strictement positif, la suite croissante de ces nombres d'appui multiplicatif. A chacun, on associe la suite croissante des appuyants multiplicatifs $(\mathrm{p_i(n)})$ et la suite croissante des appuyants additifs $(\mathrm{s_j(n)})$ de sorte que la concaténation $p_i(n)\ M_n\ s_j(n)$ ou bien la concaténation $s_j(n)\ M_n\ p_i(n)$ désigne le nombre $\mathrm{p_i(n) \times M_n + s_j(n)}$.

De la condition d'existence d'un représentamen pour chaque nombre, nous dégageons une première contrainte induite par le principe décrit précédemment : les représentamens de $\mathrm{p_i(n)}$, $\mathrm{M_n}$ et $\mathrm{s_j(n)}$ doivent être définis avant leur apparition dans une concaténation. Nous allons voir ultérieurement comment se problème se résout en pratique.

Auparavant signalons tout de suite une deuxième contrainte liée à la diversité des décompositions $p_i(n) \times M_n + s_j(n)$ possibles pour un même nombre. En effet, pour x un nombre entier quelconque, une décomposition est obtenue par une division (avec reste quelconque) de x par M_k, quelque soit le nombre d'appui M_k considéré, ce qui laisse beaucoup de choix mathématiques potentiels. Qui plus est, chaque division par M_k peut donner lieu à une décomposition différente. Ainsi, pour qu'il ne soit pas redondant (c'est-à-dire pour qu'il n'y ait qu'un seul représentamen par nombre), le système de numération doit se plier à <u>une deuxième contrainte</u> qui est d'indiquer quelle décomposition choisir parmi toutes celles possibles. L'option qui a été prise dans la numération parlée en français est de choisir pour un nombre x une décomposition selon le nombre d'appui inférieur le plus grand et d'utiliser le reste le plus petit : ceci correspond à la division euclidienne de x par le plus grand nombre d'appui qui lui est inférieur. Bien que ce choix soit arbitraire, il résout le problème d'une manière pratique[331] et nous n'allons considérer que des numérations arithmétiques avec appuis multiplicatifs ayant fait ce choix

<u>Une troisième contrainte</u> est liée au principe d'exhaustion : tout nombre doit pouvoir être désigné. Du fait des choix précédents, au niveau des relations entre appuis et appuyants ceci se traduit par :

(1) La suite $(s_j(n))$ est constituée des entiers naturels de 1 à M_n - 1.

(2) Pour tout n, les nombres $(p_i(n))$ sont en nombre fini, ils peuvent être rangés selon une progression arithmétique de raison un à partir de un.

(3) Le maximum de la suite $(p_i(n))$ noté p(n) est tel que $M_{n+1} = (p(n)+1) \times M_n$

Réciproquement, une fois posé le principe général constitutif d'une numération arithmétique avec appuis multiplicatifs (voir l'encadré ci-avant), les trois règles (1), (2), (3) entraînent que le nombre est nécessairement interprétable comme égal au développement issu de sa division euclidienne par le plus grand nombre d'appui multiplicatif qui lui est inférieur. Revenons au problème de la première contrainte, c'est-à-dire de la définition des représentamens de $p_i(n)$, M_n et $s_j(n)$ dans la décomposition $p_i(n) \times M_n + s_j(n)$. En considérant les choix faits pour le développement d'un nombre (la division euclidienne selon le plus grand nombre d'appui qui lui est inférieur), il est résolu de facto (sauf à avoir plusieurs désignations pour le même nombre) par un procédé récurent que nous allons décrire à l'aide de deux nouvelles règles. Ce procédé sous-tend toujours que la concaténation $p_i(n)\ M_n\ s_j(n)$ (ou $s_j(n)\ M_n\ p_i(n)$)**,** désigne le nombre $p_i(n) \times M_n + s_j(n)$. Voici les deux règles qui permettent de rendre opérationnelle la mise en signes.

(4) Les représentamens M_n des nombres M_n ainsi que les représentamens $s_j(1)$ sont définis de manière conventionnelle et non redondante.

(5) Principes de récurrence :

- comme $s_j(n)$ est strictement inférieur à M_n, il sera obtenu via une décomposition analysable en terme de division euclidienne de $s_j(n)$ par un appui multiplicatif strictement inférieur à M_n. Le procédé de concaténation est appliqué alors pour obtenir $s_j(n)$.
- en imposant de plus l'inégalité $p_i(n) \leq M_n$ les représentamens $p_1(n)$ des nombres $p_1(n)$ peuvent aux aussi être définis par un procédé identique au précédent.

[331] Ainsi que ceux afférents aux autres contraintes, comme nous allons le voir ci-après.

Nous avons indiqué ainsi les contraintes liées à l'opérationnalité du système de mise en signe décrit dans l'encadré. Un choix a été fait pour répondre à la deuxième contrainte : division euclidienne selon le plus grand appui multiplicatif inférieur au nombre considéré.

b. Un algorithme de construction associé

Définir tous les représentamens des nombres inférieurs à un nombre $\mathrm{M_n}$ demande de définir les représentamens M_k des appuis multiplicatifs inférieurs ou égaux à $\mathrm{M_n}$ et de définir pour chaque $\mathrm{M_k}$ inférieur ou égal à $\mathrm{M_n}$ tous les représentamens $p_i(n)$ et $s_j(n)$ de leurs appuyants multiplicatifs et additifs. De plus, quand on considère les nombres inférieurs à $\mathrm{M_1}$, il va s'agir cette fois-ci de définir leur représentamen $s_j(1)$. Ainsi d'une manière pratique :

1ère étape : on définit les représentamens M_n des nombres $\mathrm{M_n}$ et les représentamens $s_j(1)$.

2ème étape : comme $\mathrm{s_j(n)}$ est strictement inférieur à $\mathrm{M_n}$, son représentamen est obtenu via une décomposition obtenue par division euclidienne de $\mathrm{s_j(n)}$ par un appui multiplicatif strictement inférieur à $\mathrm{M_n}$. Le procédé de concaténation est appliqué alors pour obtenir $s_j(n)$.

En ce qui concerne les représentamens $p_i(n)$ des nombres $\mathrm{p_i(n)}$, pour que le procédé soit opérationnel il est nécessaire qu'ils aient été déterminés avant leur utilisation dans une concaténation. Ainsi, pour ne pas avoir plusieurs désignations pour le même nombre, les nombres $\mathrm{p_i(n)}$ doivent avoir été désignés par le système de numération avant leur premier emploi. Cette condition est assurée lorsque $\mathrm{p_i(n)} \leq \mathrm{M_n}$.

c. Discussion sur les choix des appuis et appuyants en ce qui concerne la numération parlée en France

Reprise de la construction étape par étape

La définition que nous avons donnée se justifie par des options en lien avec des contraintes. La question est alors de voir parmi les choix qui sont encore possibles, quels sont ceux effectués dans la numération parlée en français. Nous allons pour cela préciser tout d'abord l'éventail de ces choix en reprenant une construction étape par étape.

Soit le premier nombre d'appui multiplicatif $\mathrm{M_1}$, il doit être strictement supérieur à deux. D'après (1) et (4), on doit définir les $s_j(1)$, désignant les nombres de 1 à $\mathrm{M_1}$-1. (5) et (2) imposent que les $\mathrm{p_i(1)}$ aient déjà été désignés et qu'ils décrivent les premiers entiers naturels à partir de un. Ainsi, p(1), leur maximum, est inférieur à $\mathrm{M_1}$ et il y a exactement p(1) appuyants multiplicatifs à $\mathrm{M_1}$.

D'après (3), $\mathrm{M_2}$ est un multiple de $\mathrm{M_1}$, c'est (p(1)+1) $\times$ $\mathrm{M_1}$. Comme p(1) est inférieur à $\mathrm{M_1}$, $\mathrm{M_2}$ peut être un multiple quelconque de $\mathrm{M_1}$ mais vérifier l'inégalité $\mathrm{M_1} < \mathrm{M_2} \leq \mathrm{M_1}^2$.

(5) entraîne que les $\mathrm{p_i(2)}$ doivent avoir été désignés. Donc en utilisant (2), leur maximum p(2) doit donc être inférieurs à $\mathrm{M_2}$ et il y a exactement p(1) appuyants multiplicatifs à $\mathrm{M_2}$.

D'après (3), $\mathrm{M_3}$ est un multiple de $\mathrm{M_2}$, c'est (p(2)+1) $\times$ $\mathrm{M_1}$. Ainsi, $\mathrm{M_3}$ peut être un multiple quelconque de $\mathrm{M_2}$ mais vérifier l'inégalité $\mathrm{M_2} < \mathrm{M_3} \leq \mathrm{M_2}^2$.

Le processus continue ainsi de suite. Ainsi, une fois les $p_i(1)$ et M_1 déterminés, on a les trois règles (A), (B) et (C) suivantes qui permettent de choisir successivement à partir de n=2 les $\mathrm{p_i(n)}$, $\mathrm{M_n}$ et $\mathrm{s_j(n)}$.

(A) : p(n), le maximum des appuyants multiplicatifs de M_n, doit être inférieurs à M_n et il doit y avoir exactement p(n) appuyants multiplicatifs à M_n.

(B) : M_{n+1} est un multiple de M_n, c'est $(p(n)+1) \times M_n$. M_{n+1} peut être un multiple quelconque de M_n mais vérifier l'inégalité $M_n < M_{n+1} \leq M_n{}^2$

(C) s(n), le maximum des appuyants additifs de M_n, est égal à M_n - 1.

Ainsi s'il existe des liens de proche en proche, il reste à chaque fois un certain éventail de choix (limité par les choix antérieurs). Notons qu'un choix maximal à chaque fois des M_n (c'est-à-dire en prenant $M_{n+1} = M_n{}^2$) correspond à l'égalité $M_n = M_1^{2^{n-1}}$.

Quels choix pouvons-nous retenir pour notre interprétation de la numération parlée en français ? Voici la suite croissante des désignations des nombres d'appui multiplicatif (des mots-segments) qui semblent candidats : vingt, cent, mille, million, milliard.
Vingt n'est cependant précédé que de rien et de quatre. Il est donc impossible de le considérer comme appui multiplicatif, au vu de l'exhaustion des appuyants multiplicatifs requis jusqu'à une certaine limite p(1) (voir par exemple la règle (A)), car il manque la possibilité d'utiliser les appuyants multiplicatifs « deux » et « trois ». Deux choix s'offrent alors à nous, soit chercher une autre logique pour les nombres inférieurs à quatre-vingt-dix-neuf qui ne fasse pas apparaître vingt comme une exception, soit considérer vingt comme désignant un nombre d'appui multiplicatif en considérant que « quarante » est apparentée à « deux-vingts » et « soixante » à « trois-vingts ». L'analyse morphologique faite auparavant indique cependant que « trente » est à rapprocher de « trois » et quarante de « quatre », ce qui rend très problématique le deuxième choix. De plus des numérations francophones utilisent « octante » au lieu de « quatre-vingts ». Il semble possible d'interpréter quatre-vingts comme un appui additif non multiplicatif[332], c'est ce que nous ferons dans le deuxième interprétant mis en évidence. Mais il semble aussi possible, grâce à l'analyse morphologique de « vingt », « trente », « quarante », « cinquante » et « soixante » de retrouver un nombre d'appui multiplicatif qui serait « dix », bien que la présence de « soixante-dix », « quatre-vingt » et « quatre-vingt-dix » pose question. Un autre argument en faveur de la possibilité de considérer dix comme désignant le premier nombre d'appui multiplicatif est le suivant : si l'on suit la logique de la borne supérieure pour le deuxième nombre-segment (le deuxième nombre d'appui multiplicatif), on trouve dix $\times$ dix. Or, c'est en effet le choix qui est fait, cent, dans l'interprétation que nous avons faite.
Ainsi, pour être cohérent avec notre interprétation, nous avons deux choix principaux pour les nombres d'appui multiplicatif : cent, mille, million, milliard ou bien dix, cent, mille, million, milliard.
Nous allons en particulier étudier les passages successifs d'un nombre d'appui M_n au suivant M_{n+1}, obtenu en multipliant le premier par p(n)+1, p(n) désignant le nombre d'appuyants multiplicatifs à M_n. Pour des raisons pratiques nous noterons <u>p'(n) = p(n) + 1 </u>et ainsi nous avons par définition $M_{n+1} = p'(n) \times M_n$.

[332] Il reste que nous devrons nous interroger sur la présence de « quatre-vingts» dans notre numération parlée.

Etude du 1er choix

Etudions la première suite candidate pour notre interprétation : M_1 désigné par cent, M_2 par mille, M_3 par million, M_4 par milliard[333].

On a $M_2 = \text{dix} \times M_1$, ainsi p'(1) est désigné par dix. Le passage de M_1 à M_2 n'est donc pas optimal, il faudrait pour cela que $M_2 = M_1{}^2$, c'est-à-dire que $M_2 = \text{cent} \times M_1$. Quelle est la raison du facteur dix (p'(1)) pour le passage de M_1 (égal à cent) à M_2 ? Il est difficile de répondre à cette question. Remarquons tout de même que dix×dix est égal à cent. Cette particularité sera exploitée quand nous considérons ci-après dix comme désignant le premier nombre d'appui multiplicatif. Le passage de M_2 à M_3 est par contre maximal puisque $M_3 = M_2{}^2$. Le passage de M_3 à M_4 ne l'est plus. Cependant on a p'(3) = p'(2), et d'ailleurs on a pour n>1, p'(n) = mille. Peut-on expliquer ce phénomène ? Prenons un exemple. Il aurait été théoriquement possible de dénommer le même nombre par

- deux ***cent*** vingt-quatre **mille** quatre **cent** cinquante-trois **<u>millions</u>** cinq **cent** quatre-vingt-un **<u>mille</u>** trois **<u>cent</u>** vingt-trois, qui utilise le passage maximal de M_3 à M_4 $M_4 = \text{un million} \times M_3$.

au lieu de notre dénomination usuelle

- deux **cent** vingt-quatre **<u>milliards</u>** quatre **cent** cinquante-trois **<u>millions</u>** cinq **cent** quatre-vingt-un **<u>mille</u>** trois **<u>cent</u>** vingt-trois, qui utilise le passage utilisé dans notre numération parlée $M_4 = \text{mille} \times M_3$.

Nous voyons que la première désignation met en jeu la compréhension de cent comme un mot-segment désignant un nombre d'appui multiplicatif suivant trois degrés de segmentation :
- pour une segmentation principale - **<u>1er degré</u>** - dans trois **<u>cent</u>** vingt-trois,
- une segmentation secondaire – **2ème degré** – dans quatre **cent** cinquante-trois et dans cinq **cent** quatre-vingt-un, utile pour indiquer le nombre précédent le mot-segment d'une segmentation principale
- une segmentation tertiaire – ***3ème degré*** **-** dans deux ***cent*** vingt-quatre, utile pour indiquer le nombre précédant le mot-segment d'une sous-segmentation (segmentation de 2ème degré).

La deuxième dénomination, celle que nous utilisons, met en jeu uniquement deux degrés pour le mot « cent ».
- pour une segmentation principale - **<u>1er degré</u>** - dans trois **<u>cent</u>** vingt-trois,
- une segmentation secondaire – **2nd degré** – dans quatre **cent** cinquante-trois, dans cinq **cent** quatre-vingt-un, mais aussi dans deux **cent** vingt-quatre, utile pour indiquer le nombre précédent le mot-segment d'une segmentation principale.

En outre notre désignation usuelle permet de considérer les autres mots-segments mille, million, milliard, etc., uniquement au premier degré de segmentation.

Ceci est à mettre en relation avec une décomposition unique de chaque nombre entier sous la forme :

$\sum_{i=0}^{n} a_i \times \text{mille}^i$, a_i étant un nombre entier strictement inférieur à mille, mille^i est le nombre désigné par un pour i=0, par mille pour i=1, par un million pour i=2, par un milliard pour i=3. Autrement-dit, les principes de la base mille permettent de retrouver une logique dans certains choix de notre système de numération parlé, interprétée comme une numération arithmétique avec appuis multiplicatifs. L'adéquation est complète lorsqu'on prend la suite des nombres

[333] Dans ce qui suit, nous confondrons le représentamen et le nombre qu'il désigne. En effet nous devons considérer des relations arithmétiques que la distinction des deux rend difficile à écrire. Ainsi nous n'écrirons pas (le nombre désigné par dix) × (le nombre désigné par cent), mais directement dix × cent.

d'appui multiplicatifs suivants : M_1 désigné par mille, M_2 par million, M_3 par milliard, et on a ainsi $\sum_{i=0}^{n} a_i \times M_i$

Dans cette interprétation, le mot « cent » apparaît alors comme un mot-segment indiquant toujours une segmentation de 2nd degré pour désigner des nombres inférieurs à mille. Nous voyons le rôle joué par des nombres-segments constitutifs de la base, les mille^i pour i entier naturel supérieur ou égal à 1, qui correspondent à ce que nous nommons des mots-segments principaux, mille, million, milliard, billion, etc., désignant des appuis multiplicatifs principaux. Notre numération parlée, vue ainsi, sous-tend des principes de base mille.
Mathématiquement la question du choix du premier nombre d'appui ne se pose pas, ce choix est rigoureusement arbitraire. Il est lié cependant au fait que tous les nombres inférieurs ou égaux à M_1 sont désignés par un représentamen qui est quelconque du point de vue des mathématiques. Dans la numération française, nous observons des régularités dans les représentamens des nombres inférieurs à cent, il semble donc y avoir d'autres principes qui guident l'établissement de ces désignations. Nous nous posons la question de savoir s'ils peuvent sous-tendre des principes d'une numération arithmétique avec appuis multiplicatifs. C'est pourquoi nous faisons l'étude d'un deuxième choix.

Etude du 2ème choix

M_1 désigné par dix, M_2 par cent, M_3 par mille, M_4 par million et M_5 par milliard.

M_1 désigné par dix oblige à considérer beaucoup d'irrégularités comme des exceptions ou bien à utiliser une analyse morphologique plus fine (pour onze, douze, treize, quatorze, quinze, seize, vingt, trente, quarante, cinquante, soixante), analyse qui permettrait d'interpréter ces représentamens comme des concaténations. Nous ne rentrons pas ici plus en avant dans cette discussion, car nous essayons de voir si la suite des appuis multiplicatifs comporte une certaine régularité dont nous pourrions retrouver la logique à partir du premier nombre d'appui désigné par dix. Dans ce deuxième choix, le deuxième nombre d'appui multiplicatif est désigné par « cent », ce qui correspond au choix maximal. Le choix de cent est donc interprétable comme consécutif à celui de dix. Le suivant mille[334], n'est pas maximal, mais il suit une même logique de suite constante des multiplicateurs successifs entre les nombres d'appui, ici ce multiplicateur étant dix. Comme précédemment, nous pouvons retrouver la trace d'une base, cette fois-ci il s'agit de la base dix pour les nombres inférieurs à mille.

2.2 L'interprétation arithmétique additive

a. Définir une numération arithmétique additive : respect des trois principes (exhaustivité, non ambiguïté, non redondance)

En considérant l'analyse syntaxique faite dans la thèse, nous posons que le principe général constitutif d'une numération arithmétique avec appui additifs qui permet de relier un nombre à son représentamen est le suivant :

> Soit la suite (A_n), n entier strictement positif, une suite croissante de nombres d'appui additif. A chacun, on associe la suite croissante des appuyants additifs $(s_j(n))$ de sorte que la concaténation $A_n\ s_j(n)$ ou bien la concaténation $s_j(n)\ A_n$ désigne le nombre $A_n + s_j(n)$.

334 Notons cependant que certaines désignations anciennes en français indiquent un autre palier, deux mille : douze cent quarante remplace mille deux quarante jusqu'à dix-neuf cent quatre-vingt-dix-neuf qui remplace mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf, mille ne se disant cependant jamais dix cents à notre connaissance.

Pour fixer les idées, prenons l'exemple des appuis additifs désignés par cent et trois cents dans notre numération parlée en France. Leurs appuyants additifs sont identiques, ce sont les nombres de un à quatre-vingt-dix-neuf. Tout comme une numération arithmétique avec appuis multiplicatifs, ce principe seul n'assure pas une non ambiguïté, une exhaustivité et une non redondance du système. C'est pourquoi nous allons l'étudier plus en avant.
De la condition d'existence d'un représentamen pour chaque nombre, nous dégageons une première contrainte induite par le principe décrit précédemment : les représentamens de A_n et $s_j(n)$ doivent être préalablement définis. Nous allons voir ultérieurement comment se problème se résout en pratique.
Soit x un nombre entier quelconque, une décomposition selon un des nombres d'appui additif A_k est obtenue par soustraction entre x et A_k. Mathématiquement, chaque soustraction par un M_k peut donner lieu à une désignation. Pour répondre à cette deuxième contrainte qui permet de rendre la numération non redondante, on doit choisir la décomposition parmi toutes celles possibles. L'option qui a été prise dans la numération parlée en français est de choisir pour un nombre x une décomposition selon le nombre d'appui inférieur le plus grand. Ceci entraine que la suite $(s_j(n))$ est finie et décrit tous les nombres entiers inférieurs à $A_{n+1} - A_n$.
En prenant en compte la première contrainte on obtient alors
(1) Pour tout n> 0, $A_{n+1} - A_n \leq A_n$, c'est-à-dire que $A_{n+1} \leq 2A_n$
Cette dernière inégalité permet à la numération de se plier aux deux contraintes. Pour un nombre x, le principe est donc d'utiliser la décomposition additive selon le plus grand nombre d'appui additif qui lui est inférieur x = $A_{k(x)} + s_j(k(x))$. Ensuite pour obtenir une numération non redondante et exhaustive (troisième contrainte), on impose d'utiliser le représentamen de $s_j(k(x))$ déjà défini.
Cet ensemble définit une numération arithmétique avec appuis additifs que nous nommerons parfois de manière plus courte « numération arithmétique additive ».

b. Un algorithme de construction associé

Soit la suite (A_n), n entier strictement positif, une suite croissante de nombres d'appui additif. A chacun, on associe la suite croissante des appuyants additifs $(s_j(n))$ de sorte que la concaténation $A_n\ s_j(n)$ ou bien la concaténation $s_j(n)\ A_n$ désigne le nombre $A_n + s_j(n)$.
Pour tout n> 0, $A_{n+1} - A_n \leq A_n$, c'est-à-dire que $A_{n+1} \leq 2A_n$
Pour tout n> 0, $s_j(n)$ décrit tous les entiers de l'intervalle $[[1\ ;\ A_{n+1} - A_n - 1]]$.
Soit x un nombre entier quelconque, la décomposition additive est obtenue par soustraction entre x et A_k, A_k étant le plus grand nombre d'appui inférieur à x. On a donc $x = A_{k(x)} + s_j(k(x))$, et ainsi le représentamen de x est $s_j(k(x))\ A_{k(x)}$ ou $A_{k(x)}\ s_j(k(x))$.

c. Discussion sur les choix des appuis additifs et appuyants en ce qui concerne la numération parlée en France décrite avec la suite (A_n).

Reprise de la construction étape par étape

La numération se fonde donc selon un procédé de récurrence dans le sens où il est obligatoire de définir les représentamens des nombres au fur et à mesure, dans l'ordre croissant à partir de un. La définition que nous avons donnée se justifie par des choix en lien avec des contraintes. La question est alors de voir parmi les choix qui sont encore possibles, en quoi la numération

parlée en français se distingue. Nous allons pour cela préciser l'éventail de ces choix en reprenant une construction étape par étape.
$1^{\text{ère}}$ étape : définition des représentamens des nombres de un à A_1
$2^{\text{ème}}$ étape : définition des représentamens des nombres de A_1 à A_2, sachant que $A_2 \leq 2A_1$, par concaténation de A_1 et de représentamens définis à la première étape. Les appuyants additifs de A_1 sont les entiers de l'intervalle $[[1\ ;\ A_2 - A_1 - 1]]$.
$3^{\text{ème}}$ étape : on réitère le processus de la deuxième étape. On définit les représentamens des nombres de A_2 à A_3, sachant que $A_3 \leq 2A_2$, par concaténation de A_2 et de représentamens définis aux deux premières étapes. Les appuyants additifs de A_2 sont les entiers de l'intervalle $[[1\ ;\ A_3 - A_2 - 1]]$.
$n^{\text{ième}}$ étape : on réitère le processus. On définit les représentamens des nombres de A_{n-1} à A_n, sachant que $A_n \leq 2A_{n-1}$ par concaténation de A_{n-1} et de représentamens définis aux $(n-1)^{\text{ième}}$ premières étapes. Les appuyants additifs de A_{n-1} les entiers de l'intervalle $[[1\ ;\ A_n - A_{n-1} - 1]]$.

Présentation des différents choix

S'il existe des liens de proche en proche, il reste à chaque fois un certain éventail de choix (limité par les choix antérieurs). Notons qu'un choix maximal à chaque fois des A_n, $A_{n+1} = 2A_n$, mène à la suite géométrique $A_n = 2^{n-1}A_1$. La numération parlée en français n'a pas fait ce choix. En effet, en prenant dix pour A_1, on aurait vingt pour A_2, puis quarante pour A_3. Ainsi le nombre que nous désignons par trente-neuf serait désigné par vingt-dix-neuf. Ceci nous engage alors à considérer que dans la numération parlée en français A_3 c'est trente.
Ainsi pour notre numération on peut considérer une première éventualité : dix pour A_1[335], vingt pour A_2, trente pour A_3, quarante pour A_4, cinquante pour A_5, soixante pour A_6. Pour la suite deux options sont possibles. Si on suit la logique d'une numération parlée en Suisse ou en Belgique, on a septante (soixante-dix) pour A_7, octante (quatre-vingts) pour A_8, nonante (quatre-vingt-dix) pour A_9. Si on prend la numération parlée en France, on a quatre-vingts pour A_7. Ensuite dans les deux cas les appuis additifs sont cent, deux cents, trois cents, quatre cents, cinq cents, six cents, sept cents, huit cents, neuf cents, mille. Mais il est aussi possible de considérer une autre éventualité : vingt est le premier appui additif. Ce qui nous donne trois possibilités principales.

1er choix

dix pour A_1 le premier appui additif, vingt pour A_2, trente pour A_3, quarante pour A_4, cinquante pour A_5, soixante pour A_6, soixante-dix (septante) pour A_7, quatre-vingts (octante) pour A_8, quatre-vingt-dix (nonante) pour A_9, puis, cent, deux cents, trois cents, quatre cents, cinq cents, six cents, sept cents, huit cents, neuf cents, mille.

[335] Nous utilisons le fait que la suite onze, douze, treize, quatorze, quinze, seize, est morphologiquement interprétable en termes de dix-un, dix-deux, dix-trois, dix-quatre, dix-cinq, dix-six. Cette interprétation n'est pourtant pas incontestable puisque nous n'avons pas trouvé d'ouvrages indiquant que le suffixe « ze » fait étymologiquement référence à dix.

2$^{\text{ème}}$ choix

dix pour A_1 le premier appui additif, vingt pour A_2, trente pour A_3, quarante pour A_4, cinquante pour A_5, soixante pour A_6, quatre-vingts pour A_7, puis, cent, deux cents, trois cents, quatre cents, cinq cents, six cents, sept cents, huit cents, neuf cents, mille.

3$^{\text{ème}}$ choix

vingt pour A_1 le premier appui additif, trente pour A_2, quarante pour A_3, cinquante pour A_4, soixante pour A_5, quatre-vingts pour A_6, puis, cent, deux cents, trois cents, quatre cents, cinq cents, six cents, sept cents, huit cents, neuf cents, mille.

Un 4$^{\text{ème}}$ choix consiste à prendre pour appuis additifs la suite vingt, trente, quarante, cinquante, soixante, soixante-dix (septante), quatre-vingts (octante), quatre-vingt-dix (nonante), puis, cent, deux cents, trois cents, quatre cents, cinq cents, six cents, sept cents, huit cents, neuf cents, mille. L'étude fait par la suite est adaptable sans difficulté à ce dernier choix.

Etude des différents choix

Nous observons que nous pouvons interpréter la numération parlée en France comme une numération arithmétique avec appuis additifs décrivant (au moins partiellement) des suites arithmétiques de raison dix ou/et vingt pour les nombres inférieurs à cent, et cent pour les nombres de cent à mille. Nous constatons de plus que les appuyants additifs de A_n ne sont pas en général tous les représentamens des nombres inférieurs à A_n, mais ceux inférieurs à un certain A_k, $\mathrm{A}_k < \mathrm{A}_n$ et ce pour tous les A_i tels que $\mathrm{A}_k < \mathrm{A}_i \leq \mathrm{A}_n$. Ainsi par exemple pour la deuxième possibilité, pour tous les nombres inférieurs à soixante (A_6), les appuyants additifs des appuis additifs A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 sont les nombres de un à neuf, c'est-à-dire les nombres strictement inférieurs à A_1 (dix). Pour les nombres entre soixante (A_6) et cent (A_8), les appuyants additifs des appuis additifs A_6 et A_7 (quatre-vingts) sont les nombres de un à dix-neuf, c'est-à-dire les nombres strictement inférieurs à A_2, et finalement, pour les nombres entre cent (A_8) et mille, les appuyants additifs des appuis additifs A_9 (deux cents), A_{10} (trois cents), A_{11} (quatre cents) A_{12} (cinq cents), A_{13} (six cents), A_{14} (sept cents), A_{15} (huit cents), A_{16} (neuf cents) sont les nombres de un à quatre-vingt-dix-neuf, c'est-à-dire les nombres strictement inférieurs à A_8. Pour éclairer ces régularités, nous pouvons envisager une autre façon de comprendre la numération. Il s'agit de privilégier certains appuis (des appuis additifs principaux) avec certains appuyants afin de générer les autres appuis : par exemple l'appui A_1 (dix) et ses appuyants de un à neuf qui permettent d'obtenir les autres appuis de la même « famille » A_2, A_3, A_4, A_5 ; l'appui soixante (A_6) et ses appuyants de un à dix-neuf qui permettent d'obtenir l'autre appui de la même « famille » A_7 (quatre-vingts) ; l'appui A_8 (cent) et ses appuyants de un à quatre-vingt-dix-neuf qui permettent d'obtenir les autres appuis de la même « famille » A_9 (deux cents), A_{10} (trois cents), A_{11} (quatre cents) A_{12} (cinq cents), A_{13} (six cents), A_{14} (sept cents), A_{15} (huit cents), A_{16} (neuf cents). Cette façon d'envisager la structure des appuis et appuyants nous permet de comprendre au niveau linguistique les choix faits en termes d'économie de mots à employer : cet éclairage met en exergue une autre façon de décrire la numération additive, utilisant des couples (G_i, n_i). C'est ce qui a été exploité donné dans la thèse.

Annexes du chapitre 6

Présentations détaillées des séances clés dans les différents manuels.

1. « Cap Maths ».

Présentation détaillée de la séquence clé[336]

La séquence « grand Ziglotron » est la séance clé quant à l'interprétation de la numération écrite chiffrée : un sens est donné à chacun des chiffres en relation avec une « désignation des groupements ». Elle précise les prescriptions données dans la présentation du livre du maître. Elle comporte quatre séances, les séances 1, 2, 3, 4 de l'unité 8. Ces dernières ont toutes le même contexte, une histoire racontée aux enfants. Il s'agit de faire une commande d'une certaine quantité de « boutons » représentés par des carrés sur une feuille sur laquelle est dessiné un robot (un Ziglotron) afin de le « réparer ».

- La séance 1 est décrite dans le guide de l'enseignant p.151. Elle requiert les fiches 34, 35 et 36 du matériel photocopiable fourni avec le manuel Cap Maths (des Ziglotrons dessinés sur une feuille A4 sur lesquels sont figurées les collections de référence) ainsi que des ciseaux et une feuille blanche par équipe de deux élèves. Certains élèves (clients) doivent indiquer à d'autres élèves situés à l'autre bout de la classe (les vendeurs) le nombre d'éléments d'une collection figurée par des petits carrés d'environ 7mm de côté (les « boutons » manquant pour réparer le Ziglotron) répartis de manière quelconque sur une feuille papier de format A4. Le Ziglotron n'est pas transportable et un seul voyage est permis. De plus les « boutons » à vendre se trouvent sous la forme de deux conditionnements différents (ce qui est connu des élèves) : des « boutons » seuls superposables à ceux figurés sur le grand Ziglotron, et des plaques de dix boutons. Aucun autre matériel n'est disponible, si ce n'est des ciseaux pour découper les plaques de dix lors de la validation, celle-ci se fait par association (superposition) des boutons commandés sur la fiche « grand Ziglotron ». Dans cette première séance, la commande (nécessairement orale) se fait sans restriction sur la formulation et le type de boutons disponibles (seuls ou en plaques de dix). Les nombres en jeu sont, suivant les élèves, 23, 30 ou 37.
- La séance 2 est décrite dans le guide de l'enseignant p.152 et 153. Elle requiert les fiches 38, 39, 40 et 41 du matériel photocopiable fourni avec le manuel Cap Maths (des Ziglotrons dessinés sur une feuille A4 et un bon de commande pré-rempli à compléter) ainsi que des ciseaux et une feuille blanche par équipe de deux. Dans cette deuxième séance, on impose de formuler la commande par écrit (bon de commande) et le nombre de boutons isolés est limité à neuf par commande. Dans ce bon de commande, il est attendu dans la première ligne une écriture chiffrée (28, 34 ou 45 suivant les élèves) puis dans la deuxième ligne une formulation sous la forme d'un nombre de paquets de dix boutons et de boutons (non groupés). Il s'agit de compléter les phrases, présentées dans cet ordre sur le bon de commande « Il faut ... boutons » et « Notre commande : ... de dix boutons, ... boutons ».
- La séance 3 est décrite dans le guide de l'enseignant p.156 et 157. Elle requiert les fiches 37, 41 et 42 du matériel photocopiable fourni avec le manuel Cap Maths (des Ziglotrons dessinés sur une feuille A4 et un bon de commande à compléter) ainsi que des ciseaux et une feuille blanche par équipe de deux. Son déroulement est le même que celui de la séance 1, mais cette fois-ci un seul Ziglotron, commun à tous et affiché au tableau, est en jeu. Chaque élève doit compléter le bon de commande suivant : « Il faut 42 boutons. Notre commande : ... de dix boutons, ... boutons ». Les réponses des élèves sont étudiées en classe entière.

[336] Ces séances sont à nouveau présentées dans le chapitre 8.

- La séance 4 est décrite dans le guide de l'enseignant p.159 et 160. Elle requiert le fichier élève p. 70 exercices 2 et 3. Elle consiste à compléter des bons de commande dans lesquels il manque soit la première ligne (écriture chiffrée, soit la deuxième ligne (expression de la quantité en termes de paquets de dix boutons et de boutons isolés). Les désignations en jeu sont 36, 30, 82 ainsi que « 7 paquets de dix boutons et 8 boutons », « 4 paquets de dix boutons et 0 bouton », « 3 paquets de dix boutons et 7 boutons » et « 1 paquet de dix boutons et 5 boutons ».

Précisions sur les informations relevées :

Dans la séance 1 décrite p. 151 du guide du maître aucune écriture chiffrée n'est prévue : « *Il est possible que certains groupes aient d'abord dénombré un à un les boutons manquants sur le Ziglotron, puis demandé des paquets de dix et des boutons isolés. Ces élèves ont déjà la capacité à décomposer le nombre en groupements de dix et en unités ! Leur proposition est acceptée, sans être valorisée pour le moment* ». Il est donc attendu ici que les élèves expriment le cardinal de la collection à l'aide de la désignation parlée afin d'en obtenir une désignation du type « ... paquets de dix boutons et ... boutons » : les désignations orales en jeu sont « vingt-trois », « trente » et « trente-sept ». Il est visé à terme que les élèves repèrent dans les désignations orales une décomposition en « groupements de dix et en unités ». Cet objectif est aussi visible dans la séance 2, mais de manière indirecte. En effet, dans celle-ci les élèves doivent remplir un bon de commande dans lequel on demande tout d'abord l'écriture chiffrée puis une désignation de la quantité en termes de « ... paquets de dix boutons et ... boutons ». La stratégie attendue consiste à obtenir une désignation parlée pour obtenir une désignation écrite puis ensuite une désignation de la quantité en termes de « ... paquets de dix boutons et ... boutons » : « *Ces contraintes supplémentaires*[337] *sont destinées à obliger les élèves à prendre en considération les groupements de dix, soit au moment du dénombrement en faisant des paquets de dix (le nombre total de boutons peut alors être trouvé en comptant de dix en dix), soit après dénombrement un par un et écriture du nombre de boutons, en interprétant les chiffres de l'écriture obtenue ou encore en décomposant le nombre en somme d'un certain nombre de dix et d'un nombre inférieur à dix.* », p. 154 du guide du maître. L'obtention de la désignation chiffrée préalable est envisagée via la désignation orale grâce en particulier au parallèle entre les régularités de la comptine orale (vingt, trente, quarante) et celles de la suite chiffrée (c'est celle qui a été prescrite dans les séances antérieures). Dans l'extrait précité, rien ne nous indique comment est obtenue une désignation de la quantité en termes de « ... paquets de dix boutons et ... boutons ». Cependant par la suite, dans les indications sur la mise en commun à faire avec les élèves, la vérification de la réponse est envisagée soit par un recomptage « *revenir aux plaques et aux boutons, et compter un par un les boutons pour savoir si on arrive bien au nombre voulu* », soit dans son lien avec la désignation parlée « *dire par exemple que, « 3 plaques ça fait 30 boutons » (en le justifiant de diverses manières) « et encore 4 boutons, ça fait bien 34*[338] », soit en utilisant les chiffres de l'écriture chiffrée « dire que « *c'est juste, ça se voit, parce que dans 34, on voit le 3 et le 4 ; le 3 ce sont les plaques de dix et le 4 les boutons tout seuls* ». Ainsi, est attendu un lien direct entre l'écriture chiffrée et la désignation du type « ... paquets de dix boutons et ... boutons »[339], lien qui est constaté a

[337] Il s'agit des contraintes supplémentaires données dans la consigne et traduites en partie par des considérations matérielles : le fait de demander une écriture chiffrée puis « *le nombre de plaques et le nombre de boutons isolés* », le fait de ne pouvoir obtenir que neuf « *boutons isolés* » et le fait de ne pas effectuer une validation avant la mise en commun en classe entière dirigée par l'enseignant, p. 153 du manuel du maître.

[338] Le fait d'employer le mot « dire » indique que les écritures 3, 30 et 34 désignent les désignations orales « trois », « trente » et « trente-quatre ».

[339] Il s'agit bien ici de la désignation du type « ... plaques de dix et ... unités » et non d'une des désignations possibles du même type, puisque les contraintes matérielles entraînent son unicité.

posteriori. Ce lien est en effet justifié par la mise en parallèle avec les deux autres possibilités de vérification, par un recomptage un à un et par un lien direct avec la désignation parlée. En effet, comme dans la séance 1, ce lien entre désignation orale et désignation du type « ... paquets de dix boutons et ... boutons » est aussi attendu sans passer par l'écriture chiffrée. La recommandation « *en le justifiant de diverses manières* » n'apporte pas ici d'informations sur sa teneur.
Par la suite, la non présence du matériel (séance 3) a pour but de montrer qu'il est possible (et plus rapide) de faire directement le lien entre la désignation écrite chiffrée et la désignation du type « ... paquets de dix boutons et ... boutons », sans passer par la désignation orale. La synthèse prescrite de la séance 3 fait jouer à la désignation orale un rôle de preuve : « *Dans 42, il y a 4 groupements de dix (4 dix ou encore quarante) et 2 « tout seuls » (ou unités). On peut le traduire en écrivant : 42=40+2 ou encore 42=10+10+10+10+2 (on trouve bien quarante-deux en comptant alors dix, vingt, trente, quarante, quarante-deux).* », p. 157 du livre du maître. Dans les recommandations en direction de l'enseignant, p. 157 du guide du maître, est écrit : « *Les nombres proposés ne sont pas nécessairement lus par les élèves. C'est l'écriture chiffrée qui est analysée, indépendamment de sa traduction orale* » et dans la séance 8 (p.169 du livre du maître) nous relevons dans la synthèse sur la valeur positionnelle des chiffres : *« Dans l'écriture d'un nombre avec deux chiffres, ceux-ci ne représentent pas la même valeur. Par exemple, dans 43, 4 représente 4 groupements de dix (ou quarante) et 3 représente 3 unités (ou trois). 43=10+10+10+10+3 et se lit quarante-trois »*.

2. « J'apprends les maths avec Tchou ».

Nous reproduisons les textes complets de la séance clé p. 74-75, donnés p. 117 du livre du maître qui décrivent de manière précise les « *activités* » proposées.

Activité A : Compteur des nombres « comme Perrine » « en avançant »

L'activité commence alors que le fichier est fermé. L'enseignant dessine 10 points « comme Perrine » sur le tableau et rappelle aux élèves que c'est un groupe de dix (cela a déjà été vu lors de la séquence p. 62 folio élève). Il dessine un point de plus à côté et décrit la collection de la manière suivante : « c'est 1 groupe de dix et 1 point isolé », en expliquant que le mot « isolé » signifie « qui n'est pas groupé par dix ». Les élèves doivent alors écrire ce nombre sur leur ardoise et l'enseignant interroge un élève pour qu'il dise comment se dit ce nombre comme Tchou et comme nous. L'enseignant signifie que « dix et un » signifie un groupe de dix et encore 1. Il dessine « un point de plus » et décrit ce qu'il obtient comme « 1 groupe de dix et 2 points isolés » ; il interroge de même sur l'écriture et les noms de ce nombre. Les élèves s'approprient ainsi la description des nombres sous la forme « 1 groupe de dix et x points isolés ». Un premier moment crucial est évidemment le cas de 2 groupes de dix et 0 point isolé : ce nombre s'écrit avec « 2 » (les groupes de dix) et « 0 » (les points isolés) ; il se dit « deux dix » ou « vingt ». Pour gagner du temps, l'enseignant peut, après 24 et après 34, dessiner d'emblée 4 points de plus pour arriver plus rapidement au cas où il y a 3 ou 4 groupes de dix et 0 points isolé. Dès que c'est possible, on laisse la description « n groupes de dix et x points isolés » à la charge des élèves.

Activité B : Compteur des nombres sur les doigts « en avançant »

L'activité commence directement sur le fichier. L'enseignant écrit le nombre 12 au tableau ou, mieux, il se sert du matériel utilisé lors de la séquence 44 folio élève (carré jaune et rectangle orange) pour afficher l'écriture « 12 ». Il demande ensuite de colorier 12 doigts. On s'interroge ensuite « Qu'est-ce qui correspond au '1' et au '2' de '12' ? ». Le même questionnement est mené avec 13 : il s'agit évidemment de colorier 1 nouveau doigt pour qu'il y en ait 13 coloriés en tout.

On passe ensuite directement à 19, puis 20, 23, 29, 30, 32, puis 40. Le matériel correspondant, c'est-à-dire des carrés jaunes pour 20, 30 et 40, est téléchargeable sur le site compagnon de J'apprends les maths CP (japprendslesmaths.fr).
Pour chacun des nombres précédents, il s'agit de comprendre que le premier chiffre de leur écriture indique le nombre de groupes de dix doigts, c'est-à-dire le nombre d'enfants qui ont levé tous leurs doigts, alors que le second chiffre indique le nombre de doigts levés par l'enfant qui ne les a que partiellement levés. L'usage du matériel (superposition du chiffre des unités sur l'écriture du nombre correspondant aux dizaines complètes) favorise la coordination des différents points de vue. Trente-quatre, par exemple, c'est : 34 doigts levés ; 3 groupes de dix doigts levés et encore 4 doigts ; 30 doigts levés et encore 4 doigts.

Activité C : Dictée de groupe de dix et de « uns » isolés

L'activité peut commencer sur l'ardoise. L'enseignant dicte : « 3 groupes de dix et 4 points isolés », et les élèves écrivent le nombre correspondant. Les élèves montrent ce qu'ils ont écrit et l'enseignant interroge un élève sur la façon dont se dit ce nombre « comme Tchou » et « comme nous ». L'interrogation portera également sur les nombres compris entre 10 et 20, voire sur les nombres inférieurs à 10 ; « 0 groupes de dix et 7 points isolés ». Dans ce dernier, on découvre qu'on n'écrit généralement pas le « 0 » qui indique l'absence de groupes de dix, mais que sur une horloge digitale, par exemple, 7 minutes s'écrit « 07 ». La dictée peut ensuite se faire sur le fichier.

Activité D et E : Dessiner des nombres supérieurs ou égaux à 20 « comme Perrine »

Les élèves ont appris à dessiner les nombres « comme Perrine » jusqu'à 10. L'activité A, dont ils voient une trace sur le fichier dans le cadre correspondant, leur indique comment on dessine 20, 24, 30 et 34 points comme Perrine. En fin d'activité, on a une nouvelle occasion de remarquer que 24 c'est 20 et encore 4, et que 34 c'est 30 et encore 4.

Annexes du chapitre 8

Mme B.

1ère Séance (56'40) Cap Maths « Grand Ziglotron »

Mars 2009

<table>
<tr><th colspan="3">Lancement : 0' - 15'05
L'enseignante est debout devant le tableau la majorité du temps. Elle s'adresse à toute la classe et sollicite les élèves en leur posant des questions mais aussi en leur laissant la possibilité de réagir (ils lèvent la main pour prendre la parole qui leur est donnée par l'enseignante).</th></tr>
<tr><th colspan="3">1er épisode : premières indications de la tâche 1 des élèves</th></tr>
<tr><td></td><td>Description :
L'enseignante, devant le tableau, évoque une séance semblable vécue avec le (petit) ziglotron, une fiche ziglotron est montrée. Les élèves commentent en particulier le matériel nouveau qui passe de main en main : les « boutons » seuls sous forme de carré et les deux formes de conditionnement en plaques de dix. Les élèves ne savent pas encore ce que va être la séance du jour.
Contenu :
Le but de la tâche 1 indiqué est « réparer le</td><td>0'
B : Alors, je vais devoir parler fort, alors faites des efforts pour m'écouter. Souleymane et Camélia ! Mylène ! Tout le monde est là ? Bon on attend Lucas. Ca y est ?
Alors, figurez-vous que pendant les vacances, il y a encore Fripouille qui a fait des siennes avec les Ziglos.
Les élèves : Oh non !
B : Il a encore fait des siennes, il a encore arraché les boutons des Ziglotrons.
Les élèves : Oh !
B : Le coquin !
Les élèves : Il dort
B : Tant mieux parce qu'on va encore travailler sur les Ziglotrons encore aujourd'hui.
Des élèves : Ouais !
B : Seulement cette fois ils sont un peu plus grands, c'est des grands Ziglotrons avec beaucoup de boutons. On peut dire que c'est des adultes. Je vais vous en montrer un (elle montre), c'est les plus grands.
Les élèves : Oh !
B : Alors, c'est la même forme mais ils sont plus grands. C'est comme des frères, c'est des cousins. Donc cette fois Gribouille il a arraché tous les boutons.
?: Sauf que c'est des carrés.
B : Oui il y a des petits changements : les boutons sont carrés.
?: Il y a un Z !
?: C'est comme Zoé !
B : Je crois que c'est le Z de Ziglotron, c'est le Z de Ziglotron, mais c'est comme Zoé tu as raison. Bon on va pas parler tous en même temps parce qu'on va pas s'entendre.</td></tr>
</table>

	grand ziglotron », mais aucune indication n'est donnée quant aux sous-tâches et donc stratégies. C'est l'enseignante qui indique que les deux formes de conditionnement en plaque comportent la même quantité de dix boutons, les élèves les comptent un à un pour le vérifier. Ce premier épisode se termine par le ramassage du matériel, puis une prise de parole de l'enseignante.	Alors donc : comme il y a beaucoup de boutons à mettre cette fois, on ne va pas faire comme les autres jours, les autres jours on mettait des gommettes, là cette fois, il faut préparer des boutons, alors je vais vous montrer : alors il y a une boîte avec des boutons tout seuls *(B montre)*. Alors il ne collent pas c'est vous qui devrez les coller. Il y a des petits boutons comme ça, il y a une boîte pleine de boutons, et puis il y a aussi des plaques de boutons qu'il faudra découper pour coller mais pour l'instant ils sont en plaques. Voilà je vais vous en montrer, vous allez regarder il y a deux sortes de plaques. Je vais vous en distribuer à chacun une sorte de chaque à chacun, vous regardez bien comment elles sont les plaques Après vous me les redonnerez vous ne les gardez pas *(B distribue)*. Je ne vous montre pas les petits boutons touts seuls, vous avez vu ceux qui sont découpés, là je vous donne juste les plaques pour que vous voyiez qu'il y a deux sortes de plaques. Comment elles sont ces plaques ? ?: Il y en a des moyennes et il y en a des longues. B : Il y en a des longues, et il y en a qui sont…, ça a quelle forme ? Des rectangles. Les deux ont des formes de rectangles. C'est tout ? Ils n'ont pas la même forme d'accord, qu'est-ce que vous avez d'autre à dire sur ces plaques ? Léa ? Chut, on écoute Léa. Léa : Je ne sais plus ce que je voulais dire. B : Tu ne sais plus ce que tu voulais dire ? Dès que tu auras retrouvé tu relèveras le doigt. (À ?) : assieds-toi c'est pas le moment. Thomas ? Thomas : Que il y a des petits carrés avec les boutons. B : Voilà : il y a des petits carrés avec un petit rond à l'intérieur, donc le bouton c'est le carré et le rond, d'accord ? *(B dessine au tableau)* Donc ça on dit que c'est un bouton, d'accord ? C'est tout ça, c'est l'ensemble, c'est pas que le petit point au milieu, c'est un bouton. Chania ! Donc c'est pas la même forme d'accord, et sinon, qu'est-ce qu'il y a comme autres différences, de choses qui se ressemblent ? Léa ? Léa : Ils ont la même… B : La même ? Léa : Couleur B : La même couleur, oui. Avec les gommettes on avait une couleur différente, là ils sont tous de la même couleur. Alors comme vous ne m'en parlez pas moi je vais en parler : sur la plaque qui est longue, celle qui est la plus longue, est-ce que quelqu'un sait combien il y a de boutons ? Est-ce que quelqu'un a eu l'idée de les compter ? Des élèves : Dix ! B : Il y en a dix, tout le monde a vérifié sur celle qui est longue, celle-ci ? *(B montre)* ?: Sur les deux il y en a dix.

		?: Il y en a dix, avec les deux il y en a dix. B : Alors Lucas toi du dis qu'il y en a combien sur celle-là *(B montre)*? Lucas : Dix. B : Est-ce que tout le monde a vérifié qu'il y avait dix boutons sur cette plaque ? Des élèves : Oui B : Alors, sur l'autre plaque, il y en a dix aussi, ou pas ? Sofiane: Eh ben moi j'ai pas compté B : Eh ben vas-y compte Sofiane ?: J'ai pas compté parce quand j'ai regardé y avait trois plus deux et de l'autre côté c'était pareil. B : Ah ben oui. (?) a compté un par un il a dit : il y a trois et deux ça fait cinq et encore pareil donc cinq plus cinq ça fait dix. Il y a plein de manières. Maintenant quelle que soit la manière que vous avez employée pour trouver combien il y avait de boutons sur ces plaques, est-ce que tout le monde est d'accord que sur les longues plaques il y a dix boutons ? Et est-ce que tout le monde est d'accord pour dire que sur la plaque qui est comme ça *(B montre)* il y a aussi dix boutons ? Des élèves : Oui B : C'est bon ? Des élèves : Oui ?: Ça fait cent boutons B : Je vais demander à… Tiens Chania tu passes avec la petite boîte. Vous remettez les plaques dans la boîte de Chania quand elle passe, d'accord ?
2ème épisode : organisation matérielle de la classe		
	Description : L'enseignante demande aux élèves de se déplacer. Elle a prévu les groupes : en particulier trois groupes de marchands situés côte à côte. Les élèves ne savent pas encore ce que va être la séance du jour. Contenu : Les élèves « marchands » choisis sont ceux estimés « bons compteurs » par l'enseignante, c'est ce qu'elle indique dans un entretien post séance. Elle ajoute	7'30 Alors pendant que Chania ramasse les plaques je vais vous demander de changer de place, vous allez travailler par deux sur chaque Ziglotron. Donc… Chut ! Celui qui va changer de place ne prend rien avec lui, d'accord ? Celui à côté de qui il s'assiéra c'est l'autre qui prendra les ciseaux et la colle quand il y en aura besoin, celui qui se déplace n'a pas besoin de prendre d'affaires. Alors : Léa tu vas te mettre à la place de Jason *(inaudible)*. Jason tu te lèves. Toi (?) tu te mets à la place de Céline. Jason tu viens à côté de Sofiane, Simon tu viens à côté de Souleymane, tu laisses (*inaudible*). Thomas tu viens à côté de Jonathan.

	qu'elle a prévu de mettre tous les « marchands » au même endroit, alignés au fond de la classe, et d'en fixer le nombre à trois, par un souci de circulation et afin qu'elle puisse intervenir auprès de tous les lieux de vente quasiment simultanément. Elle laisse libre les groupes de vendeurs d'aller dans le lieu de vente qu'ils veulent (voir l'épisode suivant). Les fiches ziglotrons distribuées sont les n° 34, 35 et 36, celles prescrites par le manuel, il maque donc 23, 30 ou 37 boutons. Ce deuxième épisode s'achève quand l'enseignante juge que l'installation est terminée et reprend la parole en s'adressant à tous.	(*Les élèves se déplacent pendant que B distribue des feuilles*). Toi tu vas te mettre à côté de Manon, tu t'assois là. Calista…non je ne t'ai pas dit de changer de place Souleymane, tu restes à côté de Simon. Calista mets-toi à côté de *(inaudible)*. Tu te mets derrière. Vous allez vous mettre ensemble. Rose tu te mets à côté de Lucas. (?) Tu viens à côté de (?). Quentin tu viens te mettre devant, Camilla tu viens à côté de Milène. *(Brouhaha, B déplace une chaise)*. Alors vous croisez les bras. Chut ! Pas maintenant Justine. Allez Léa tu es assise, *(inaudible)* j'ai dit que pour l'instant il n'y a besoin de rien. Avant de commencer je voudrais vous demander si tout le monde… Eh oh Rose ! Est-ce que tout le monde a bien rendu les plaques de boutons ? Il ne faut plus qu'il en reste sur les tables. C'est bon ? Personne n'en a sur sa table ? D'accord.
	3ème épisode : indication des tâches 1 et 1 bis avec les sous-tâches	
	<u>Description</u> : L'enseignante, qui s'est placée devant le tableau, indique la tâche : sous-tâches 1.1 élaborer le message), 1.3 (indiquer le message au « marchand »), 1.5 (transporter la collection obtenue), 1.6 (valider), la tâche 1 bis (dévolue au vendeur), et le fait de ne faire qu'un voyage. Elle ajoute une sous-tâche supplémentaire, constituant à coller à côté les « boutons » en trop, en référence à une séance antérieure avec des gommettes. . <u>Contenu</u> : L'enseignante ne donne aucune information sur les stratégies, elle insiste sur les règles à respecter. Elle ne dit pas par exemple qu'il faut compter pour effectuer la sous-tâche 1.1, mais « *il faudra que vous vous mettiez d'accord sur ce que vous allez demander au marchand* ». Les formes des messages sont données en exemple (comme il est prescrit dans le manuel) : « *cinq plaques, [...] six plaques et puis huit boutons. On peut mélanger les sortes de boutons*». La possibilité de faire une commande comportant différents	11'22 Alors : je vous présente les marchands de boutons : Iana, Quentin et Tanina. Ben oui, parce qu'il va bien falloir…mais je vais leur donner la consigne Chania, c'est pas tout à fait la même que les autres fois, c'est pour ça qu'il va bien falloir faire attention parce que ça se ressemble mais ce n'est pas pareil. Céline il faudrait que tu écoutes. Alors j'attends d'avoir tout le monde avec moi. Rose ! Il va y avoir trois marchands de boutons : chaque marchand a deux boîtes. Jonathan ! Des boutons tout seuls, ou des plaques de dix boutons *(B montre)* *(inaudible)* Ils vont aller s'installer au fond. Il y a seulement un enfant par groupe qui pourra aller voir un marchand pour lui demander les boutons. Donc il faudra que vous vous mettiez d'accord pour savoir ce que vous allez demander au marchand. Les marchands il faudra que vous fassiez très très attention. Tanina, Quentin et Iana ne pas vous tromper en donnant les boutons. Alors par exemple quelqu'un pourra demander six boutons, ou alors quelqu'un pourra demander par exemple cinq plaques, ou alors quelqu'un pourra demander par exemple six plaques et puis huit boutons. On peut mélanger les sortes de boutons, d'accord ? Céline ! Tu n'écoutes pas. Vous avez bien compris ? Il y en a un seul qui ira. Celui qui ira, il va aller voir le

	types d'« objets » est soulignée. L'enseignante porte attention à la réalisation de la sous-tâche 1.5, non mathématique, concernant le transport. A noter l'absence d'indication des sous-tâches 1.2, se souvenir du message, et 1.4, vérifier l'adéquation entre la quantité demandée et celle donnée : à ce propos il est cependant indiqué aux vendeurs de bien faire attention. Ce troisième épisode clôt le lancement et se termine par la distribution de gobelets pour le transport des collections, signalant le début de la phase de réalisation de la tâche.	marchand avec un petit pot, et le marchand il mettra les boutons dans le petit pot, ça vous évitera de les faire tomber pendant le trajet. Chut ! Quand vous revenez à votre place avec les boutons vous découpez les plaques de boutons si vous avez demandé des plaques de boutons, et vous collez à l'emplacement des boutons qui ont été arrachés. Vous n'avez pas le droit de retourner chercher des boutons chez le marchand, d'accord ? Vous n'avez le droit de venir qu'une fois leur demander, après c'est fermé. Chania ! J'ai encore une petite chose à vous dire, une : si jamais vous avez des boutons en trop on va faire comme on a fait avec les gommettes vous les collez sur le trait noir, d'accord ? Si il y en a trop. C'est bon ? Des élèves : Oui B : Alors les marchands. Faites bien attention à donner ce qu'on vous demandera

Réalisation de la tâche des élèves 15'05 – 32'45

Les interactions sont toujours privées, c'est-à-dire que les échanges ne concernent que les intervenants (un groupe d'élève ou un élève avec l'enseignante) et les paroles prononcées ne sont pas à l'intention des autres élèves. Une exception est cependant à signaler en ce qui concerne le deuxième épisode, l'enseignante s'adressant à toute la classe (silencieuse à ce moment).

1er épisode : régulation de la circulation des élèves et intervention auprès des trois « marchands »

	<u>Description</u> : L'enseignante, se place auprès des trois lieux de vente, regarde et régule les allers et venues. Elle vérifie ensuite avec un élève « client » l'adéquation entre la commande effectuée et la quantité obtenue (sous forme de « boutons » seuls) : c'est la tâche 1.4. Puis elle s'informe auprès de chacun des trois marchands de la formulation des messages délivrés par les clients. <u>Contenu</u> : L'enseignante demande à un élève client qui est en train de recompter ce qu'il a obtenu, « *tu en as demandé combien ?* », et devant ses problèmes elle l'aide en lui indiquant qu'il doit faire attention à séparer les objets déjà comptés des autres : elle aide ainsi un élève à effectuer la tâche 1.4	15'05 B : *(B distribue les gobelets, certains élèves se déplacent vers les marchands. B reste près des marchands*). Il n'y en a qu'un seul qui y va. (*À ?*) : tu fais la queue. *(A Quentin)* : tu peux compter tout fort. B : (*À ?*) Tu en as demandé combien ? ? : (*Inaudible*) B : *(B vérifie la collection que l'élève à obtenue en comptant les boutons avec lui, les autres continuent les achats)* Trente-sept ? *(Inaudible*) B : (*B vérifie avec une autre élève*) : tu vérifies ? Va vérifier avec Céline. Tu en voulais trente-trois, c'est ça ? Non celui-là il est à moi. Va vérifier avec Céline. *(Un autre élève se présente à B*) : va vérifier avec Simon. (*B va voir les marchands. A Quentin*) : qu'est-ce qu'ils sont venus te demander les enfants ? Des plaques, des boutons tout seuls ? Ils t'ont demandé quoi ?

	non évoquée auparavant dans la procédure de comptage qu'il a commencée. Elle demande aux vendeurs à chaque fois « *qu'est-ce qu'ils sont venus te demander* » et non « combien ils t'ont demandé ». Les élèves donnent des réponses diverses : « des *boutons tout seuls* », « *des trucs comme ça* » (en montrant des plaques de dix), « *que des boutons comme ça* ». Elle ne commente pas ces réponses et n'intervient pas dans la tâche des élèves pour la tâche 1 ni pour la tâche 1bis (les élèves en sont majoritairement à la sous-tâche 1.6 à la fin de ce 1er épisode).	Quentin : Des boutons tout seuls. B : Et toi Tanina ? Tanina : Des trucs comme ça. B : Des trucs comme ça oui. Donc des bandes, oui. (*Un élève vient parler à B : inaudible*). (*Au troisième marchand*) : qu'est-ce que les enfants sont venus te demander ? Iana : Que des boutons comme ça B : Que des boutons comme ça ? D'accord.
	2ème épisode : précision sur la tâche 1.6	
	<u>Description</u> : L'enseignante, se replace devant le tableau et donne une précision d'ordre pratique sur la sous-tâche1.6 (ne pas redécouper les boutons « tout seuls »). <u>Contenu</u> : Il n'y a pas de stratégie indiquée. Ce deuxième épisode se termine quand l'enseignante ne parle plus et quitte sa place au tableau.	22'12 B : (*B retourne au tableau*). Je crois que j'ai oublié de vous dire quelque chose pour que ce soit plus simple pour coller. Les enfants ! Ceux qui ont pris des boutons tout seuls, ceux-là (*montrant*), c'est pas la peine de les re-découper autour avant de les coller, d'accord ? Vous les collez comme ça. Ceux qui ont pris des plaques ils vont être obligés de les découper pour les séparer, d'accord ? Les autres vous les collez comme ça directement.
	3ème épisode : l'enseignante s'informe de la teneur des messages	
	<u>Description</u> : L'enseignante, se déplace auprès de chaque groupe « client » (sept en tout), qui sont maintenant en train de réaliser la sous-tâche 1.6 de vérification. Elle s'informe sur la teneur du message qu'ils ont émis et le note sur une feuille qu'elle a préparée à l'avance (par exemple, le nom des deux élèves suivi de « 36 » ou « 3 plaques et six »). Certains	23'10 B : (*B va voir un groupe d'élèves, puis un autre*). Jason et Sofiane, qu'est-ce que vous êtes allés demander ? (*Inaudible, brouhaha*) Quand tu es allé voir Tanina, tu lui as demandé trente-six boutons ? Et tu lui as montré ce que tu voulais ? Qu'est-ce qu'elle t'a donné ? Des boutons ? Et je vois qu'il y a des plaques aussi. Jason : Elle nous a donné trois plaques, ça fait trente B : D'accord Sofiane : Et elle m'a donné six boutons B : D'accord. Et c'est toi qui lui as demandé les plaques ou c'est Tanina qui te les a données sans te demander ce que tu voulais ? Tu lui as demandé trente-six boutons et tu lui as dit « je veux des plaques et des boutons » ?

	échanges amènent les élèves à donner leur procédure. Contenu : L'enseignante n'indique pas de stratégie, la phase de réalisation de la sous-tâche 1.1 étant de toute façon terminée à ce moment. Cependant, un des groupes a des problèmes pour se mettre d'accord sur ce qu'il fallait demander, et l'enseignante utilise alors le verbe « compter ». Par ailleurs elle utilise deux types de formulations différentes pour sa question : au début quatre fois « qu'est-ce que vous avez demandé? » et à la fin trois fois « vous avez demandé combien de boutons », avec la première des trois fois une demande aussi sur le nombre de plaques. D'après le document vidéo les différentes formulations relevées par l'enseignante (certaines réponses sont inaudibles ou incomplètes) sont : « *trois plaques et aussi six boutons* », « *trente, tout mélangé* », « *trois plaques* », « *des boutons tout seuls* », « *vingt-trois* (boutons seuls) », « *des boutons seuls* », « *trente-sept* ». Deux échanges amènent les élèves à	Sofiane : Non (*puis Inaudible*) B : Six, tu lui as demandé six boutons, et pour les plaques tu lui as demandé quoi ? Sofiane : Je lui ai dit de m'en donner trente dans les plaques B : Et ton « trente dans les plaques », tu lui as dit « je veux trente dans les plaques » ? Sofiane: Trois plaques et aussi six boutons. B : D'accord, j'ai compris. Et Jason, tu es d'accord avec Sofiane ? Jason : Oui B : (*A un autre groupe*) : Alors Souleymane, qu'est-ce que vous avez demandé aux marchands ? Souleymane : Trente B : Trente d'accord. Et vous avez demandé des plaques plus que des boutons ? Tout mélangé ? D'accord. *(Brouhaha). (A un autre groupe)* : qu'est-ce que vous avez demandé aux marchands ? Vous avez demandé que des boutons tout seuls ? Des boutons en plaques ? ?: (*Inaudible*) B : D'accord, continuez. Chut, chut ! Il y a trop de bruit. (*B va voir un autre groupe*) Alors vous deviez compter toutes les deux ensemble, on est d'accord ? Tu me dis « Chania elle a mal compté », vous étiez deux pour le faire, moi je ne peux pas accepter ce constat, pour moi c'est vous qui avez mal compté. Tu veux dire que Chania a compté, toi tu n'as pas compté ? ?: (*Inaudible*) B : D'accord donc vous avez compté toutes les deux, et vous avez demandé trente boutons. Et vous avez demandé comment ? Des plaques toutes seules, des boutons tout seuls ? Alors qu'est-ce vous êtes allées demander aux marchands ? ?: Elle a dit « trois dizaines ça fait trente » B : Elle a dit « trois dizaines ça fait trente », et alors tu as demandé quoi ? Qu'est-ce que tu as demandé ? ?: Trois plaques. B : D'accord, trois plaques. Donc tu es allée demander des plaques, c'est à Tanina que tu as demandé ? Tanina t'as donné trois plaques, tu es sûre ? (*Inaudible, brouhaha*) Vous avez regardé, vous n'en avez pas perdu ? Parce qu'effectivement si vous avez demandé ce que vous m'avez dit vous auriez dû en avoir trente. (*B et les élèves cherchent. B va*

	indiquer leur procédure. Ce sont des stratégies OF (désignation obtenue par comptage un à un) vers OG, obtenue en interprétant l'appui « trente » en « trois dizaines » puis « trois plaques » ou directement « trente dans les plaques, donc trois plaques ». Les approbations de l'enseignante montrent sa compréhension de ce que les élèves lui disent et ne consistent pas en une validation de leur procédure. Ce dernier épisode concernant la réalisation de la tâche par les élèves se termine quand l'enseignante reprend la parole en se plaçant devant le tableau, après qu'elle se soit assurée avoir noté toutes les réponses des élèves.	*voir un autre groupe)*. Vous avez demandé combien de …vous avez demandé des boutons ou des plaques ? ?: (*Inaudible*) (*B va voir un autre groupe*) B : Vous avez demandé combien de boutons, et vous avez demandé des plaques ? ?: Des boutons tout seuls. B : Des boutons tout seuls ? D'accord (*B va à un autre groupe*) Alors Nadjma et Saïne vous avez demandé combien de boutons ? Nadjma : Vingt-trois. B : Vous avez demandé des boutons tout seuls ou avec des plaques ? ?: (*Inaudible*) B : Vous avez compté vingt-quatre boutons, c'est ce qu'on vous a donné ? Vous allez vérifier, vous avez recompté ? On verra, d'accord ? (*A un autre groupe*) Vous avez demandé combien de boutons ? ? : *(inaudible)* B : Et vous avez demandé des boutons tout seuls ou aussi d'autres boutons? ?: Des boutons tout seuls. B : (*B va voir un autre groupe*) Manon vous avez demandé combien de boutons ? Manon : Trente-sept B : Trente-sept. Et vous avez demandé des boutons tout seuls ou avec des plaques ? Manon : (*Inaudible)* B : (*pour elle seule en regardant les notes prises*) Qui manque? Personne. Manon : (Inaudible) on a demandé à Tanina. Ça casse les oreilles

Mise en commun 32’45 – 51’02

L’enseignante s’adresse à toute la classe (silencieuse en général) en se plaçant la plupart du temps devant le tableau. Elle distribue la parole en interrogeant le plus souvent les élèves qui ont levé le doigt. Cette mise en commun est découpée en trois épisodes, un dans lequel l’enseignante s’informe de la réussite ou de l’échec des élèves, un deuxième dans lequel l’enseignante veut arriver à faire comprendre aux élèves qu’une commande en termes de plaques et de boutons est un facteur qui contribue de manière essentielle à la réussite de la tâche et un dernier dans lequel l’enseignante résume ce qui a été dit dans l’épisode précédent. Le deuxième épisode est le plus long et a été identifié en partie grâce à l’entretien post-séance avec l’enseignante. Il comporte différents sous-épisodes qui témoignent de la façon dont il est mené, l’enseignante orientant ces questions afin que les élèves formulent eux-mêmes que « *c’est plus facile de commander des plaques et des boutons que des plaques toutes seules* ». Mais les échanges amènent aussi certains élèves à décrire leur procédure.

1er épisode : l’échec ou la réussite des élèves est rendu public

Description : L'enseignante demande aux élèves de la classe d’indiquer s’ils ont réussi ou échoué. Contenu : L'enseignante utilise le fait que les élèves ont pu eux-mêmes savoir s’ils avaient réussi ou échoué (rétroaction du milieu dans la sous-tâche 1.6), tâche qui a été menée à terme.	32’45 B : Ça casse les oreilles oui, je suis d’accord avec toi. Bon ! Chut ! Chut ! (*B retourne au tableau*) Alors, on s’assoit, comme dit (?) ça casse les oreilles, je suis d’accord avec lui, ça casse les oreilles. Bon alors on va voir un petit peu ce que vous avez fait, si vos Ziglotrons sont réparés ou pas, s’il y en a qui ont des pièces de rechange ou des boutons en trop. Alors, je vais demander aux enfants qui ont leur Ziglotron réparé de lever le doigt. (*Des élèves lèvent le doigt*). D’accord, donc vous regardez, ça veut dire que…oh, oh !!! Baissez votre doigt. Est-ce que tout le monde a levé le doigt ? ?: Non

2ème épisode : mise en évidence de l’élaboration d’un message comportant des plaques et des boutons comme facilitant la réussite de la tâche.

L'enseignante va poser plusieurs questions successives qui vont orienter la séance sur différentes pistes afin d‘obtenir la conclusion voulue (d’après l’entretien post séance). Des sous-épisodes sont distingués par la teneur des questions posées. Globalement, l’épisode suit un objectif qui n’est pas exactement celui formulé dans le manuel. Comme l’enseignante essaye de faire formuler aux élèves ce qu’elle estime l’objectif de la séance, le déroulement dépend en partie de ce que disent les élèves au fur et à mesure.

2.1 Description : L'enseignante pose la question « est-ce que c’est	33’53 B : Non. Alors ça veut dire quoi ? Est-ce que c’est facile de réparer tous les Ziglotrons ? Des élèves : Non B : C’est pas très facile. Si c’était très très facile tout le monde aurait réussi. C'est-à-dire

	facile de réparer les ziglotrons ? ». Un élève met en cause le nombre important de boutons. <u>Contenu</u> : La réponse donnée ne va pas dans le sens de l'objectif de l'enseignante dans cet épisode. Les élèves indiquent avant tout que le nombre de « boutons » à dénombrer est grand (ceci sera à nouveau signalé par les élèves à la fin de la séance, après la phase de synthèse en elle-même). Cette réponse inattendue crée un **incident**. L'enseignante récupère et enrichi la réponse, ce qui l 'amène à poser une nouvelle question.	que c'est un petit peu difficile. Toaïre et Léon, qui est-ce qui a une idée pourquoi tout le monde n'a pas réussi, pourquoi c'était un peu difficile de les réparer ces Ziglotrons ? Est-ce que vous avez une idée ? Nesrine tu te tournes ! Non tu te tournes vraiment. Personne n'a une idée ? Sofiane: Si ! Parce que des fois il y en a qui en ont plus que des autres. B : Plus de quoi ? Sofiane: Plus de trucs, plus de boutons. B : Plus de boutons qui manquent. Le nombre alors la quantité. Taranica toi tu dis quoi ? Pourquoi tu penses que c'est un peu plus difficile que les autres fois ? Taranica : Parce que…j'ai oublié. B : Tu as oublié. Donc Sofiane, lui, il dit que c'est peut-être à cause de la quantité, du nombre. Le nombre de boutons qu'il y a plus que d'habitude, peut-être que c'est pour ça.
	<u>2.2</u> <u>Description</u> : L'enseignante pose la question « *Alors comment avez-vous fait pour trouver qu'il faut vingt-trois boutons ?* ». Les élèves indiquent alors (spontanément, en levant le doigt) leur procédure de dénombrement	35'08 B : Alors, je suis allée voir tous les groupes : je vous ai demandé combien de boutons vous aviez demandé. Alors il y a plein d'enfants qui ont demandé vingt-trois boutons, vous levez le doigt ceux qui ont demandé vingt-trois boutons, les Ziglotrons à vingt-trois boutons. (*Des élèves lèvent le doigt)* Alors comment vous avez fait pour trouver qu'il faut vingt-trois boutons ? Qui est-ce qui peut expliquer dans les enfants qui lèvent le doigt ? Les autres vous écoutez parce que même s'ils n'avaient pas le même nombre peut-être que vous allez retrouver que leur manière c'était la même manière que vous, faite différemment. Chanez comment vous avez fait vous ? Chanez : On a compté. B : Comment ?

(ils utilisent le mot « compter » qui est repris ensuite par l'enseignante). La procédure de comptage un par un est indiquée trois fois, dont une dans laquelle un élève précise sa façon d'énumérer pour ne pas compter deux fois le même bouton. Une procédure de dénombrement utilisant des groupements par dix est aussi indiquée par un élève. <u>Contenu</u> : L'enseignante laisse s'exprimer les élèves qui le veulent, en arrêtant cependant les interventions au bout de quatre réponses. L'indication des procédures ne mène pas à s'interroger sur la forme du message, puisque finalement c'est la désignation parlée en français qui est systématiquement donnée. Une des procédures aurait pu permettre de faire un lien avec la formulation du message, puisqu'elle met en avant des groupes de dix. En répondant à une question,	Chanez : On a compté sur la feuille. B : Sur la feuille. Alors tu vas nous montrer. (*B se déplace, prend la feuille et Chanez compte).* D'accord *(B montre à la classe)* Chanez elle compte comme ça : un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, et tous les boutons comme ça. Comment on appelle ça ? On dit qu'on compte ..? Un ... ?: Un par un. B : Un par un. Qui est-ce qui a compté comme ça, levez le doigt ceux qui ont compté comme ça un par un tous les boutons. Tous, même si vous n'aviez pas le même nombre de boutons. Qui est-ce qui a compté un par un ? Ceux qui ne lèvent pas le doigt ça veut dire que vous avez compté autrement, vous allez expliquer hein, d'accord ? (*Des élèves lèvent le doigt)* D'accord donc vous avez compté un par un, baissez votre doigt. Qui est-ce qui a compté autrement que un par un ? Alors Thomas et Jonathan vous avez compté comment les boutons ? Ecoutez-les ! ?: On a compté (*Inaudible)* Après on a regardé combien, il y en avait trente. Après on est allés chercher des gommettes, on a été chercher trente gommettes et on est revenus pour coller les gommettes. B : Les boutons. D'accord. Donc ce qu'ils sont en train d'expliquer là, voilà comment ils ont fait : je vous montre parce que je ne sais pas si vous avez compris. Donc il y avait les boutons qui étaient arrachés et avec le crayon ils ont écrit (*B écrit au tableau)*: un, deux, trois, ils ont continué comme ça. Ils ont compté tous les boutons en numérotant les boutons. Donc vous êtes arrivés à trente. Tiens Nisrine, tu viens t'asseoir ici. Voilà, tu restes sur le banc, Camilla tu mets tes mains sur la table, et toi tu vas t'asseoir. Non, non c'est pareil. Est-ce que quelqu'un a fait d'une autre manière que les enfants qui viennent d'expliquer pour combler les boutons qui manquent ? Souleymane ? Souleymane : (*Inaudible)* B : Parle plus fort que tout le monde t'entende. Souleymane : Je les ai comptés à chaque fois, et après ça fait trois dizaines donc ça faisait trente. Et j'ai ré-essayé une deuxième fois et ça fait trente et après ça fait trente. B : Alors Souleymane nous a expliqué qu'il a compté trois plus deux, non, cinq plus deux ? Comment tu as dit ? Souleymane : Trois plus deux B : Oui, trois plus deux. Souleymane il a compté comme ça. Rose tu n'écoutes pas ! *(B montre au tableau en faisant des croix)* Souleymane il a fait des groupes en fait, il a compté trois plus deux à chaque fois. Trois, et encore deux : il a dit « ça fait cinq ». Et après il a encore fait pareil : trois, et encore deux : un, deux, trois, et encore deux, ça fait cinq. Et cinq et cinq, ça fait...

	l'enseignante est amenée à justifier que trois « *grands groupes* » est égal à trente en utilisant une interprétation arithmétique additive de la numération, et n'exploite pas le fait qu'un élève dise « *ça fait trois dizaines* » pour aller dans le sens d'une interprétation arithmétique multiplicative.	Des élèves : Ça fait dix. B : Ça fait dix. Il a fait des groupes, il a tout fait comme ça (*B. entoure un groupe de dix croix*), il est arrivé à trente. Ça nous fait trois grands groupes, trois fois tout ça. ?: Ça fait trente ? B : Il a raison ça fait trente : dix, là ça fait cinq et cinq, les deux mains ça fait dix, ça tout le monde le sait. Si on fait encore une fois pareil, ça fait encore dix, donc dix plus dix ça fait…il y en a qui le savent ? ?: Vingt. B : Et encore dix ? Des élèves : Trente. B : Ça fait trente. Et il a trouvé comme ça Souley. Est-ce qu'il y en a qui ont fait autrement ? Milène ? Montre-nous sur ta feuille, comment vous avez fait ? Milène : *(Inaudible)* B : Milène elle a compté comme ça : un, deux, trois, quatre, cinq, six, elle a compté un par un.
	<u>2.3</u> <u>Description</u> : L'enseignante demande tout d'abord si les marchands ont eu comme commande des boutons tout seuls ou des plaques et des boutons. Elle met en exergue, en s'appuyant sur les interventions des élèves qu'elle reprend et enrichit, le fait que les élèves qui ont commandé des boutons seuls ont formulé une commande qui rendait difficile la tâche des vendeurs. Le sous-épisode se fini par une	41'08 B : Maintenant moi je suis allée voir les marchands après : je leur ai demandé ce que vous leur aviez demandé. Iana, est-ce qu'on t'a demandé des boutons tout seuls, des plaques de boutons ? Qu'est-ce qu'on t'a demandé ? Iana : Que des boutons. B : Que des boutons tout seuls. Tanina qu'est-ce qu'on t'a demandé ? Tanina : Des boutons et des plaques. B : Des boutons et des plaques. Et toi Quentin ? Quentin : Des boutons. B : Que des boutons. Bon, levez le doigt tous ceux qui ont demandé que des boutons. *(La plupart des élèves lèvent le doigt)* D'accord. Les enfants à qui on a donné que des boutons tout seuls, est-ce que vous avez eu le nombre de boutons que vous aviez demandé ? C'est-à-dire si par exemple vous aviez demandé vingt-trois boutons est-ce que le marchand vous a bien donné vingt-trois boutons ? Alors j'entends des « oui » et des « non » : qui est-ce qui n'a pas eu le nombre de boutons demandés ? *(Plusieurs élèves lèvent le doigt)* D'accord, donc ça fait plusieurs groupes qui n'ont pas eu le nombre demandé. Toaïre et Léon vous aviez demandé combien de boutons ? Léon : Trente-six

exposition des élèves de la raison pour laquelle ils ont décidé de commander des plaques. <u>Contenu</u> : Les vendeurs sont sollicités par l'enseignante. Ils vont témoigner de la difficulté de dénombrer (sous-entendu un à un) dans leur tâche (tâche 1bis), ce qui est attendu par l'enseignante : la question posée directement par l'enseignante aux vendeurs est « *Est-ce que c'est difficile de compter pour les marchands les plaques ?*». Des élèves répondent que non, et un indique même une stratégie « dix, vingt, trente, quarante, cinquante » reprise rapidement sans commentaires par l'enseignante. Cette stratégie n'est cependant pas une stratégie concernant la tâche 1 bis. En effet, elle permet de délivrer des plaques à partir d'un message de type « *trente-sept boutons* » en énumérant les plaques à l'aide de la comptine des	B : Trente-six boutons. Vous en avez eu combien ? Léon : Trente-sept B : Trente-sept. Manon et Taranica vous aviez demandé combien de boutons ? Manon : Trente-cinq B : Et vous en avez eu combien ? Manon : Trente-huit B : Trente-huit. Lucas et Rose vous aviez demandé combien de boutons ? Rose : Vingt-trois B : Vingt-trois. Vous en avez eu combien ? Vous avez compté combien vous en avez eu ? Par contre vous pouvez faire quelque chose : combien il vous en manque ? Il vous en manque combien ? Rose : Quatre B : Il vous en manque quatre donc vous n'avez pas eu le nombre que vous aviez demandé. Il y en a d'autres qui n'ont pas eu le nombre demandé ? Léa et Chania ? Alors on va reparler de votre cas tout à l'heure, on a une petite chose à vous dire par rapport…Vous en avez eu vingt-deux ? Bon. Et vous ? *(À ?)* Vous en aviez demandé combien ? ?: Vingt-trois B : Vingt-trois. Vous en avez eu combien ? ?: Euh… B : Vingt-trois ? Regardez sur votre feuille, est-ce qu'il est réparé votre Ziglotron ? Il est réparé ou pas ? Est-ce qu'il vous manque des boutons ? Donnez-moi votre feuille, on va montrer à tout le monde *(B prend la feuille et la montre)* Alors est-ce que le Ziglotron de (*?)* et (*?*) il est réparé ? Des élèves : Oui B : Ben oui, il est réparé. Vous aviez demandé vingt-trois boutons. Si il est réparé ça veut dire qu'on vous en a donné combien ? Ah ben oui tu as du mal à croire ! Autant ! On vous a donné autant de boutons que vous en aviez demandé, c'est bien. Chut ! Si les enfants ont demandé un nombre de boutons et qu'ils n'ont pas eu ce qu'on leur a demandé, ça veut dire que les marchands ils se sont trompés. Les marchands est-ce que vous avez une idée de pourquoi, comment ça se fait que des fois vous vous êtes trompés ? Ecoutez-les pour voir si vous êtes d'accord avec eux. Iana ? Iana : Des fois il y avait qui étaient collés. B : Oui, il y en a qui étaient collés, mais tu parles desquels ? Iana : Des boutons tout seuls, donc ils sont collés. B : Et alors ça fait quoi qu'ils soient collés ?

	dizaines « dix, vingt, trente »[340], mais il s'agit alors d'interpréter la commande, ce qui n'est pas dans la tâche prescrite aux marchands. En outre, l'enseignante ne demande pas d'explication sur les procédures employées par les élèves concernant le passage qu'ils ont fait entre la désignation OF (comme « *trente-six* ») et une désignation OG (comme « *trois plaques et six boutons* »). Elle insiste sur le fait qu'une commande comportant des plaques et des boutons facilite la tâche des marchands. A signaler que seuls les groupes qui ont commandé des plaques et des boutons ont été invités à se placer devant le tableau, ce qui conclut par ailleurs cet épisode.	Inana : Ça fait qu'on peut pas bien savoir. B : C'est pas facile. Faut les décoller, faut les compter, c'est pas facile ils sont collés. Bon. Quelqu'un a une autre idée ? Pourquoi les marchands ils ont pu se tromper ? Lucas ? Lucas : Peut-être parce que il faut compter. B : Il faut compter. Alors c'est vrai que si on vous demande trente-six boutons il ne faut pas se tromper en comptant. Si c'est un par un c'est long. Je pense que là on va être obligés d'abréger hein Souleymane ! Pourtant moi je crois que c'est important de savoir la prochaine fois qu'on va jouer au Ziglotron les choses auxquelles il faut faire attention pour pas se tromper. Les marchands, Taranica, c'est pas eux, peut-être que ce sera toi, peut-être que ce sera toi Souleymane, donc ce serait dommage qu'on ne fasse pas attention pour les mêmes choses. Donc c'est difficile de compter les petits boutons qui sont collés. Est-ce que c'est difficile de compter pour les marchands les plaques ? Des élèves : Non. On fait dix, vingt, trente, quarante, cinquante. B : C'est plus facile. Dix, vingt, trente, quarante. Alors il y a des enfants qui ont demandé des plaques justement, qui est-ce qui a demandé des plaques ? Léa, Souleymane, Sofiane, Tania, Léa ? Et Jason vous venez là comme ça je peux vous voir mieux. Les enfants qui ont demandé des plaques ils vont expliquer pourquoi ils ont demandé des plaques. *(Les enfants sont debout face à la classe)* Qui est-ce qui veut commencer à expliquer ? Personne ! Bon alors, Sofiane. Sofiane : Parce que des fois si il y a si par exemple (*Inaudible)*…et s'il en restait que douze et moi j'en voulais trente… B : Tu sais ce qu'on va faire Sofiane on va expliquer ce que vous avez fait avec votre Ziglotron. Vous aviez demandé combien de boutons ? Sofiane : Trente-six. B : Trente-six boutons. Qu'est-ce que vous avez demandé à Tanina et Quentin ? Sofiane : Des plaques et des boutons. B : Des plaques et des boutons. Combien de plaques et combien de boutons ? Sofiane : (*Inaudible)* B : Donc Rose elle va répéter. Donc Rose, qu'est-ce qu'ils ont demandé au marchand ? Rose : Ils ont demandé trois plaques et six. B : Et six, alors *(inaudible)*. Donc ils voulaient trente-six boutons : ils ont demandé trois plaques et

[340] Ce qui est de l'ordre d'une interprétation ordinale avec repérant de la numération parlée en France.

		six boutons. Est-ce que vous pouvez expliquer pourquoi vous n'arrivez pas à demander trente-six petits boutons ? Sofiane ? Sofiane: Parce que c'était mieux de prendre les grandes plaques parce que c'est pas facile de compter un, deux, trois comme les petits boutons ; on pensait que c'était dix comme Tanina je demande à elle, elle a fait dix, vingt, trente, et après on avait les six boutons. B : Bon, Sofiane il trouve que c'est mieux, il a besoin de compter un, un par un, dix par dix. Léa et Génia, vous avez demandé des plaques et des boutons, pourquoi vous n'avez pas demandé que des petits boutons ? Léa : On a… B : Vous voulez bien les écouter ! On va rejouer au Ziglotron après. Alors, pourquoi vous avez demandé des plaques et pas que des boutons tout seuls ? Je voudrais bien que vous m'expliquiez bien fort parce qu'on ne vous entend plus. Les autres, il reste deux minutes alors un petit effort. Elles vont nous expliquer pourquoi elles ont demandé des plaques et pas que des petits boutons. Léa : Parce que, après si on compte un par un ça va être long. B : C'est pour que ça aille plus vite ? C'est moins long comme ça ? Bon.
3ème épisode : résumé des deux épisodes précédents par l'enseignante		
	Description : L'enseignante reprend ce qui a été dit dans la dernière phase en faisant ressortir certains points. Contenu : L'enseignante revient sur des stratégies de comptage dans la sous tâche 1.1, en indiquant que le comptage un par un n'était pas nécessairement le plus simple. Puis elle s'intéresse à la tâche 1 bis, indiquant qu'un message avec des plaques était plus facile à traiter (pour des raisons matérielles en particulier). Rien n'est ajouté par rapport à ce qui	50'00 Donc on a vu qu'il y avait plusieurs manières de compter les boutons qui manquaient : un par un, on peut faire des groupes, on peut écrire dans les cases. On peut faire des groupes assez simples comme on a sur notre corps : les mains, cinq puis cinq puis dix, ou un par un, ou en écrivant dans les boutons. Ensuite, les marchands on peut leur demander des boutons tout seuls ou des plaques et des boutons. Ceux qui ont demandé des plaques ont trouvé que c'était plus simple, plus facile, qu'il n'y avait pas besoin de compter un par un. Les marchands ont trouvé que c'était aussi un peu plus difficile de donner que des boutons parce qu'il y en avait beaucoup, qu'ils collaient, et puis que quand on donne des plaques c'est plus facile à compter aussi parce que c'est plus grand. Est-ce que vous avez autre chose à ajouter ? Ou est-ce qu'on peut s'arrêter là ? On peut s'arrêter là ? D'accord, on reprendra jeudi. Alors je vais ramasser les feuilles des Ziglotrons, d'accord ? Chacun va reprendre sa place. 51'02 *(B ramasse les feuilles, les élèves regagnent leur place).* Chut ! Vous fermez vos bouches ! Pendant trois quarts d'heure je vous ai laissé parler, vous avez dit ce que vous aviez à dire, maintenant on se calme un petit peu. Bon alors à votre avis est-ce qu'avec la classe on peut ouvrir une Entreprise de réparation de Ziglotrons ?

	s'est déroulé dans les phases précédentes. En fin de séance, les élèves signalent à nouveau le problème de comptage d'un grand nombre de boutons, créant un **incident**. L'enseignante récupère et enrichi pour cette fois-ci indiquer que les séances futures permettront d'apprendre des techniques de comptages plus sûres.	Des élèves : Oui ! B : Il va falloir s'améliorer un petit peu pour être de très très bons réparateurs. Donc on va continuer à jouer avec les Ziglotrons, on va apprendre à les réparer avant, pour que vous soyez de supers réparateurs de Ziglotrons. On changera les vendeurs. Oui Léa ? Léa : *(Inaudible)* B : Ah ! Tu espères qu'il y en aura moins à compter ? Ben je vais te décevoir il y en aura pas moins. Pourquoi tu espères ça ? Pourquoi tu espères qu'il y en aura moins ? Léa : Parce qu'on peut se tromper. B : Alors vous savez ce qu'on va faire ? Hein Chania ? Léa elle dit « Ha la la j'espère qu'il y aura moins de boutons parce qu'on peut se tromper », tu sais qu'il y a des moyens pour ne pas se tromper justement. Parce qu'on va quand même pas arrêter de faire quelque chose parce qu'on a peur de se tromper. C'est bien d'arriver à faire les choses même quand il y en a beaucoup, c'est peut-être juste qu'il faut changer notre manière de faire. Alors on en reparlera jeudi. 56'40

<table>
<tr><th colspan="2">Lancement 0'- 17'00</th></tr>
<tr><th colspan="2">1er épisode : première indication de la tâche 2 et 2bis</th></tr>
<tr><td>Description :
L'enseignante désigne les élèves qui vont jouer le rôle des marchands, les installe (au même endroit qu'à la première séance) puis elle explique la tâche de la séance. Elle interroge les élèves sur les informations qu'elle donne au fur et à mesure. La phase se termine par l'installation matérielle de la classe.
Contenu :
Pour indiquer la tâche, après avoir donné des explications, parfois à l'aide des élèves en leur demandant d'évoquer la séance précédente, l'enseignante reprend et enrichit leurs réponses. Elle prend ainsi des informations sur leur compréhension.
Elle fixe les nouvelles variables par rapport à la séance précédente : un nombre de boutons supérieur, le fait que les marchands ne donnent pas plus de neuf boutons « tout seuls », le fait de ne pas parler au marchand et l'existence du message à compléter. Pour la variable didactique concernant les neuf</td><td>00'
Mme B : On va revoir le ziglotron aujourd'hui, demain aussi. Alors il va falloir que vous fassiez bien attention parce que ce n'est pas exactement la même chose que mardi : il va y avoir des petites différences. Alors déjà, les différences qu'il peut y avoir c'est qu'on va changer de marchands. Presque tout le monde va rester avec le même copain, la même copine que mardi, sauf les marchands qui vont changer, sinon les autres vous allez rester deux par deux, les mêmes groupes que mardi. Alors, je vais commencer par quoi. Je vais vous dire pour que vous sachiez les marchands aujourd'hui seront Jason, Sofiane et puis Léa. Vous allez vous asseoir. (Les marchands se déplacent au fond de la classe).
Alors, le principe est toujours le même, vous allez avoir un ziglotron à réparer à vous deux. (A ?) Tu as entendu ce que je viens de dire ? Tu parles en même temps.
Vous allez avoir un ziglotron pour deux à réparer, Gribouille a encore arraché tous les boutons, ça doit être son jeu préféré je pense.
?: Nous aussi !
B : Vous aussi ? De quoi ? D'arracher les boutons ou de les réparer ?
(Brouhaha). Alors, Lucas il dit que c'était plus facile avec les gommettes mardi. Souleymane, tu te souviens ce qu'elle a dit Léa mardi ? Elle a dit « oh la la c'est plus dur parce qu'il y a beaucoup de boutons arrachés ».
?: Les gommettes c'était mieux parce que c'est juste à les coller et pas couper..
B : oh la la c'est super fatigant, ça vous épuise de découper et puis de coller, c'est très dur. C'est dur Sofiane ?
Sofiane : Même si c'est des gommettes sans longueur c'est pas grave, c'est pas la peine de les couper on fait comme ça.
B : Eh oui, mais là c'est plus des gommettes c'est des boutons qui sont dessinés sur une feuille, c'est comme ça. Voilà, c'est fait exprès. C'est plus long. C'est pas plus dur c'est plus long. Voilà, c'est plus comme ça. Il n'y a pas que ça qui n'est plus comme ça : quand on a dit qu'il y avait beaucoup plus de boutons à trouver, donc on a vu mardi…Léon et Céline j'aimerais bien vous voir,</td></tr>
</table>

	boutons, l'enseignante aide les élèves en leur indiquant sa conséquence : demander des plaques. L'aide est indiquée sans argumentation. Le bon de commande est lu avec les élèves. La première partie du message, est l'indication du nombre de boutons : il est sous-entendu que c'est par le biais de l'écriture chiffrée (les élèves ne savent pas écrire les nombres autrement) et il est suggéré de choisir une des stratégies de comptage déjà vues (essentiellement un à un). Celles-ci ne sont pas rappelées. L'enseignante indique que la deuxième partie du message est à l'attention des marchands. Des incidents surviennent alors. Le **premier incident** survient lorsque les élèves commettent une erreur quand ils répondent neuf à la question de l'enseignante portant sur ce qu'il est possible d'écrire pour le nombre de paquets de dix et pour les boutons seuls (2ème partie du message).L'enseignante donne la bonne réponse. Cette erreur indique une mauvaise compréhension de la tâche à ce moment pour certains élèves. La deuxième partie du message n'est pas mise en relation ici avec sa fonction (obtenir chez le	voilà. On a dit mardi qu'il fallait bien faire attention de bien compter les boutons qui manquaient sur le ziglotron pour être sûrs de ce que vous allez demander, de ne pas se tromper en comptant combien vous allez demander de boutons. Les marchands ils ont deux sortes de boutons, vous vous souvenez ? ?: Les longueurs, les plaques, et les petits boutons. B : Voilà : il y a les plaques, et les petits boutons. Vous vous souvenez que l'autre fois presque tout le monde avait demandé des petits boutons tout seuls *(montrant les petits boutons dans une boîte)*. D'accord ? Et puis là il y a les plaques *(montrant une plaque)* : est-ce que tout le monde se souvient combien il y a de boutons sur une plaque ? Les élèves : Dix ! B : D'accord. Et sur cette plaque là ? *(montrant)* Les élèves : Dix ! B : Dix aussi. On avait compté l'autre fois. Donc les marchands ils ont été assez dévalisés sur les petits boutons tout seuls, donc il y a une chose qui va changer par rapport à mardi. Chaque groupe ne peut pas demander plus que neuf boutons tout seuls, parce que sinon il n'y en aura pas assez. Pas plus que neuf tout seuls. Ça veut dire que pour les autres boutons vous allez être obligés de demander des plaques, d'accord ? Tu as entendu Miriam ? *(A ?)* Est-ce que tu vas me poser une question sur ce qu'on est en train de faire maintenant ou sur autre chose ? ?: Non B : Alors ça ne m'intéresse pas, baisse ton doigt. (?) Combien de boutons tout seuls tu peux demander au marchand ? ?: Pas plus de neuf. B : Pas plus de neuf : on peut en demander, un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, ou aucun. Et les autres boutons il faudra les demander avec les plaques. Est-ce que tout le monde a bien compris ça ? Les élèves : Oui. B : Bon. Une autre chose qui change : la dernière fois vous savez qu'il y en avait un des deux qui allait voir le marchand et qui demandait ce qu'il voulait. Aujourd'hui vous n'avez plus le droit de parler au marchand, donc pour lui demander ce que vous voulez vous allez avoir un bon de commande *(montrant)* à remplir. *(Brouhaha pendant que B va au tableau)* Alors je réécris au tableau le bon de commande *(« Il faut… boutons. Notre commande : …paquets de boutons/…boutons » Des élèves lisent tout haut).*

marchand le nombre de plaques et de boutons seuls). Quand l'enseignante commence à expliquer « *combien vous voulez de paquets de boutons, c'est-à-dire...* » des élèves l'interrompent par le nombre qui vient d'être prononcé « *neuf* ». L'enseignante décrit alors les deux types de plaques et donne des exemples de réponses possibles pour les plaques. Par la suite, elle fait un lien cette fois-ci entre la variable didactique portant sur le nombre de boutons « seuls » et la dernière ligne du message, « *on peut aller jusqu'à neuf* », sans donner d'explications complémentaires. Un deuxième **incident** survient quand un élève pose une question sur le fait qu'il y a écrit deux fois le mot « *boutons* ». L'enseignante change d'intervenant puis devant le silence, elle donne elle-même une réponse. Dans les deux parties du message on demande d'indiquer un nombre de boutons. La question posée indique que l'élève ne voit pas la différence entre ces deux parties : il lui semble difficile d'envisager de désigner une quantité de boutons de deux manières différentes. Pour distinguer la première partie de la deuxième,	Tiens Nisrine tu vas venir sur le banc pendant qu'on fait ça comme ça tu vas écouter. Alors voilà le bon de commande. Pour que tout le monde sache comment bien le remplir *(B pointe les mots sur le tableau, les élèves lisent à haute voix en même temps).* Les élèves : Il faut….boutons B : Alors ça veut dire…il faut lever le doigt si vous avez quelque chose à dire parce que là si tout le monde parle en même temps. Chut ! Léon ! (*Montrant)* Donc ici vous allez écrire le nombre de boutons en tout, qu'il vous faut, en tout. Comment vous allez savoir combien il vous faut de boutons en tout ? ?: On va compter. B : Voilà. Vous comptez sur Ziglotron. On a vu plusieurs manières mardi, choisissez la manière que vous voulez, d'accord ? Je rappelle parce que il y en un qui m'a dit mardi « ah ben c'est elle qui a compté, elle s'est trompée », alors je ne veux pas entendre ça : vous êtes deux, donc qu'est-ce qu'on peut faire si on est deux ? ?: On peut compter ensemble. ?: On peut partir tous les deux. B : Partir ? Pour compter les points ? Non, non on parle de compter les points qui manquent sur le Ziglotron. Si vous êtes deux, à quoi ça sert d'être deux ? Plutôt que tout seul ? Des élèves : A compter B : Pour faire quoi ? ?: Pour aller... B : Pour quoi ? Tu sais Sofiane ? Sofiane : Si on est pas très sûrs on peut compter deux fois. Moi par exemple Thibaut avait compté au début, après c'était moi. B : Oui, vous pouvez faire chacun votre tour et puis on vérifie : si vous trouvez deux fois la même chose c'est que sûrement ça va. Si il y en a un qui trouve par exemple vingt-trois boutons et l'autre qui trouve vingt-sept, ça veut dire que vous n'êtes pas d'accord, il faut vérifier une deuxième fois pour voir si c'est vingt-trois ou vingt-sept, d'accord ? Ça sert à ça d'être deux, s'aider et vérifier, c'est plus facile à deux. *(Montrant)* Donc là vous écrivez le nombre de boutons qu'il vous faut en tout, d'accord ? Ensuite, donc ici il y a écrit ? Les élèves : Notre commande B : Donc ça c'est pour expliquer ce que vous allez commander au marchand. Les élèves : *(Lisant)*….paquets de dix boutons

	l'enseignante rappelle le milieu matériel chez le vendeur et la situation de communication.	B : Donc ici il va falloir que vous écriviez combien vous voulez de paquets de boutons, c'est-à-dire... Des élèves : Neuf B : Donc les plaques qui sont comme ça *(dessinant)* ou des plaques qui sont comme ça, ça n'a pas d'importance vu qu'il y a le même nombre sur chaque plaque, c'est des plaques de dix. Donc vous écrivez là combien vous voulez de paquets : un paquet, deux paquets, trois paquets, dix paquets, vingt paquets, d'accord ? De dix. Et ici ? …boutons. C'est pour dire combien vous voulez de petits boutons tout seuls. En sachant que vous ne pouvez pas dépasser combien ? Les élèves : Neuf B : D'accord ? On peut aller jusqu'à neuf. Léa: Pourquoi il y a écrit tout en haut ….boutons ? Parce que il y a écrit tout en bas ? B : Ah, c'est une très bonne question. Qui est-ce qui peut aider à répondre à cette question ? Alors je ne sais pas si il faut y répondre avant de le faire ou pas, je pense que ce serait mieux. Parce que Léa elle dit « voilà, il y a écrit *(montrant au tableau)* il faut…boutons, et puis là, …boutons, et c'est pareil, pourquoi le dire deux fois » ? Alors là, je répète ce que je vous ai déjà dit : il faut écrire le nombre de boutons que vous voulez en tout. Par exemple, vous allez compter les boutons qui manquent sur le Ziglotron et ici vos allez écrire comme mardi je suis venue vous demander combien de boutons vous aviez en tout : il y en a qui ont dit trente, il y en a qui ont vingt-trois, trente-sept. Mais après quand vous allez voir le marchand vous allez demander des paquets de dix boutons et puis des boutons tout seuls, donc le nombre de boutons ici ça ne peut pas dépasser neuf, d'accord ? Donc ici vous avez par exemple quinze boutons qui vous manquent sur votre Ziglotron, vous ne pouvez pas demander quarante boutons comme ça, c'est pas possible vous ne pouvez pas dépasser neuf, donc il faut trouver un autre moyen. Est-ce que Léa tu as compris ? Et est-ce que les autres vous avez compris ? Les élèves : Oui
2ème épisode : l'explication de la tâche est reprise par l'enseignante et questionnée par les élèves		
	<u>Description</u> : L'enseignante reprend le descriptif complet de la tâche 2, des élèves demandent des précisions. <u>Contenu</u> :	12'03 B : Quand je vais vous donner votre Ziglotron et la feuille de bon de commande, première chose à faire compter combien il vous manque de boutons et écrire ici combien il vous en manque, d'accord ? Ensuite vous réfléchirez à combien vous voulez de paquets de dix et combien vous voulez de boutons tout seuls. Pour vous aider à réfléchir je vous donne une feuille blanche, vous avez le droit d'écrire dessus si vous voulez savoir combien il vous faut de paquets de dix et combien de boutons tout

<table>
<tr><td></td><td>L'enseignante décrit à nouveau les étapes principales de la tâche. Un exemple est donné oralement pour le message « trois plaques de dix boutons et quatre boutons tout seuls ». Elle fournit en plus une feuille de papier vierge pour que les élèves puissent réfléchir. Cette feuille ne sera pas utilisée par les élèves. Par ailleurs, l'enseignante indique une stratégie pour réaliser la tâche : compter. Cette tâche peut se réaliser sans compter (un à un), en entourant des paquets par exemple.</td><td>seuls, d'accord ? Je répète, je récapitule : on ne peut pas avoir plus que neuf boutons tout seuls, cette fois on remplit le bon de commande, vous ne parlez pas au marchand, et le marchand ne vous parle pas. Le marchand il regarde le bon de commande et il vous donne ce que vous avez demandé.
?: Il a le droit de compter ?
B : Il fait comme il veut pour donner ce qu'on lui demande. Ensuite il y a une feuille à moi pour vous aider si vous avez besoin d'écrire. Il y a une chose qui change écoutez encore une fois : vous ne collez pas les boutons, vous les rapportez à votre place, mais vous ne les collez pas. On verra ensemble comment vous avez fait pour demander les paquets de dix boutons et les boutons tout seuls, et on vérifiera seulement à la fin une fois qu'on aura discuté ensemble, d'accord ? Non on ne les colle pas.
?: Une fois qu'on aura montré le bon de commande au marchand après on le reprend ?
B : Oui vous prenez votre bon de commande, vous le rapportez avec vous avec les paquets de dix et les boutons tout seuls. Je regarde si je n'ai pas oublié de vous dire quelque chose. Voilà.
?: On les met où les boutons?
B : Vous les mettez sur votre table, vous vérifiez le bon de commande. Ce que vous faites c'est que quand vous avez rapporté votre commande à votre table vous regardez si vous avez bien ce que vous avez demandé. Si vous avez demandé je ne sais pas moi, si vous avez demandé trois plaques de dix boutons et quatre boutons tout seuls vous vérifiez que vous avez bien ça sur votre table, d'accord ? Donc de toute façon moi je vais être avec les marchands, je vais regarder qu'ils vous donnent bien ce que vous avez demandé.</td></tr>
<tr><td colspan="3">3ème épisode : installation matérielle</td></tr>
<tr><td></td><td><u>Description</u> :
L'installation matérielle de la classe reprend la disposition de la séance 1 en ce qui concerne l'emplacement des vendeurs et clients.
<u>Contenu</u> :
A ce moment est rappelé le fait que la validation matérielle ne fait pas partie de la tâche de cette séance. L'enseignante a choisi les groupes d'élèves : de « bons » élèves pour les marchands, des élèves supposés pouvoir travailler ensemble pour les clients. A signaler que, comme dans la séance précédente, les vendeurs n'ont a priori à compter qu'une quantité inférieure à dix.</td><td>14'40
B : Alors Manon, Taranicane vous vous mettez ensemble, Chania, Tanina, Léon, Toaïre, ça, ça ne change pas. (Brouhaha, les élèves se déplacent). Nisrine et Céline, même place que mardi, Lucas et Rose, Nadjma et Chainez, Nina et Allan vous vous mettez ensemble. (Brouhaha pendant que B distribue). Je ne veux voir personne découper et coller les boutons.
(B passe voir chaque groupe pour les aider dans l'installation matérielle)</td></tr>
</table>

Réalisation de la tâche des élèves 17’00 - 34’00 L’enseignante passe voir chaque groupe de « clients » avec une feuille sur laquelle est déjà noté le nom des élèves : un emplacement a été laissé libre pour noter les messages. A chaque fois elle prend connaissance du message et les échanges font que l’écriture chiffrée est systématiquement traduite par sa désignation parlée en France. L’enseignante ne demande pas aux élèves clients les raisons pour lesquelles ils ont fait ce message ni comment ils ont procédé. Elle s’assure qu’ils obtiennent la quantité écrite sur leur bon de commande, reportant la discussion sur leur validité ultérieurement, dans la phase de synthèse. Les trois premiers groupes n’ont pas encore délivré leur message, tandis que les autres ont obtenu les boutons.		
Unique épisode : prise d’information sur la teneur des messages (oral) et échanges individuels avec les groupes		
	2.1 Description : L’enseignante circule dans les rangs sans intervenir si ce n’est pour la mise en place matérielle.	17’00
	2.2 : Description : L’enseignante demande par oral le message à un groupe. Contenu : L’enseignante ne détrompe pas ni ne donne d’aide à propos d’un message oral incorrect (vingt-neuf paquets de dix boutons et neuf boutons) mais qui respecte les règles du jeu.	19’15 B : *(Avec ? et ?)* Vingt-neuf paquets de dix boutons et combien de boutons ? ?: Neuf B : Neuf boutons ? Alors il y en a une qui va chercher la commande.
	2.3 : Message 1 Il faut **25** boutons Ma commande : **25** paquets de dix boutons **....** boutons Description : L’enseignante pose des questions sur le message 1 d’un groupe client avant que celui-ci ne l’ait donné au marchand.	20’10 B : *(A ?)* Vous dites qu’il vous faut combien de boutons ? ?: Vingt-cinq B : Vingt-cinq. Alors il faut combien de paquets de dix ? Je vous demande ce que vous avez décidé. Vous avez décidé quelque chose apparemment puisque vous avez écrit quelque chose sur votre bon de commande. ?: Vingt-cinq B : Vingt-cinq paquets de dix boutons ? Et des boutons tout seuls vous en demandez au marchand ?

	<u>Contenu</u> : L'enseignante ne détrompe pas ni n'aide les élèves ayant produit un message écrit incorrect (25 paquets de dix boutons). Elle demande cependant de l'oraliser, les élèves n'indiquent pas « vingt-cinq paquets », mais uniquement « vingt-cinq ». L'enseignante n'approfondit pas la cause de l'erreur, le message sera traité dans la phase de synthèse.	?: Non B : Non ? Alors qui va apporter votre commande, qui va y aller ? C'est toi ? Allez, ça marche. *(B accompagne l'élève voir les marchands puis va voir un autre groupe)*
	<u>2.4</u> : Message 2 Il faut **...** boutons Ma commande : **...** paquets de dix boutons **....** boutons <u>Description</u> : L'enseignante pose des questions sur le message 2 (bon non rempli) d'un groupe client avant que celui-ci ne l'ait donné au marchand. <u>Contenu</u> : L'enseignante aide les élèves à remplir la première partie du message, en redemandant « *Combien il vous faut de boutons ?* ». Elle interrompt ainsi une discussion entre les élèves qui n'étaient pas d'accord. Elle rappelle une contrainte du milieu pour la deuxième partie du message, « *vous ne pouvez pas demander plus de neuf boutons tout seuls* », et indique la possibilité de remplir les deux cases, sans donner d'aides supplémentaires.	21'30 B : *(un élève montre le bon de commande)* Vous avez relu la phrase ? ?: Il faut… B : Il faut …boutons. Combien il vous faut de boutons ? Il vous en faut combien ? ?: Vingt-huit B : Vingt-huit ? Ben tu mets vingt-huit ?: Je te l'avais dit B : D'accord ? Maintenant vous allez écrire votre commande : vous allez demander au marchand des paquets de dix boutons peut-être, et des boutons tout seuls peut-être, mais vous ne pouvez pas demander plus de neuf boutons tout seuls, d'accord ? ?: D'accord
	<u>2.5</u> : Message 3 Il faut **34** boutons Ma commande : **10** paquets de dix boutons **9** boutons	23'00 B : *(B va voir un autre groupe)* Vous êtes allées donner votre commande au marchand ? Alors combien il vous faut de boutons pour réparer votre Ziglotron ? ?: Trente-quatre B : Trente-quatre, d'accord. Alors vous avez demandé combien de

	<u>Description</u> : L'enseignante pose des questions sur le message 3 d'un groupe client après que celui-ci l'a donné au marchand. <u>Contenu</u> : Le message écrit est incorrect, mais la quantité obtenue est correcte, ce qui crée un **incident**. La deuxième partie du message ne correspond pas à la quantité obtenue. L'enseignante change alors d'interlocuteur (du client au marchand) et redonne les règles du jeu. Elle intervient pour que le vendeur réalise sa tâche, et donc qu'il n'interprète pas la commande. Ce dernier qui est un « bon » élève (selon l'enseignante) a vu l'incohérence entre la première partie du message et la deuxième. Il a alors décidé d'interpréter la première partie « 34 » qu'il traduit par « trente-quatre » pour délivrer trois plaques de dix et quatre boutons seuls. L'enseignante veille à ce qu'il effectue la tâche qui lui a été demandée et ne lui demande pas comment il a fait pour délivrer sa commande (le passage de trente-quatre à trois plaques de dix et quatre boutons seuls). Les échanges restent oraux. Comme pour les autres groupes, l'enseignante laisse les élèves clients se tromper (une phase de synthèse est prévue ultérieurement), sans donner d'indication sur la validité du message. L'erreur des élèves est ici identifiable : ils ont repris les nombres prononcés par l'enseignante lors de la lecture de chaque phrase, « 10 » pour les paquets, « 9 » pour les boutons seuls. Une relance aurait été possible pour les détromper. Ce message ne sera pas traité dans la phase de synthèse (il se peut qu'il ait été	paquets de dix boutons au marchand ? ?: Trois B : Alors vous en avez demandé combien ? Qui est allée voir le marchand ? C'est toi Calissa ? Qu'est-ce que tu as demandé au marchand ? Calissa : Trois plaques et neuf boutons B : Alors, sur le bon. Tu lui as donné le bon de commande au marchand ? J'avais dit qu'il ne fallait pas parler, tu lui as parlé ? Qu'est-ce qui est écrit là ? Dix paquets de dix boutons. Quel marchand vous êtes allées voir ? Calissa : Sofiane B : Sofiane, d'accord. Je vais aller voir Sofiane avec le bon de commande, venez. *(B accompagne les élèves voir Sofiane à qui elle montre le bon de commande)* Alors Sofiane tu as déjà donné les paquets de dix et les boutons pour ce groupe-là, Calissa elle est déjà venue te voir. Est-ce que tu te souviens quand elle est venue te voir ? Est-ce qu'elle t'a parlé ? Sofiane : Oui parce que en fait elles s'étaient trompées quelque part, après j'ai vu ça et après j'ai fait dix fois trente comme ça et après j'ai regardé là. B : Alors explique ce que tu as regardé Sofiane : J'ai regardé ça (*montrant la deuxième partie du message*) mais en fait, j'ai que regardé ça (*montrant la première partie du message*) B : Tu n'as regardé que ça en haut, et pourquoi tu ne lui as pas donné ce qu'elles avaient demandé ? Sofiane : Parce que j'avais rien compris. Il fallait trente-quatre boutons. Il faut dix grands trucs comme ça B : Dix paquets Sofiane : Il faut neuf petits boutons B : D'accord. Alors ce que tu vas faire Sofiane c'est que tu vas leur donner ce qu'elles ont demandé, d'accord ? Parce que c'est ça ton travail, c'est de leur donner ce qu'elles ont demandé, même si tu penses qu'elles se sont trompées et que toi tu n'aurais pas fait la même chose, d'accord ? Vous allez rapporter vos paquets, votre commande, et Sofiane va vous donner exactement ce que vous avez écrit : dix paquets de dix boutons et neuf boutons, d'accord ?

	modifié par la suite).	*(A Sofiane)* Alors tu dis que tu n'as pas rien compris. Tu n'as pas compris… ? Sofiane : Ça il faut, c'est neuf petits boutons, c'est neuf boutons, il faut dix barres comme ça, et il faut neuf boutons. B : Oui. Et pourquoi tu n'as rien compris ? Tu avais compté qu'il y avait écrit dix paquets de dix boutons et neuf boutons, ça tu avais compris ? Sofiane : Oui B : Ce que tu n'as pas compris c'est pourquoi elles avaient écrit ça ? Alors on va tout ordonner, on va tout redonner du départ. Les neuf boutons c'était ça déjà ? Sofiane : Oui B : Vous avez vérifié qu'il y en a bien neuf ? Vas-y. *(B va voir un autre groupe)*
	2.6 : Message 4 Il faut **45** boutons Ma commande : **quarante** paquets de dix boutons **cinq** boutons Description : L'enseignante pose des questions sur le message 4 d'un groupe client après que celui-ci l'a donné au marchand. Un deuxième incident survient, interrompant le traitement d'un premier qui va donc se faire en deux temps. **Le premier incident** vient du fait que le message 4 comporte une erreur sur la première ligne de sa deuxième partie. L'enseignante demande de vérifier la quantité obtenue. Les élèves confondent le fait de demander quarante « en » plaques, c'est-à-dire d'obtenir quarante avec des plaques et le fait de demander le nombre de plaques qu'il leur faut. L'élève vérifie spontanément son message en utilisant une stratégie consistant à compter les groupements un à un à l'aide de la comptine des dizaines « dix, vingt, trente, quarante » pour obtenir la désignation parlée en France de la quantité (une stratégie OG	27'00 B : Alors, où est votre Ziglotron ? *(Brouhaha, inaudible)* ?: Oui mais il me l'a donné B : Pourquoi ? ?: Parce qu'on savait pas *(inaudible)* B : D'accord ! Alors vous avez vu que c'était le même alors vous êtes dit «on y arrive pas on va demander aux copains ». B : *(B va voir un autre groupe)* Bon alors il faut quarante-cinq boutons, votre commande : quarante paquets de dix boutons et cinq boutons. Alors est-ce que c'est ce c'est ce que vous avez eu ? Quarante paquets de dix boutons, vous avez regardé ? B : *(A un autre groupe)* Vous pouvez dessiner sur la feuille. Thomas tu dis que tu ne sais pas combien il faut de paquets de dix pour arriver jusqu'à vingt-huit, peut-être que vous pouvez essayer de dessiner sur la feuille pour voir. B : *(Retour au groupe précédent)* Il vous a donné quarante-quatre quoi ? ?: Boutons B : Boutons ?: Il nous a donné quarante paquets de dix

vers OF). Il vérifie ainsi que la quantité de boutons obtenue correspond bien à celle qu'il a demandée (quarante). Cette vérification ne le détrompe pas : il a demandé « quarante » sous forme de plaques et a obtenu « quarante » sous forme de plaques. L'enseignante essaye alors d'aider l'élève en essayant de lui faire distinguer un groupement de dix (objet comptable avec la comptine numérique usuelle) et la quantité de boutons qu'il contient (dix) : « *là dans ma main j'ai combien de paquets de dix ?* ». L'élève répond de manière erronée « *dix* », continuant ainsi à identifier un nombre de groupements avec le nombre d'objets qu'il contient. L'enseignante gère ce nouvel incident en donnant la réponse à l'élève : « *Un paquet de dix. Il y a un paquet de dix, un groupe de dix, il y a une plaque, il n'y a pas dix plaques, d'accord ? Une plaque* ». Ceci ne l'amène pas à se détromper sur son message, puisqu'il continue à indiquer que « *pour les quarante ça va* ». Et en effet son message lui a permis de signifier ce qu'il voulait (le vendeur l'a compris), ce qui ne permet pas la rétroaction du milieu souhaitée par l'enseignante. L'enseignante incite les élèves à corriger leur message en ne le validant pas : rien n'indique cependant que l'argumentation donnée ait été suffisante pour amener une réponse correcte.

Le deuxième incident se déroule durant le premier : des élèves d'un autre groupe ne réussissent pas à faire la deuxième partie du message. L'enseignante facilite la tâche en indiquant une stratégie : faire des dessins sur le ziglotron. L'enseignante suggère d'utiliser la première partie du message pour obtenir la seconde. Cette première partie donnant le nombre de boutons manquants (écrit « 28 » et dit « vingt-huit), elle indique une stratégie OF vers OG via l'aide du dessin : elle semble viser une organisation de la collection GraC (tracer des groupements de dix) sans indiquer que ce sont ces

B : Combien de paquets de dix vous avez ?
?: Quarante
B : Comptez. Compte les paquets de dix
?: Dix, vingt
B : Alors là tu ne comptes pas les paquets de dix, là tu comptes les boutons. *(Montrant)*Là, ça fait dix boutons, et encore dix ça fait vingt boutons, et là encore dix ça fait trente boutons, voilà. Mais si tu comptes les paquets : là dans ma main j'ai combien de paquets de dix ?
?: Dix
B : Un paquet de dix. Il y a un paquet de dix, un groupe de dix, il y a une plaque, il n'y a pas dix plaques, d'accord ? Une plaque. Vous avez eu combien de paquets de dix alors ?
?: Quatre
B : Quatre paquets de dix et vous aviez écrit que vouliez combien de paquets de dix ? Vous avez écrit quarante paquets de dix boutons. Alors qu'est-ce que vous vouliez réellement parce que là pour l'instant vous avez écrit quarante, vous en avez eu quatre. Vous avez l'air d'être d'accord avec ce que vous a donné Jason, vous avez l'air d'accord avec ce qu'il vous a donné, pourtant il ne vous a pas donné ce qui est écrit. Alors, est-ce que ce qu'il vous a donné Jason est-ce que ça va ?
?: Pour les quarante ça va
B : Pour les quarante ça va
?: Pour les autres ça va pas
B : Pourquoi ?
?: Il nous a pas donné les...
B : Il vous en a donné quatre. Donc, si vous êtes d'accord avec ça essayez de changer votre bon de commande pour que ça aille avec ce que vous avez eu. Parce que là il est écrit quarante paquets de dix boutons et cinq boutons, donc essayez de changer ce qui ne pas, si il y a quelque chose qui ne va pas à votre avis mais apparemment il y a quelque chose qui ne va pas parce quatre paquets vous êtes d'accord mais ce n'est pas ce que vous avez écrit. Vous essayez ? (*silence*) Qu'est-ce que vous auriez

	groupements qu'il faut dessiner. Dans une séance suivante elle va en effet proposer cette stratégie.	dû écrire sur votre bon de commande ? Réfléchissez, je vous laisse réfléchir. *(B va voir un autre groupe)* :
	2.7 : Message 5 = Message 1 Le bon de commande est vide Il faut **...** boutons Ma commande : **...** paquets de dix boutons **...** boutons Description : L'enseignante pose des questions sur le message 5 d'un groupe client après que celui-ci l'a donné au marchand. Contenu : Les élèves ont fait une commande orale et utilisant la désignation parlée en France, comme pour les séances « petit ziglotron » du début d'année. L'activité engendrée par la tâche est donc un dénombrement de la quantité de boutons et une obtention de sa désignation parlée en France. L'enseignante redonne des éléments de la tâche qu'ils auraient dû accomplir : écrire un bon de commande puis vérifier que ce qui a été donné convient au message. Finalement elle les incite à faire cette vérification, abandonnant la tâche d'écriture du message : la vérification ne peut donc se faire que par rapport à la désignation parlée en France.	31'15 B : Alors comment vous avez fait pour avoir des paquets de boutons que vous n'avez pas écrit et pas parlé ? C'est le marchand qui a décidé tout seul ce qu'il vous donnait ou vous lui avez demandé ? C'est toi Chainez qui y est allée ? Tu as donné ça ? *(B montre le bon de commande du groupe)* Et tu n'as pas parlé ? Chainez : J'ai oublié de pas parler. B : Ah alors qu'est-ce que tu lui as demandé ? Qu'est-ce que tu lui as demandé ? Chainez : Ben j'ai dit trente-quatre B : Et donc il t'a donné ça ? Il vous donné quoi alors ? Chainez : Il en a donné dix B : Mais il vous a donné combien de boutons ? Vous avez regardé ? Est-ce qu'il vous a donné ce que vous vouliez ? Vous les avez comptés les boutons ? Chainez : Non B : Alors vous dites que vous avez ce que vous vouliez mais vous n'avez pas vérifié. Vérifiez. *(Regardant le Ziglotron)* Là, ça, d'accord les boutons sur Ziglotron mais ceux-là ? Chainez : Dix B : Mais tu viens de me dire que tu n'avais pas compté. Alors tu as compté combien de boutons là? Le marchand il t'a donné combien de boutons ? ?: Mais toi tu as compté là. B : Recomptez. Recomptez combien vous avez de boutons et voyez si c'est ce que vous aviez demandé. *(B. va voir un autre groupe)* B : C'est pas grave si vous ne savez pas, on va discuter ensemble, voir ce que les autres ont fait, et puis peut-être que ça vous donnera une idée, d'accord ? Vous n'êtes pas obligés de savoir tout le temps.

<table>
<tr><th colspan="2">Mise en commun 34’00 - 58’10
La retranscription à la craie d’un bon de commande est restée au tableau. L’enseignante reproduit deux des trois messages étudiés en complétant ce bon de commande et dessine à côté la quantité obtenue dans les sous-épisodes 1.2 et l’épisode 2.</th></tr>
<tr><th colspan="2">1er épisode : validation/correction de deux messages</th></tr>
<tr><td>1.1
Description :
L’enseignante annonce ce qui va être l’enjeu de la dernière phase.
Contenu :
Le projet de l’enseignante est de vérifier si certaines règles du jeu ont été respectées (il s’agit ici de la forme du message et du nombre de boutons isolés demandés), de valider certains résultats (le bon nombre de boutons manquants) et de donner des stratégies correctes. L’enseignante indique que cette phase doit permettre à tous de se mettre d’accord (dépersonnalisation du savoir). C’est effectivement ce que l’enseignante va tenter de faire par la suite.
Enchaînement :
L’enseignante lit les messages qu’elle a relevés.</td><td>34’00
B : (B retourne au tableau) Chut ! Alors, Thomas tu t’assois. Je vais demander à tout le monde de poser les crayons même si vous n’avez pas tout à fait terminé parce que là il faut qu’on voit ensemble ce que vous avez fait, ce que chaque groupe a fait, a demandé, pour voir un peu si vous êtes d’accord, si on peut donner des idées à ceux qui n’en ont pas. Najma tu t’assois. Je vais ramasser les bons de commande (elle passe dans les rangs relever les bons de commande), et puis on va déjà regarder si vous avez déjà bien respecté ce que j’ai demandé c’est-à-dire de ne pas demander plus que neuf boutons tout seuls, et si vous les avez donnés complets c’est-à-dire avec le bon compte. Dylan tais-toi !</td></tr>
<tr><td>1.2
Description :
Un premier message est étudié :
Message 6
Il faut 44 boutons
Ma commande :
... paquets de dix boutons
... boutons
Le message est reproduit au tableau et la quantité obtenue est représentée au tableau.</td><td>35’45
B : (Retourne devant le tableau et regarde le premier bon de commande) Alors Souleymane et Simon, ils ont mis…Thomas ! Thomas, ça ne va pas être possible. Souleymane et Simon ont dit « il faut quarante-quatre boutons », là ils ont mis le nombre de boutons, et ensuite ce n’est pas rempli (elle montre le bon à toute la classe, message 6). Vous n’avez pas demandé de paquets de dix ni de nombre de boutons pour votre marchand, vous n’avez rien écrit, et pourtant je vois que vous êtes allés voir le marchand, oui ou non ?
Souleymane : Oui
B : Oui. Bon qu’est-ce que vous a donné le marchand ? Est-ce qu’il vous a donné vos quarante-quatre boutons que vous demandiez?</td></tr>
</table>

Le fait que seule la première partie soit remplie et que les élèves aient quand même reçu des boutons créé un incident. <u>Contenu</u> : **Un premier incident** survient quand l'enseignante constate que la deuxième partie de la commande est vide (message 6) mais que les élèves ont quand même reçu des boutons. L'enseignante change d'interlocuteur, récupère et enrichit, puis demande un approfondissement à la classe sur l'adéquation entre la quantité obtenue qu'elle a dessinée et le nombre « 44 » écrit au tableau (dit « quarante-quatre ») L'enseignante ne relève pas que même la première partie du message est erronée (il faut 45 boutons). Elle s'attache dans un premier temps à rappeler la tâche des clients (écrire une deuxième partie du message pour le marchand) et du marchand (donner ce qui est demandé sur la deuxième partie de ce message). Elle signale en particulier que si la quantité a été obtenue c'est que le vendeur a regardé la première partie du message. Elle aurait pu s'arrêter ici (la tâche prescrite n'ayant pas été accomplie), mais elle décide de valider l'adéquation entre le nombre de boutons demandé via une désignation parlée en France (l'écriture chiffrée étant la traduction écrite de cette dernière) et la quantité obtenue qui va être dessinée par une production graphique type 1. La stratégie adoptée et de type GraC vers OF. Un autre **incident** survient alors suite à une erreur d'un élève sur le passage GraC vers OF. L'élève	Souleymane : Oui B : Oui ? Qui était le marchand que vous êtes allés voir ? ?: *(Inaudible)* B : Vous êtes allés voir deux fois le marchand ? C'est Sofiane ? Alors comment tu as fait pour leur donner quarante-quatre boutons alors qu'ils n'avaient pas dit combien de paquets de dix ? Sofiane : Ben j'ai regardé et j'ai vu quarante-quatre. J'ai donné quatre grandes barres. B : Quatre paquets de dix Sofiane : Et j'ai donné quatre petits boutons. B : Alors Sofiane : quarante-quatre boutons, il a donné quatre plaques de dix boutons et quatre petits boutons. *(B dessine au tableau quatre rectangles horizontaux l'un sous l'autre et quatre petits carrés à leur droite)* Alors il y a plusieurs questions qui se posent : je voudrais dire quand même Sofiane ce que j'ai dit tout à l'heure. Le travail des marchands c'est pas de décider ce qu'ils donnent mais c'est de donner ce qui est écrit. Donc là il n'y avait pas écrit ni les paquets de dix ni les boutons, donc normalement tu n'aurais pas dû leur donner, d'accord ? Parce que la commande était vide en bas. Souleymane et Simon vous avez entendu ? Non ? Sofiane n'aurait pas dû vous donner les boutons parce que votre bon de commande n'était pas rempli, d'accord ? Bon il vous a donné ça, on va vérifier si par contre c'est le bon nombre de boutons. Chania ! Est-ce qu'à votre avis ça, ça peut faire quarante-quatre boutons ? Des élèves : Oui ! D'autres: Non ! B : Alors il y en a qui disent oui, il y en a qui disent non. Qu'est-ce qu'on peut faire pour être sûrs ? ?: Il faut les compter. ?: On les compte. B : On les compte. Vous, vous ne les avez pas sous les yeux mais Souleymane et Simon est-ce que vous les avez comptés les boutons ? Est-ce que vous avez trouvé quarante-quatre boutons ? Souleymane : Oui

calcule le nombre d'objets dessinés : quatre (rectangles) et quatre (carrés) donnent huit. Il ne prend pas en compte qu'un rectangle désigne une plaque/bande de dix et donc contient dix boutons et que ce sont les boutons qu'il faut dénombrer. L'enseignante change d'interlocuteur, puis récupère et enrichit. L'enseignante précise alors le dessin en faisant apparaître les dix boutons que comporte un rectangle/bande. Elle utilise une interprétation arithmétique additive de la numération parlée pour dénombrer jusqu'à quarante un nombre de carrés « *Là il y en a dix, là il y en a dix, là il y en a dix, et là il y en a encore dix. Donc là c'est dix, et encore dix vingt, et encore dix, trente, et encore dix quarante, plus quatre* », puis elle utilise un surcomptage « *quarante-et-un, quarante-deux, quarante-trois, quarante-quatre*» pour obtenir sa désignation parlée en France.	B : Oui Souleymane : J'ai essayé deux fois. B : Vous avez fait deux fois pour êtres sûrs ? C'est sérieux de vérifier. Ceux qui disaient non, pourquoi vous disiez que ça ne peut pas faire quarante-quatre ça (*elle montre les dessins*)? Thomas ? Thomas : Parce que quatre et quatre ça fait huit. B : Quatre et quatre ça fait huit. Vous êtes d'accord avec Thomas? Quatre et quatre ça fait huit ? Léa : Oui mais... B : Oui mais, Léa ? Léa : Comme c'est dix par dix et qu'il y avait dix boutons sur chaque bande et ben ça faisait quarante et puis si on ajoutait quatre boutons ça ferait quarante-quatre. (*Pendant ce temps, Mme B. dessine des traits verticaux sur chacun des rectangles de sorte qu'on puisse y lire dix petits carrés solidaires alignés, « 10 » es écrit à côté)* B : Alors là ! Léa elle a bien dit à Thomas et aux autres qui pensent comme Thomas que là c'est pas un bouton qu'il y a, c'est dix boutons, donc on ne peut pas dire quatre plus quatre. Là il y en a dix, là il y en a dix, là il y en a dix, et là il y en a encore dix. Donc là c'est dix, et encore dix vingt, et encore dix, trente, et encore dix quarante, plus quatre : quarante-et-un, quarante-deux, quarante-trois, quarante-quatre, d'accord ? Les paquets de dix il en a dix, il n'y en a pas qu'un.
1.3 : Description : Message 7 Il faut **25** boutons Ma commande : **25** paquets de dix boutons **...** boutons Le message n'est pas reproduit au tableau : seule la deuxième partie est lue. La quantité obtenue (des boutons seuls) est montrée à la classe. La quantité obtenue ne correspond visiblement pas au message. Pourtant certains élèves ne	40'08 B : Mylène et Camélia, vous avez dit qu'il vous fallait (lisant le message à toute la classe, message 7) vingt-cinq boutons, d'accord ? Je sais que c'est un petit peu long mais il faut bien qu'on regarde ce que tout le monde a fait pour pouvoir en parler. Hein Chania ? *(A Mylène et Camélia)* Vous avez demandé vingt-cinq paquets de dix boutons, est-ce que c'est ce qu'on vous a donné ? Oui ou non ? Regarde. Les autres, *(montrant)* voilà ce que les marchands ont donné à Camélia et Mylène. Elles avaient demandé vingt-cinq paquets de dix boutons. Est-ce que c'est ce qu'elles ont demandé ? ?: On sait pas. B : Si on sait parce que j'ai demandé de ne pas découper. Est-ce que ça ce sont des paquets de dix boutons ?

semblent pas convaincus, ce qui crée un incident (voir description ci-après). Dans la suite de ce sous-épisode l'enseignante va signaler que des groupes qui n'ont pas rempli leur bon de commande ou n'ont rempli que la première partie, n'ont pu obtenir de boutons. Elle les invalide donc et n'y reviendra plus. Contenu Certains élèves ne se rendent pas compte qu'une collection de boutons isolés ne peut correspondre à un message demandant des plaques, ce qui crée un **incident**. L'enseignante facilite la tâche en s'appuyant sur le milieu matériel. Puis elle indique la bonne réponse. Les élèves ont écrit « 25 paquets de dix boutons » sur le bon de commande. A la question « *Est-ce que c'est ce qu'elles ont demandé ?* », des élèves indiquent ne pas savoir alors qu'ils ont devant eux les boutons seuls obtenus par les élèves. Même après que l'enseignante a montré les bandes de dix, certains continuent à ne pas savoir. Les questions de l'enseignante ne sont pas comprises des élèves lorsqu'elles concernent les paquets de dix boutons dans la formulation d'un message.	Des élèves : Non D'autres : Oui B : C'est comment les paquets de dix boutons ? ?: C'est des grandes barres comme ça. B : *(Montrant les plaques et les boutons) dont disposent les marchands* C'est comme ça, ou comme ça, d'accord ? Est-ce que ça ce sont des paquets de dix boutons ? *(Montrant des boutons isolés)* ?: On sait pas B : Non. Donc le marchand qui a donné à Mylène et Camélia n'a pas donné vingt-cinq paquets. Vous avez compté ce qu'il vous a donné ? Non. Ben il faudrait compter pour voir si ça va ou pas, si c'est vingt-cinq boutons quand même ou pas. Nisrine et Céline, vous avez dit que vous vouliez vingt-neuf paquets de dix boutons et neuf boutons. Est-ce que c'est ce qu'on vous a donné ? Oui ? Et vous avez vérifié combien ça faisait de boutons ? Najma et Chaina vous n'avez pas rempli de nombre de paquets de dix boutons et de nombre de boutons qu'il fallait, vous n'avez pas rempli votre bon de commande. *(Montrant)* Donc Najma et Chaina n'ont pas rempli leur bon de commande, et il y en a d'autres, ce que j'ai dit tout à l'heure, il y a aussi Mamoud et Taranica qui n'ont pas terminé. Donc ces enfants-là n'ont pas pu avoir leurs boutons. Mamoud et Taranica il faut quarante-cinq boutons : ils ont dit qu'il fallait cinq boutons tout seuls, et ils n'ont pas rempli le nombre de paquets de dix boutons.
2ème épisode : les éléments à retenir à partir de l'étude d'un message	
Description : L'épisode traite du message 8 suivant, Il faut **28** boutons Ma commande : **20** paquets de dix boutons **8** boutons Le message est reproduit au tableau. La quantité	43'15 B : Qui est-ce qui a une idée comment on peut savoir, ceux qui ont dit qu'il fallait des paquets de dix boutons, comment vous avez fait pour trouver le nombre de paquets de dix boutons ? Chania et Tanina vous avez dit qu'il fallait vingt paquets de dix boutons, comment vous avez trouvé ça ? Vous avez trouvé vingt-cinq boutons, pourquoi vous dites que vingt paquets ? Chania : *(Inaudible)*

	obtenue est représentée au tableau : deux rectangles horizontaux l'un sous l'autre partitionnés avec des traits verticaux pour obtenir dix carrés solidaires ainsi que huit carrés en dessous des deux rectangles horizontaux. Elle est décrite comme « deux paquets de dix boutons et huit boutons » L'écriture « 20+8=28 » est écrite au tableau. La deuxième partie du message « 20 paquets de dix boutons et 8 boutons » est oralisée par « vingt paquets de dix boutons et huit boutons », une désignation qui est une lecture d'une phrase comportant des écritures chiffrées. <u>Contenu</u> : Les élèves indiquent qu'ils ont écrit le message car ils ont décomposé vingt-huit (écrit « 28 ») en vingt plus huit. Un premier incident (voir ci-après) intervient du fait que les élèves qui ont indiqué cette décomposition vérifient sur leurs doigts L'enseignante va tenter durant cet épisode de montrer l'inadéquation entre la deuxième partie du message « 20 paquets de dix boutons et 8 boutons » et la quantité obtenue qu'elle a représentée au tableau par des dessins. Des élèves indiquent qu'ils pensent que le message convient, créant un second incident. En ce qui concerne le **premier incident**, les élèves qui ont indiqué la décomposition additive « vingt-huit est égal à vingt plus huit » vérifient sur leurs doigts et donc ils ne sont pas sûrs de leur réponse : cette réponse n'est pas conforme à l'attente de l'enseignante. L'enseignante guide alors les élèves. Elle utilise la frise numérique, en partant de l'écriture chiffrée 20 (oralisée vingt), elle avance de un en un,	B : (*B choisit un message parmi ceux qui restent en les passant en revue puis efface les traces du premier message traité pendant la phase de synthèse*) Pour terminer pour ce matin on va regarder l'exemple de Chania et Tanina. Donc tout le monde va poser ce qu'il a dans les mains, se tourner vers le tableau. Lilanane, Thomas, allez ! Croisez les bras. Tout le monde croise ses bras s'il vous plaît. Najma, ça y est ? Rose, tu regardes devant toi, Céline tu peux tourner ta chaise pour être en face du tableau. Quand j'ai dit de croiser les bras ça ne veut pas dire de s'allonger sur sa table. Juste on croise les bras. *(B écrit au tableau)* Donc Chania et Tanina ont dit qu'il leur fallait vingt-huit boutons, d'accord ? *(B écrit au tableau « 28 »)* Elles ont numéroté les boutons arrachés, elles ont écrit un dans le premier bouton, deux, trois, quatre…comme d'autres avaient fait mardi. Elles ont dit « il faut vingt-huit boutons ». Ensuite elles ont rempli leur bon de commande. Toaïre tu n'écoutes pas ! Elles ont dit *(écrivant sur le bon de commande au tableau)* « il faut vingt paquets de dix boutons, et huit boutons », voilà ce qu'elles ont écrit. Chania et Tanina, est-ce que vous pouvez venir ici expliquer pourquoi vous avez vingt paquets de dix boutons et huit boutons ? *(Chania et Tanina viennent au tableau)* Comment vous avez fait ça ? Tanina : *(Inaudible)* B : Alors, Tanina dit, mets-toi sur le côté Tanina. Vingt plus huit c'est égal à vingt-huit (*elle écrit « 20+8=28 »*). Est-ce que vous êtes d'accord avec ça ? Les élèves : Oui B : Oui ? Tanina elle est en train de vérifier sur ses doigts. Si on a vingt on va le mettre là par exemple *(montrant « 20 » sur la frise numérique des écritures chiffrées en haut du tableau)* : on est à vingt pour la suite numérique, plus huit ça veut dire quoi ? ?: On avance de huit B : On avance de huit. On va le faire : *(les élèves répètent en même temps que l'enseignante désigne avec son doigt les écritures chiffrées qui se succèdent après 20 avec un rythme régulier)* un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit. Est-ce que ça va alors ce qu'elles disent (*son doigt reste pointé sur l'écriture « 28 »*) ?

utilisant une interprétation ordinale avec repérant de la numération parlée pour effectuer une addition : à partir du repérant vingt, sont énoncés un, deux, trois, ..., huit. La dernière écriture obtenue « 28 » est lue « vingt-huit ». Ici les écritures chiffrées sont les formes écrites des désignations parlées en France, elles ne se constituent pas en système de numération propre. Pour calculer vingt plus huit, la preuve du résultat se fait par des gestes, avancer d'un sur la frise revenant à ajouter un. L'enseignante n'utilise donc pas directement l'interprétation arithmétique additive de la numération qui fait que vingt-huit est défini comme vingt plus huit. Cette interprétation arithmétique additive n'est donc pas considérée par l'enseignante comme un savoir ancien acquis par tous les élèves, puisqu'il nécessite une argumentation (utilisant une interprétation ordinale avec repérant). Le mot « plus » indiqué par les élèves et l'enseignante ne se réfère donc pas nécessairement à un problème de la structure additive, mais à une reconnaissance de vingt-huit comme mot composé de deux mots. Dans le **deuxième incident,** des élèves commettent une erreur. Ils indiquent que la quantité obtenue représentée au tableau correspond à la deuxième partie du message « 20 paquets de dix boutons et 8 boutons ». L'enseignante interroge un des élèves, reprend et enrichit ce qu'il dit, puis guide les élèves. Le premier élève qui intervient va reprendre la décomposition et l'argumentation du premier incident : il voit le « 20 » du message qui correspond bien aux deux bandes de dix et le « 8 » aux huit petits carrés : il a pu aussi repérer le 20 et le 8 de « 20+8 »	Des élèves : Oui B : Vingt plus huit égale vingt-huit. Vous êtes allées voir le marchand avec votre bon de commande, qui était le marchand que vous allées voir ? Léa tu viens ? *(Léa se déplace au tableau)* Donc Chania et Tanina vous tenez ce bon de commande, qu'est-ce que tu leur as donné ? Léa : Je leur ai donné deux paquets de dix et huit boutons tout seuls. B : *(Elle dessine au tableau deux rectangles horizontaux l'un sous l'autre qu'elle partitionne avec des traits verticaux pour obtenir dix carrés solidaires et elle compte en même temps)* Alors : un, deux, trois, quatre, cinq six, sept, huit, neuf, dix, un paquet de dix. Un deuxième paquet de dix : un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, dix. Et puis huit boutons (*elle dessine au tableau huit carrés en dessous des deux rectangles horizontaux et elle énonce en même temps)* : un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit. (*elle se retourne*) Je vous ai demandé de croiser les bras. *(A ?)* Je ne t'ai pas demandé de t'endormir sur ta table, tu croises les bras et tu regardes au tableau, parce que là je vais vous demander quelque chose, et puis ce serait bien que vous profitiez de ce qu'on va dire parce que ça pourra vous aider pour la prochaine fois. Voilà la commande de Tanina et Chania (*montrant le bon de commande qui a été reproduit au tableau*), voilà ce qu'a donné Léa (*elle montre les dessins qu'elle vient de faire*). Est-ce que ce qu'a donné Léa correspond à la commande ? Des élèves : Non D'autres : Oui B : Alors, ceux qui disent oui levez le doigt (*environ un élève sur deux lève le doigt*). Qui est-ce qui veut expliquer dans les enfants qui lèvent le doigt pourquoi vous dites que oui ça va ? Que c'est bien ce que Léa leur a donné ? Quentin ? Quentin : Parce que ça fait vingt B : Alors : deux paquets de dix. Léa leur a donné deux paquets de dix, d'accord ? Ça fait vingt Quentin : Et puis on avance de huit et ça fait vingt-huit B : Donc Léa, elle a donné à Tanina et Chania ça *(montrant « 20+8=28 »)* Vingt plus huit, avec deux paquets de dix (*montrant les deux*

	qui a été validé auparavant. Il ne prend pas en compte le fait que « 20 » correspond à des paquets de dix. C'est sur quoi l'enseignante va attirer l'attention des élèves : la différence entre les vingt paquets demandés écrit « 20 » et les deux obtenus dessinés par des rectangles allongés. Elle va alors indiquer que différents signifiants désignent la même quantité « vingt-huit » : l'écriture chiffrée « 28 » qu'elle réécrit en dessous de la représentation de la collection obtenue, cette même représentation et finalement l'égalité « 20+8=28 ». Par ailleurs, l'enseignante utilise une interprétation additive avec l'appui « vingt », l'écriture chiffrée étant une traduction de la désignation orale, y compris dans « 20+8=28 » qui correspond à « vingt plus huit égale vingt-huit ». Cette interprétation est aussi en jeu dans la suite de l'épisode lorsque l'enseignante dessine des bandes de dix pour aller à deux-cent-huit. L'interprétation arithmétique multiplicative est utilisée cependant en même temps quand l'enseignante compte les dizaines pour obtenir la désignation parlée en France du cardinal de la collection de boutons demandée dans le message : « *ça fait dix paquets de dix boutons, ça fait cent, et elles, elles en voulaient deux fois plus, vingt. Elles en voulaient vingt, donc il faut encore rajouter la même chose, encore cent ça fait deux cents, et huit, deux-cent-huit* ». A noter par ailleurs que les élèves « clients » ont commencé à donner une stratégie consistant à passer de OF vers OG en s'appuyant sur vingt (dans une interprétation ordinale avec repérant ou	*rectangles représentant les paquets de dix au tableau)*, d'accord ? Est-ce que Chania et Tanina ont demandé (*elle montre l'écriture chiffrée « 20 » du message*) deux paquets de dix (*elle montre les deux rectangles représentant les paquets de dix*) ? (*elle montre à nouveau l'écriture chiffrée « 20 » du message)* ?: Non B : Elles ont demandé quoi ? ?: Vingt paquets de dix B : Vingt paquets de dix. ?: C'est beaucoup B : Ah c'est beaucoup vingt paquets de dix. Elles n'en ont eu que deux. Alors maintenant j'ai une question à vous poser : qu'est-ce qui est juste ? Le bon de commande, ou ce que Léa a donné à Chania et Tanina (*montrant les deux rectangles représentant les paquets de dix et les huit carrés)* ? Alors ça *(entourant les deux rectangles représentant les paquets de dix et les huit carrés et écrivant en dessous « 28 »)*, on a dit que ça faisait combien de boutons en tout ? Des élèves : Vingt-huit B : Vingt-huit boutons. Et elles voulaient vingt-huit boutons *(montrant le « 28 » en haut du bon de commande représenté au tableau).*Vingt-huit égale vingt-huit (*entourant l'égalité « 20+8=28 »*), est-ce que tout ça, ça va ensemble ? Des élèves : Oui B : Mylène tu n'écoutes rien du tout. Vingt paquets de dix boutons (*montrant le « 20 » sur le bon de commande*). Si on les dessine et que l'on dit …je vais vous dire combien ça fait et on va chercher ensemble. On va dire que ça c'est un paquet de dix boutons (*représentant au tableau un paquet de dix par un rectangle allongé qui va être reproduit à chaque fois qu'un paquet de dix boutons est évoqué)*, je fais une grande bande pour la dessiner. Ça, ça fait un paquet de dix boutons, ça fait dix, encore dix, ça fait vingt, encore dix ça fait trente, encore dix quarante, encore dix, cinquante, encore dix, soixante, encore dix, soixante-dix, encore dix, quatre-vingt, encore dix, quatre-vingt-dix, encore dix, cent (*des élèves ont donné les réponses avant l'enseignante au fur et à mesure qu'elle a représenté les dizaines : dix, vingt, trente, etc*.). Un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit,

	éventuellement additive). Cette stratégie permet d'obtenir la quantité à commander sous forme de paquets de dix (ici vingt boutons sous forme de plaques). L'élève jouant le rôle du marchand a dû alors traduire cette quantité sous forme de plaques. Il ne lui est alors pas nécessaire de savoir que dans vingt il y a deux « dix » (interprétation arithmétique multiplicative), mais il peut savoir que « dix et dix ça fait vingt » (il donne dix et encore dix) ou même commencer à donner les plaques de dix en énonçant « dix, vingt », dans une interprétation ordinale (la comptine des dizaines). L'enseignante ne demande pas d'explications aux élèves à ce sujet. Le mode de validation des messages étant principalement une stratégie OG vers OF et non l'inverse.	neuf, dix (*elle compte les dizaines une à une avec un geste rapide pour passer de l'une à l'autre*). Là, ça fait dix paquets de dix boutons, ça fait cent, et elles, elles en voulaient deux fois plus, vingt (*montrant au tableau l'écriture chiffrée « 20 » de la deuxième partie du message*). Elles en voulaient vingt, donc il faut encore rajouter la même chose, encore cent ça fait deux cents, et huit, deux-cent-huit. Des élèves : Deux-cents !! B : Donc si Léa avait bien donné ce qu'elles avaient demandé elle aurait donné deux-cent-huit boutons, vingt paquets de dix et huit boutons (*dessinant quelques autres paquets et huit carrés pour les boutons*). ?: Moi je peux arriver à mille
	3ème épisode : bilan	
	<u>3.1</u> <u>Description</u> : L'enseignante fait ressortir certains points dans ce qui a précédé. <u>Contenu</u> : Le mot dizaine n'est pas un mot familier aux élèves et est introduit avec « paquet de dix ». L'enseignante met en avant le fait de séparer les dizaines et les unités comme stratégie pour passer d'une désignation parlée en France à une désignation orale des groupements (OF vers OG). Ici, c'est l'appui additif (ou le repérant) qui est en jeu. L'enseignante indique que le passage de l'appui additif à l'appui multiplicatif (vingt à deux dix)	52'00 B : Alors, une dernière chose Lucas. Donc Léa elle a bien donné ce qu'il fallait pour avoir vingt-huit boutons, elle n'a pas respecté la commande et Chania et Tanina se sont trompées en écrivant leur commande. Mais ce qu'il y a d'important à retenir c'est qu'elles ont bien compris toutes les trois c'est qu'on mettait d'un côté les dizaines, les paquets de dix (*montrant au tableau l'écriture chiffrée « 20 » de la deuxième partie du message*) et de l'autre côté les boutons tout seuls (*montrant le « 8 » de « 20+8=28 »*). Là où ça ne va pas c'est qu'au lieu de compter dix boutons elles font comme si c'était un seul bouton, c'est des paquets de dix boutons (*écrivant « 10 » au dessus du mot « dix » dans le message*), c'est ça que vous avez oublié.

n'a pas été fait par les élèves. Elle ne rappelle pas le résultat (vingt c'est deux paquets de dix) et n'indique pas de stratégie dans ce contexte.	
3.2 Description : L'enseignante prend des exemples de collections qu'elle organise et dont la description mène à une désignation orale des groupements. Contenu : L'enseignante décide de changer de contexte pour mettre en relief une connaissance qui a manqué aux élèves précédents : il s'agit d'organiser une collection en groupements de dix (maximaux) et de distinguer le cardinal exprimé par sa désignation parlée en France de celui désigné à l'aide des groupements. Vingt est obtenu à partir de deux rangées de dix. Les élèves attestent le fait que vingt (élèves) ce n'est (donc) pas vingt rangées de dix (puisque c'est deux). Ici l'enseignante ne donne pas de stratégie pour passer de vingt à « deux dix ».	52'47 B : Allez vous asseoir. Chut ! Les enfants qui sont dans la rangée de droite levez le doigt. Chania, Tanina ! Levez le doigt les enfants de la rangée de droite. Vous les voyez ? Il y en a combien de rangées? Ça c'est une rangée et il y a combien d'enfants dans cette rangée ? ?: Un Des élèves : Dix B : Alors on va commencer par Taranica. Ça fait un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, dix, ça fait une rangée de dix, d'accord ? Baissez votre doigt. Rose ! Une rangée de dix enfants, d'accord ? Là c'est une rangée de dix, et là c'est une rangée de…, allez on va prendre les marchands avec. C'est une rangée de combien là ? ? : De neuf. B : De neuf. Chania assieds-toi. Si on veut faire comme les marchands, les marchands ils n'ont que des paquets de dix. Moi dans ma classe je ne veux que des rangées de dix : donc là j'ai une rangée de dix, ça va, ici j'ai une rangée de neuf .... ?: Ça va pas. B : Ça va pas, il faut que je rajoute quelqu'un, je vais rajouter Céline. Tu te mets dans cette rangée-là, assieds-toi là sur le banc. *(Céline change de rangée)*. Maintenant dans cette rangée j'ai combien d'enfants ? Les élèves : Dix. B : *(Montrant la dernière rangée)* Et ici, maintenant j'ai des enfants… Des élèves : Cinq B : Levez-vous. Je ne veux que des rangées de dix. Là je ne peux pas faire une rangée de dix, ils ne sont que cinq, on va les mettre devant le tableau. Moi dans ma classe je ne veux que des rangées de dix. Levez-vous, allez devant le tableau. *(Les cinq élèves restants se placent devant le tableau)*. Moi si je suis une marchande comme les enfants tout à l'heure et que je ne veux que des rangées de dix, j'ai deux rangées de dix enfants c'est comme deux paquets de dix, ça fait combien d'enfants ? ?: Vingt

		B : Vingt, et là j'ai cinq enfants tout seuls, comme les boutons tout seuls. Deux rangées de dix et cinq enfants ça fait combien en tout ? Des élèves : Vingt-cinq ?: Parce que deux fois dix ça fait vingt B : Est-ce que si je demande, si je vais dans la classe d'à côté du CP puis je dis : « ben Catherine toi dans ta classe tu vas faire comme dans ma classe tu vas faire que des rangées de dix », est-ce que je dois lui dire qu'il faut qu'elle fasse deux rangées de dix pour vingt élèves ou est-ce que je lui dis qu'il faut qu'elle fasse vingt rangées de dix ? Des élèves : Deux rangées de dix B : Deux rangées de dix comme ici. Alors attention, un paquet de dix, si je parle en paquets de dix, en rangées, je vais dire deux rangées pourtant ça fait vingt enfants et pas vingt rangées, c'est comme tout à l'heure avec les boutons et les plaques, et là j'ai cinq petits boutons tout seuls, cinq petits enfants tout seuls qui ne peuvent pas faire une rangée entière parce qu'ils ne sont pas dix, d'accord ?
4ème épisode : annonce de la suite		
	<u>Description</u> : L'enseignante annonce comment va se poursuivre la séance. <u>Contenu</u> : La sous-tâche de validation par superposition de la collection obtenue avec le Ziglotron n'est pas abandonnée par l'enseignante. La séance se termine du fait que c'est l'heure de la sortie.	57'10 B : Bon on va s'arrêter là *(les cinq enfants regagnent leur place)*. Vous laissez les feuilles sur votre table, chut ! Vous laissez vos feuilles sur les tables. Chania, Tanina, Rose ! Tout à l'heure, cet après-midi à une heure et demie. Thomas assieds-toi ! Bon alors vous croisez les bras, vous posez la tête sur les bras, j'ai quelque chose à vous dire encore. Tout à l'heure à une heure et demie, vous vérifierez si vos commandes allaient avec ce que vous avez demandé, vous découperez et vous collerez les boutons sur les Ziglotron pour voir si vous pouvez les réparer. 58'10

<table>
<tr><th colspan="2">Lancement d'une première tâche 0'- 15'47</th></tr>
<tr><th colspan="2">1er épisode : indication générale de l'organisation de la séance, indication tâche « coloriage magique », installation matérielle.</th></tr>
<tr><td>Description :
L'enseignante indique le fonctionnement général de la séance.
Contenu :
Pendant la première partie de la séance, les deux tiers des élèves auront à faire un « coloriage magique » tandis qu'un tiers aura à faire une commande pour réparer un Ziglotron : c'est ce qu'explique l'enseignante ici. Ce tiers est composé des élèves jugés faibles par l'enseignante. Consécutivement aux difficultés qu'elle a notées à la fin de la séance 2, ces derniers ont eu, entre les séances 2 et 3, une séance supplémentaire pour distinguer le « un » de « un paquet » du cardinal d'élément qu'il contient (en particulier dix). Ils ont aussi été entraînés à faire des groupements sur une collection figurée en comptant un à un les objets qu'ils contiennent et en entourant chacun des groupements constitués. Ces exercices étaient d'un niveau technique et non problématiques (sens TSD). Ils n'étaient pas reliés à l'adoption d'une stratégie pour réussir une tâche.</td><td>00'
B : On va continuer à travailler avec le ziglotron mais il va y avoir une organisation un petit peu particulière : donc il y a des enfants qui vont commencer à travailler sur le Ziglotron en premier, pendant que d'autres feront autre chose.
?: Un coloriage magique !
B : Et ensuite on travaillera tous ensemble sur les ziglotrons. Alors, ouvrez bien vos oreilles : je vais donner d'abord des ziglotrons à certains enfants. A ces enfants-là je vais leur expliquer ce que je veux qu'ils fassent, d'accord ? Les autres vous ferez un coloriage magique. Ensuite vous vous mettrez deux par deux, je vous dirai qui se mettra avec qui, ceux qui ont travaillé sur les ziglotrons devront montrer leur travail à leur voisin, et le voisin devra dire à l'autre s'il est d'accord avec ce qu'il a fait, et s'il n'est pas d'accord, il devra lui expliquer pourquoi il n'est pas d'accord, et lui expliquer pour qu'il comprenne et que vous mettiez tous les deux d'accord ensemble sur le bon de commande qu'il va falloir faire pour commander les gommettes pour réparer les Ziglotrons. Ça a l'air d'être un peu compliqué comme ça, on va le faire. Je vais donner déjà le coloriage magique. Le coloriage magique c'est un petit peu différent que d'habitude. Donc ce sont des additions : si vous trouvez un résultat plus petit que dix, tu entends Chania ? Plus petit que dix il faudra colorier en rouge. Alors je vais écrire « plus petit que dix », vous coloriez la case en rouge. Moi je ne vais pas avoir de gris, je vais l'écrire en marron mais c'est le gris, d'accord ? Je n'ai pas de gris pour le tableau. Vous pourrez prendre votre crayon de papier si vous n'avez pas de crayon de couleur ou de feutre en gris. (B écrit au tableau « 10 ») Quand c'est égal à dix vous coloriez en gris : j'ai fait marron mais c'est pour le gris ce n'est pas grave. Et si c'est plus grand que dix vous coloriez la case en bleu. (B relit au tableau) Plus petit que dix en rouge, égal à dix en gris, plus grand que dix en bleu, d'accord ?
(B distribue les coloriages magiques à certains élèves) Un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, dix, onze, douze, et treize.
Alors, ceux qui n'ont pas de coloriage magique vous regardez devant moi, enfin regardez. Tu fais la tête Simon ? De toute façon je crois que je vais en redonner à certains. (B distribue les</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Dans cet épisode, l'enseignante commence par réunir les conditions matérielles pour le « coloriage magique » des deux tiers : il s'agit de reconnaître les écritures chiffrées des nombres inférieurs et supérieurs à dix (écrit « 10 »), ce qui est sans lien avec la séance « Ziglotron ».</td><td>ziglotrons aux autres élèves) Tanina, je t'en ai pas donné ?
Tanina : Si.
B : Ben alors, allez-y hein ! Au travail !</td></tr>
<tr><td colspan="2">2ème épisode : indication de la tâche concernant le Ziglotron</td></tr>
<tr><td colspan="2">La tâche est découpée en deux sous-tâches, faire des groupements de dix sur le ziglotron (indiqué dans le sous-épisode 2.1) puis écrire le message (indiqué dans le sous-épisode 2.2). Les élèves savent déjà qu'il y a quarante-deux boutons/gommettes (dit oralement puis inscrit « 42 » sur la fiche ziglotron). Elle ne correspond pas à la tâche prescrite par le manuel.</td></tr>
<tr><td><u>2.1</u>
<u>Description</u> :
L'enseignante indique comment faire des groupements de dix sur le ziglotron.
<u>Contenu</u> :
A la différence de la séance précédente, les élèves ont une fiche ziglotron sur laquelle est marqué « 42 », ils n'ont donc qu'à produire le bon de commande, sans être obligés de dénombrer, ils n'ont pas non plus à aller chercher la commande.
L'enseignante aide les élèves à lire écriture chiffrée « 42 » : le « 4 » est relié à « quarante » et le « 2 » à « deux », utilisant ainsi une des stratégies EC vers OF mettant en avant les repérants/appuis additifs de la numération parlée en France, l'écriture chiffrée reflétant ces appuis.
La tâche est découpée en deux sous-</td><td>7'15
B : Alors les enfants qui ont les ziglotrons : levez le doigt les enfants qui ont le ziglotron. D'accord, vous regardez par là ? Baissez votre doigt. Les autres je ne veux pas vous entendre. Mylène si tu n'es pas avec nous ça ne va pas aller, d'accord ? Vous avez un ziglotron à réparer. Najma ! Lucas ! Tout en bas du ziglotron j'ai écrit combien il fallait de gommettes en tout. Qu'est-ce que c'est écrit ?
?: Quarante-quatre.
B : Il faut… ?
?: Quarante-deux.
?: Quarante-quatre.
B : Il faut… ? Ça c'est quoi ? (Ecrivant le nombre quarante-deux) Les nombres qui commencent par le quatre c'est la famille des ?
?: Quarante.
B : Quarante. Et après il y a écrit ?
?: Deux.
B : Deux. C'est quarante-deux. Vous avez tous le même, d'accord ? Vous avez tous le même ziglotron. Levez le doigt ceux qui étaient lundi au groupe de mathématiques. D'accord. Donc on a fait des choses au cours de mathématiques avec les ziglotrons pour trouver combien il fallait de plaques de dix gommettes, et puis après combien il fallait de gommettes toutes seules. Qui est-ce qui se souvient comment on a fait pour trouver combien il fallait de plaques de dix</td></tr>
</table>

	tâches, la première est indiquée ici sans faire référence à la deuxième. Cette première sous-tâche consiste à constituer des groupements de dix sur la fiche (collection figurée de carrés), ce que la majorité des élèves de ce tiers de classe a fait dans une séance auparavant. Des aides sont (re)données pour exécuter cette première sous-tâche sous forme d'indications techniques concernant l'énumération. La maximalité est spécifiée par le fait que, lorsqu'il est possible de faire d'autres groupements, il faut le faire. Ici cette sous-tâche n'est pas reliée au futur message.	gommettes pour réparer le ziglotron ? Ce qu'on a fait lundi pour expliquer à ceux qui n'étaient pas là lundi ? Il n'y a que Rosetta qui s'en souvient ? (?) Tu ne te souviens pas ? Non. Mylène ? Camélia ? Tu te souviens ou pas ? Oui ou non ? Oui ? Pourquoi tu ne lèves pas le doigt alors ? Tu te souviens comment on a fait lundi pour trouver combien il fallait de plaques de dix gommettes pour réparer le ziglotron ? Et toi Najma ? Oui ? Alors dans les enfants qui me disent oui, Chainez tu te souviens toi aussi ? Non ? Dans les trois enfants qui se souviennent qui est-ce qui veut expliquer ce qu'on avait fait ? Oféida ? Oféida : *(Inaudible)* B : Tu viens là le dire fort ? Tu te souviens bien, passe de ce côté-là. Lucas tu as écouté ? Céline aussi ? Vous n'étiez pas là Lundi. Donc Oféida elle va réexpliquer. Répète très très fort. Oféida : J'avais vingt-huit boutons qui s'étaient enlevés, après avec la maîtresse j'ai entouré deux plaques de dix ça fait vingt, et après huit petits boutons qui fait vingt-huit. B : Donc on a entouré des groupes de ? Oféida : Dix. B : Dix gommettes, heu dix boutons. Donc tu les as entourés sur quoi, comment ? Oféida : Sur le Ziglotron. B : Sur le Ziglotron. Est-ce que Najma tu t'en souviens maintenant ? Oui ? Camélia ? Mylène ? Chainez ? Calista ? Céline tu as compris ce qu'ils ont fait ? Je vais vous montrer. *(A Oféida)* Tu t'assois, tu reprends ta feuille ? *(B fixe un ziglotron format A3 au tableau)* J'ai le même ziglotron que vous, je l'ai agrandi un peu pour qu'on le voie mieux mais c'est le même, quarante-deux gommettes ici, d'accord ? Qui est-ce qui veut faire sur ce ziglotron-là ce que viens d'expliquer Oféida ? Camélia tu viens ? Tu fais le tour parce que là il y a le banc. *(Camélia vient au tableau)* On va prendre un feutre violet. Alors tu vas faire quoi ? Camélia : Je vais faire des groupes de dix. B : Elle va faire des groupes de dix. Comment tu sais qu'il y en aura dix dans ton groupe là ? Comment tu fais pour savoir qu'il va y en avoir dix ? Comment tu fais Camélia pour savoir que tu vas en entourer dix ? Comment on peut faire pour savoir qu'on va en entourer dix des boutons ? Nisrine ? Nisrine : On peut faire des groupes de cinq. B : Alors on peut faire des groupes de cinq. Alors il faut combien de groupes de cinq pour faire dix ?

		Nisrine : Deux. B : Deux comme les mains. *(Montrant)* Cinq et cinq ça fait dix. On peut faire des groupes de cinq. Et si on veut faire un groupe de dix directement, comment vous faites pour savoir qu'il y en a dix ? Calista comment tu fais ? Calista : On peut compter. B : On peut compter. Est-ce que vous pensez que c'est bien de compter vous pour voir s'il y en a dix ? Tu peux compter Camélia pour voir si tu allais en entourer dix ? Tu comptes. Est-ce que tu as compté quand tu as fait ça ? Oui ? Ben on peut oui. Alors, peut-être ce que tu peux faire aussi c'est mettre un petit point sur les carrés pour savoir ceux que tu as comptés et ceux que tu n'as pas comptés, on avait vu ça lundi aussi. Mets des petits points et compte fort. (Camélia *compte)* Voilà, alors mets-toi sur le côté. *(Montrant)* Donc là Camélia elle a fait un groupe de dix, d'accord ? Est-ce qu'on peut en faire d'autres des groupes de dix, avec les boutons qui restent ? ?: Oui. B : Oui ? Donc on peut continuer à faire des groupes de dix.
	2.2 Description : L'enseignante tente de relier la tâche précédente (entourer des groupes de dix boutons/gommettes) à la commande à faire. Contenu : L'enseignante indique que les élèves doivent d'abord faire la tâche précédente (entourer des groupements de dix carrés), puis qu'ils auront à remplir le bon de commande. Elle tente de rendre explicite le lien entre les deux, mais les élèves restant silencieux (**incident**), elle essaye de relancer en posant une question sur la forme du message adressé	13'55 B : Ce groupe de dix là il veut dire quoi ? Qui est-ce qui peut expliquer pour la commande ? Ça veut dire quoi ça ? Quand vous allez voir le marchand, vous aurez tout fini, mais là, s'il n'y a que ça, si c'était un ziglotron avec que ça, ça voudrait dire quoi pour le marchand ? (*la classe reste silencieuse*) Vous allez lui demander quoi ? ?: Dix. B : Dix boutons ? Il a le droit le marchand de vous donner dix boutons tout seuls ? ?: Non. B : Non. ?: Il a pas le droit de dépasser. B : Qu'est-ce que vous allez lui demander au marchand ? ?: Dix plaques. B : Dix plaques ? Dix plaques de dix ? Vous en pensez quoi les autres ? Ça c'est quoi ? Camélia elle a dit « je vais faire des groupes de dix ». Elle a entouré un groupe de dix. Et pour pouvoir réparer un groupe de dix boutons il faut demander quoi au marchand ? Une plaque de dix ? Ou dix plaques de dix ?

	aux marchands puis donne un élément de réponse en indiquant la succession des deux sous-tâches.	?: Une. B : Pourquoi ? (*L'enseignante montre un groupe*) Elle a entouré un seul de dix comme ça, Nisrine ? (*la classe reste silencieuse*). Donc sur votre feuille, sur votre ziglotron vous allez faire comme Carmina et continuer, d'accord ? Vous allez continuer à faire des groupes de dix pour savoir combien vous allez en demander au marchand après. Quand vous avez terminé vos groupes de dix sur le ziglotron vous levez le doigt et je vous donne le bon de commande à remplir, d'accord ? Est-ce que tout le monde a compris ce qu'il devait faire ? Oui ? Alors allez-y. 15'47

Réalisation de la première tâche par les élèves 15'47 - 25'53 L'enseignante ne va s'occuper que des élèves ayant effectué tâche « Ziglotron ».		
1er épisode : rappel auprès de certains groupes de certaines « règles du jeu »		
	Le bon de commande vierge que l'enseignante tient en main est le suivant : Il faut 42 gommettes. Ma commande Je voudrais **...** paquets de dix gommettes **...** gommettes seules Au fur et à mesure qu'elle leur donne ce bon, l'enseignante va indiquer aux élèves à quel endroit écrire les réponses (les deux zones de pointillés) en lisant le bon.	15'47 *(B passe entre les élèves qui entourent des carrés sur leur Ziglotron. Elle n'intervient pas)*
2ème épisode : aide en direction de la classe sur la stratégie de comptage un à un (énumération)		
	2.1 Description : L'élève a entouré quatre groupes de dix. L'enseignante s'informe sur ce que va demander l'élève au marchand.	17'50 B : *(Avec ? qui a entouré quatre groupes de dix)* Tu vas demander combien de paquets de dix gommettes ? ?: Quatre. B : Quatre ? Alors écris quatre ici (*montrant l'emplacement sur le bon*). Combien de

	Contenu La réponse correcte est produite à l'oral, l'enseignante indique à quel endroit écrire cette réponse sur le bon de commande, anticipant une difficulté du passage à l'écrit (les élèves sont des lecteurs débutants).	gommettes toutes seules tu veux ? ?: Deux. B : Ecris-le. Mets ton prénom sur les deux feuilles.
	2.2 Description : L'élève a coché tous les carrés sur son ziglotron sans faire de groupement(s). L'enseignante s'informe sur ce que va demander l'élève au marchand. Contenu : La tâche consistant à entourer des groupes de dix carrés n'a pas été entreprise par l'élève, c'est pourtant celle qui était passée au tableau dans la phase de lancement, créant un **incident.** L'enseignante demande un approfondissement et un **nouvel incident** survient puisque l'élève indique qu'il a compté, ce qui est inutile puisque le nombre est indiqué par écrit sur sa feuille (et a été donné à l'oral). En outre le résultat obtenu « vingt-et-un » est faux. L'enseignante donne alors la réponse et indique l'erreur à l'élève. L'enseignante relance finalement de manière neutre quant au passage au bon de commande. L'élève n'a pas compris la tâche qu'il	18'10 B : *(Avec une autre élève, Camélia)* Alors camélia, combien tu vas demander de paquets de dix gommettes ? Camélia : Deux. B : Alors comment tu sais ça ? Camélia : Parce que j'ai compté. B : Alors le marchand il n'a pas le droit de te donner plus que neuf gommettes toutes seules. Tu vas demander quoi exactement ? Camélia : Des groupes de dix. B : Pourquoi ? Camélia : Parce qu'on n'a pas le droit de dépasser neuf. B : Bon alors comment tu vas faire pour ton ziglotron alors ? Il y a quelque chose qui m'étonne (*l'enseignante regarde le travail de l'élève*), qu'est-ce que tu as fait au tableau tout à l'heure ? Camélia : J'ai entouré. B : Pourquoi tu as entouré ? Camélia : Pour faire un groupe de dix. B : Et à quoi ça sert de faire des groupes de dix ? Camélia : Pour pas se tromper. B : Pour pas se tromper quand on fait quoi ? Camélia : Quand on va coller les gommettes. B : Et donc toi tu penses que tu n'as pas besoin de faire les groupes de dix ? Ça va tu ne trompes pas ? Camélia : Je sais pas. B : Alors est-ce que tu pourrais trouver un moyen de savoir si ce que tu as fait ça va

	devait faire et le lien entre la première partie de tâche et la seconde (écrire le message). Il reste sur une tâche « habituelle » consistant à dénombrer les objets de la collection dans un contexte de classe (effet d'un contrat didactique), tâche qui reste pour lui problématique. L'enseignante signale les erreurs mais ne donne pas d'autres aides. Elle essaye cependant de l'aiguiller sur la sous-tâche consistant à compter des paquets de dix en lui signalant qu'elle peut compter « *quelque chose* » et lui rappelant qu'il doit indiquer des paquets de dix gommettes. Dans la suite de la séance, épisode 1.2 de la deuxième phase de travail, l'enseignante va voir que l'élève a dénombré tous les carrés en les cochant et inscrit « 42 » sur la première ligne de son bon de commande.	ou ça ne va pas ? Tu as compté toutes les gommettes là ? Camélia : Oui. B : Enfin les gommettes, les boutons qui sont arrachés tu as tout compté ? Camélia : Oui. B : Tu en as trouvé combien ? Camélia : Vingt-et-un. B : Tu as vu ce qui a écrit ici ? Ce que j'ai dit tout à l'heure ? Alors qu'est-ce qui est écrit là ? Camélia : (*lisant « 42* gommettes ») Quarante-deux boutons. B : C'est écrit gommettes, ça pourrait être des boutons. Il faut quarante-deux gommettes. Et toi quand tu comptes tu as trouvé qu'il en fallait vingt-et-un c'est ça ? Camélia : Oui. B : Alors, il y a quelque chose qui ne va pas là. Est-ce que tu avais besoin de compter toutes les gommettes, les boutons ? Tu sais j'ai dit tout à l'heure j'ai compté et j'ai écrit en bas de la feuille que sur ce ziglotron il fallait quarante-deux gommettes, d'accord ? Donc si tu recomptes et que tu ne trouves pas quarante-deux c'est que tu t'es trompée. Toi tu as trouvé vingt-et-un ça veut dire que ça n'allait pas. Bon alors qu'est-ce que tu peux faire maintenant pour savoir, pour trouver combien tu vas demander de paquets de dix gommettes ? Camélia : Je vais recompter. B : Je te laisse le bon de commande Camélia. Si tu penses qu'il faut que tu recomptes quelque chose, que tu fasses quelque chose, tu le fais. Et puis tu écris combien il faut de paquets de dix gommettes et combien de gommettes toutes seules en sachant que tu ne peux pas demander plus que neuf gommettes toutes seules, d'accord ?
	<u>2.3</u> <u>Description</u> : Deux élèves ont entouré quatre groupes de dix. L'enseignante intervient dans la discussion entre deux élèves à propos de deux carrés qu'ils n'ont pas entourés.	21'32 B : *(B va voir un autre groupe d'élèves)* Il te manque un quoi ? Pourquoi ? Chainez: J'en ai deux. B : Qu'est-ce que vous voulez dire par « il nous manque » ? Calissa: *(Inaudible)* B : Et Chainez pourquoi tu dis qu'il t'en manque ? Calissa elle dit qu'il ne lui en manque pas. Calissa: Bah non parce que là il y en a deux : moi j'ai coché quatre groupes de dix et il

	Contenu : Les élèves vont finalement entourer aussi les deux qui restent, visiblement dans un souci de marquage pour indiquer qu'ils n'ont pas oublié de les « compter ». Ceci n'est pas nécessaire pour la deuxième partie de la tâche et n'a pas été demandé dans la première. Les élèves ont réussi la première partie de la tâche, mais l'enseignante ne peut pas savoir ici s'ils vont réussir la deuxième (et utiliser la première partie de la tâche).	t'en reste deux tu demanderas deux boutons tout seuls dans ta commande. B : Qu'est-ce que tu en penses Chainez ? Calissa : Parce que si tu en rajoutes un paquet ça fera pas deux, ça fera dix. B : Et le marchand il n'a que des groupes de dix, il n'a pas des groupes de onze, ou douze ou treize gommettes. Qu'est-ce que tu vas faire pour ces deux là, Chainez ? Chainez : Je vais les entourer tous les deux. B : Vas-y si tu veux. Tu remplis le bon de commande ? Combien de paquets de dix gommettes et combien de gommettes toutes seules.
	2.4 Description : L'enseignante continue à donner les bons de commande aux élèves après qu'ils ont fini la tâche précédente (entourer des groupes de dix carrés). Aucun élève n'a entouré le maximum de groupes de dix possibles : ils ont entouré deux ou trois groupes de dix. Contenu Un **incident** survient et se répète à chaque fois que l'enseignante voit que l'élève n'a pas entouré le maximum de groupes de dix. L'enseignante n'indique pas l'« erreur » de l'élève mais lui signale parfois qu'il ne peut pas commander plus de neuf boutons seuls (ce qui peut l'inciter à faire d'autres groupements de dix).	23'10 B : *(B va voir un autre groupe d'élèves)* Alors Céline, tu remplis le bon de commande maintenant ? Combien tu voudrais de paquets de dix gommettes, et ici combien de gommettes toutes seules. Tu sais qu'on ne peut pas demander plus que neuf gommettes toutes seules. Vas-y. B : *(B va voir un autre groupe d'élèves)* Tu as fini ou pas ? Oui ? Alors, tu peux remplir ton bon de commande alors ? Là tu vas écrire combien il te faut de paquets de dix gommettes, et là combien de gommettes toutes seules. Je te rappelle que tu ne peux pas demander plus que neuf gommettes toutes seules, d'accord ? *(A un autre élève)* Tu as fini toi Lucas ? Oui ? Alors tu remplis le bon de commande. Tu passes ta commande. Tu écris combien il te faut de paquets de dix gommettes là, et ici si tu veux combien de gommettes toutes seules. On ne peut pas te donner plus que neuf gommettes toutes seules, d'accord ? *(A un autre élève)* Tu remplis ton bon de commande Faïda ? Ici les paquets de dix gommettes, et là les gommettes toutes seules. *(A un autre élève)* Tu remplis ton bon de commande ? ?: J'écris ? B : Ici les paquets de dix gommettes, et combien tu veux de gommettes toutes seules. Les gommettes toutes seules et ça c'est les paquets de dix gommettes. Tu notes ici les paquets de

Par ailleurs l'enseignante indique à quel endroit écrire la réponse sur le bon de commande, anticipant une difficulté du passage à l'écrit (les élèves sont des lecteurs débutants).	dix gommettes, et là les gommettes toutes seules, d'accord 25'53

Lancement d'une deuxième tâche 25'53 – 31'29	
Nous avons utilisé le terme de deuxième tâche pour des facilités de découpage de la séance. En fait celle-ci est différente selon les élèves, mais elle se déroule en même temps. Elle est dans la continuation de la première pour le tiers des élèves et se fait avec un autre tiers d'élèves : elle consiste en une discussion par binôme du bon de commande élaboré par un des deux élèves (la fiche Ziglotron est disponible). Le troisième tiers doit élaborer individuellement et seul un bon de commande, sans fiche Ziglotron. Le nombre de boutons en jeu est le même pour tous et est signifié par « 42 ».	
Unique épisode : indication de l'organisation de la séance (rappel), indication des nouvelles tâches, installation matérielle.	
Description : L'enseignante organise la classe pour la suite de la séance. Une partie des élèves ayant fait le « coloriage magique » va intervenir en interaction avec ceux ayant écrit le bon de commande afin de discuter de sa validité. Une autre partie va compléter (individuellement) le bon de commande. Contenu Dans cette deuxième partie de séance, la moitié de ceux qui ont fait un « coloriage magique » va discuter (par binôme) avec les élèves « Ziglotron » précédents à propos du bon de commande qu'ils ont produit. Se crée ainsi une situation de communication sur le message : l'enseignante organise ainsi une des sous-étapes des séances 1 et 2. L'autre moitié des deux tiers des élèves ayant fait auparavant un « coloriage magique » a pour tâche de produire un bon de commande à partir de la seule indication du nombre de boutons manquants, quarante-deux, écrit « 42 ». Cette tâche est donc identique à celle prévue pour tous les élèves dans le manuel pour cette troisième séance.	25'53 B : *(B retourne au tableau)* Alors, chut ! Baissez vos doigts. Les enfants qui faisaient le coloriage magique vous rangez les crayons de couleur, les feutres. Baisse ton doigt Tanina. Chut ! Ilalane, Miroud, rangez ! Sofiane, tu vas te mettre à côté de Mylène, Taranica tu vas te mettre à côté de Simon, Sofrida tu vas te mettre à côté de Toïre, Jonathan je te mets à côté de Rose, tu prends une chaise pour te mettre à côté d'elle, Souleymane tu te mets à côté de Calissa, Chainez tu te mets à côté de Jason, Chania tu vas rester avec eux, je vais te rajouter une chaise, vous allez rester tous les trois ensemble. Lucas tu vas te mettre à côté d'Ilanane, Tanina tu es à côté de Najma, Nisrine tu te mets à côté de Manon, prend tes feuilles. Prenez vos feuilles de ziglotron. Et Quentin tu te mets à côté de Camélia, Thomas à côté de Léon, Céline à côté de Léa. Ilalane et Lucas vous allez là. Ilalane tu t'assois à ta place, réveille-toi. Chut ! Eh, oh ! Vous écoutez ? Léa ! Chut ! Sofiane ! Mylène ! Non tu ne gommes pas pour l'instant tu poses ta gomme et tu écoutes. Ilalane ! Il faut absolument que vous écoutiez ce que j'ai à vous dire sinon ça ne va pas aller ! Ça ne va pas aller comme je veux plus exactement. Chut ! Chania elle parle encore ! Donc vous avez des groupes de deux : il y a des groupes de deux où il y a un

	La différence principale étant que le terme « bouton » a été remplacé par celui de « gommette ». La partie de la classe qui discute en binôme de la validité du bon de commande a à sa disposition la fiche Ziglotron sur laquelle sont entourés ou non des groupes de dix suivant le travail produit (voir ci-avant dans la première phase de travail pour une description des travaux des élèves). Les élèves de l'autre partie de la classe, qui sont confrontés individuellement à la tâche prescrite par le manuel dans la séance 3, représentent une minorité d'environ un tiers. Ils ont été choisis parce qu'ils sont considérés par l'enseignante comme des bons élèves, donc pouvant réussir la tâche (entretien post-séance). Cette organisation a pour but de créer un milieu suffisant pour que chacun puisse être amené à produire des réponses que l'enseignante pourra alors valider en utilisant ce milieu. A noter en outre que l'enseignante introduit la possibilité de faire plusieurs essais.	ziglotron avec un bon de commande comme par exemple Tanina et Najma, et il y a des groupes où il n'y a rien, comme par exemple Simon et Taranica. Les groupes qui n'ont pas, qui n'ont rien avec eux, je vais vous donner un bon de commande qui correspond à ce ziglotron-là *(montrant le bon de commande vierge fixé au tableau sur lequel est écrit en haut « 42 »)*. Ce ziglotron il lui faut quarante-deux gommettes, je vous demande de remplir le bon de commande. Combien il faut de paquets de dix gommettes, combien il faut de gommettes toutes seules. Les autres, chut ! Les autres enfants, Calista et Souleymane ! Vous allez regarder ensemble le bon de commande que vous avez…, que l'autre vous a apporté sur la table, vous allez regarder ensemble, chut ! Si vous n'êtes pas d'accord, vous expliquez à l'autre pourquoi vous n'êtes pas d'accord. Et il faut que l'autre il comprenne, pour qu'il puisse après nous expliquer. Qu'il ait bien compris ça va pourquoi ça ne va pas. Si vous voulez changer le bon de commande je vous en donne un nouveau, vous lèverez le doigt pour demander, vous ne gommez pas le premier bon de commande, c'est compris ça ? Des élèves : Oui. B : Si vous en voulez un deuxième vous levez le doigt et là vous pouvez changer. Vous regardez ensemble. Je vais vous demander il faut que vous soyez d'accord, je vais vous demander. 31'29

Réalisation de la deuxième tâche par les élèves 31'29 – 43'15		
Unique épisode : l'enseignante passe voir des groupes.		
	1.1 Description : L'enseignante intervient auprès d'un binôme ayant un ziglotron et un bon de commande déjà complété auparavant. Deux dizaines de carrés sont entourées sur le ziglotron, et dans ces deux dizaines, dix-huit carrés sont cochés. Le message correspondant est le suivant (en gras ce qu'a écrit l'élève): Il faut 42 gommettes. Ma commande Je voudrais **10** paquets de dix gommettes **18** gommettes seules. Contenu L'élève qui n'a pas fait le bon de commande invalide la réponse. L'argument donné est d'ordre phonétique, « *parce que avec dix et dix-huit comme on entend pareil ça peut pas être ça* ». L'enseignante demande alors aux deux élèves d'écrire un nouveau message (utilisant ainsi le milieu matériel qu'elle a instauré), ce qui peut être interprété comme une invalidation (sans argumentation) du message qui a été écrit.	31'29 B : *(B va voir des élèves levant le doigt)* Alors ? Et alors Lucas ? Lucas : Quarante-deux. B : Quarante-deux quoi ? Lucas : Quarante-deux gommettes. B : Bon et alors avec ce que tu demandes est-ce que tu as quarante-deux gommettes ? Lucas : Non. B : Ah bon ? Comment tu sais que tu n'en as pas quarante-deux ? Lucas : Parce que avec dix et dix-huit comme on entend pareil ça peut pas être ça. B : Ça peut pas être ça. Parce qu'on entend dix et dix-huit. Et tu as une idée de ce qu'il faudrait ? Lucas : Il faudrait…, il fallait qu'on mette ça là (*montrant les carrés non groupés sur le ziglotron*), après il y en a ... B : Alors vous quoi ? Vous allez réfléchir ensemble pour ce que vous voulez écrire sur le nouveau bon de commande. Quand vous êtes d'accord tous les deux, vous savez, je viendrai vous voir pour que vous m'expliquiez, d'accord ? Je vous donnerai le bon de commande à remplir, d'accord ? *(B va voir un autre groupe d'élèves)* Mettez vos noms sur la feuille à tous les deux, devant.
	1.2 Description : L'enseignante intervient auprès d'un groupe ayant un ziglotron et un bon de commande déjà complété auparavant. Tous les carrés sont cochés sur le	32'51 B : *(B va voir un autre groupe d'élèves)* Alors vous voulez changer le bon de commande ou pas ? Camilla: Non. B : Pourquoi ?

	ziglotron, aucun groupement n'est visible. Le message correspondant est le suivant (en gras ce qu'a écrit l'élève): Il faut 42 gommettes. Ma commande Je voudrais **42** paquets de dix gommettes ... gommettes seules. <u>Contenu</u> L'élève qui a produit le message est celle de l'épisode 2.2 de la première phase de réalisation de la tâche. Elle a uniquement indiqué la quantité par une écriture chiffrée, qu'elle a obtenue via une désignation parlée par comptage un à un : une stratégie OF vers EC mettant en jeu l'interprétation ordinale de la numération parlée, l'écriture chiffrée étant la forme écrite de l'oral. L'enseignante laisse dans un premier temps le deuxième élève expliquer à la première : elle ne peut pas contrôler la stratégie qu'il va donner et donc l'interprétation qui va être utilisée. L'enseignante guide ensuite l'élève afin d'expliquer « *que quarante-deux paquets de dix ça fait plus que quarante-deux gommettes* » en énonçant la comptine des dizaines au fur et à mesure que les dix doigts des deux mains sont ouverts et fermés. L'enseignante guide ainsi sur une stratégie OG vers OF (et non l'inverse). Un **incident** survient alors lorsque l'enseignante demande si l'élève sait combien de fois il a dit de dix (interprétation arithmétique additive ou ordinale) et que l'élève indique la réponse erronée « dix-huit » (il est possible qu'il ait compté le	Camélia: Parce Quentin il a dit non. B : Mais ça ne me va pas comme solution. Il faut que tu lui expliques pourquoi tu dis non, tu lui as expliqué pourquoi ? Quentin : Oui. B : Alors réécoute bien les explications de Quentin. Quentin : Parce que quatre fois dix ça fait quarante, et si elle met quarante fois dix, ça fait…plus que quarante-deux. B : Qu'est-ce qu'elle a écrit Camélia sur son bon de commande ? Quentin : Quarante-deux paquets de dix. B : De dix gommettes. Et toi tu dis que ça ne fait pas quarante-deux gommettes ? Quentin : Non. B : Tu dis que ça fait plus. Quentin : Oui. B : Qu'est-ce que tu en penses de ça Camélia ? Tu as entendu ce qu'il a dit ? Qu'est-ce que tu en penses ? Camélia : *(Inaudible)* B : Je te demande ce qu'il vient de te dire. Que quarante-deux paquets de dix ça fait plus que quarante-deux gommettes. Est-ce que pour toi c'est vrai ou est-ce que tu ne sais pas si c'est vrai ? Ou tu penses que ce n'est pas vrai ? Camélia : *(Inaudible)* B : Alors Quentin tu vois, elle n'a pas l'air de savoir si c'est vrai ou pas. Elle dit oui mais elle ne sait pas expliquer pourquoi. Comment tu pourrais lui montrer que c'est vrai que quarante-deux paquets de dix gommettes c'est trop ? Avec les doigts ? Quentin : Oui. B : Vas-y. Quentin : *(Montrant ses mains)* Dix doigts ça fait dix, encore dix ça fait vingt, encore dix ça fait trente, encore dix ça fait quarante, encore dix ça fait cinquante, encore dix ça fait soixante, encore dix ça fait soixante-dix, encore dix ça fait quatre-vingts, encore dix ça fait quatre-vingt-dix. B : Et là combien de fois déjà tu as dit de dix ? Tu sais combien de fois tu

	nombre de mains qu'il a successivement ouvertes et fermées). L'enseignante ignore l'incident, en indiquant que le nombre obtenu en répétant dix (quatre-vingt-dix) est supérieur à quarante-deux (comparaison de deux désignations parlées en France). L'interprétation arithmétique multiplicative n'est donc pas en jeu, puisque l'élève ne dénombre pas le nombre de dix qu'il prononce (il est possible qu'il dénombre le nombre de mains).	l'as dit déjà ? Quentin : Oui. B : Combien de fois ? Quentin : (*Il regarde le bon de commande*) Dix-huit fois B : Dix-huit fois ? Alors c'est pas encore quarante-deux fois de toute façon. Est-ce que ce qu'il a dit Quentin ça dépasse quarante-deux gommettes ou pas? Quarante-deux doigts ou pas ? Il en était à quatre-vingt-dix, est-ce que ça dépasse quarante-deux ? Camélia : Oui. B : Oui. Alors essaye d'expliquer à Camélia ce qu'il faudrait comme bon de commande. Essaye de lui expliquer à elle, tu as le droit d'écrire sur la feuille pour lui montrer si tu veux. Toi aussi Camélia tu as le droit d'écrire si tu veux. Quentin tu lui dis si tu ne comprends pas.
	1.3 Description : L'enseignante intervient auprès d'un groupe ayant un ziglotron et un bon de commande déjà complété auparavant Trois groupements ont été faits sur le ziglotron. Le message correspondant est le suivant (en gras ce qu'a écrit l'élève): Il faut 42 gommettes. Ma commande Je voudrais **42** paquets de dix gommettes ... gommettes seules. Contenu L'élève qui a fait le bon de commande n'a pas fait de relation entre les groupements qu'elle a tracés sur la fiche Ziglotron et le bon de commande. Cette erreur est constatée par l'enseignante ce qui créé un **incident**. L'enseignante change alors d'intervenant	37'02 B : (*B va voir un autre groupe d'élèves et regarde le bon de commande*) Léa: J'avais vu que quarante-deux paquets de dix ça ne fait pas quarante-deux. B : Et comment tu as vu que quarante-deux paquets de dix ça ne fait pas quarante-deux gommettes ? Léa: Parce que si on fait plusieurs fois dix que ça dépasse quarante, j'ai remarqué que ça fait..., que après ça faisait plus le bon ...nombre. B : Et tu peux expliquer à Céline comment faire pour trouver le bon nombre de paquets de dix gommettes et de gommettes toutes seules? Léa : Oui. B : Céline est-ce que tu as compris ce qu'elle t'a expliqué ? Céline : Oui. B : Qu'est-ce qu'il faudrait comme commande alors ? Il en faudrait combien de paquets de dix, tu le sais ? Explique-lui Léa, essaye de lui réexpliquer ce qu'il faut commander, à Céline. Léa : Céline si tu mets quarante-deux paquets de dix et que tu mets..., après ça va pas faire le bon nombre parce que ça va dépasser. B : Explique-lui ce qu'il faut mettre sur le bon de commande, ne continue

	et demande à la deuxième élève, qui a vu que le bon de commande était faux, d'expliquer à la première.	pas à lui dire que ce qu'elle a fait ça ne va pas. Il faut trouver combien de… le nombre de paquets *(Inaudible, brouhaha)* Chut !
	1.4 Description : L'enseignante intervient auprès d'un groupe ayant un ziglotron et un bon de commande déjà complété auparavant Deux groupements ont été faits sur le ziglotron. Le message correspondant est le suivant (en gras ce qu'a écrit l'élève): Il faut 42 gommettes. Ma commande Je voudrais **35** paquets de dix gommettes … gommettes seules. Contenu L'erreur du bon de commande constatée par l'enseignante crée un **incident**. Or, une des deux élèves, celle qui n'a pas produit le message, semble avoir compris que le « 35 » était incorrect car elle indique qu' « *il en faut quatre (paquets) pour faire quarante-deux* ». Elle a aussi remarqué que le « 35 » ne correspondait pas à la quantité totale, se référant à l'écriture chiffrée « 42 ». L'enseignante gère alors l'incident initial en encourageant cette dernière élève à expliquer à l'autre (changement d'intervenant). Elle guide l'explication en s'assurant qu'une remarque à propos de la correspondance entre les deux groupes de dix entourés sur le ziglotron et la désignation « vingt » est comprise : la réponse de l'élève est évaluée	49'25 B : *(B va voir un autre groupe d'élèves)* Chut ! Les enfants là, ceux qui ont terminé vous croisez les bras et vous posez la tête sur les bras. Voilà merci il n'y en a plus pour longtemps. (*B regarde le bon de commade*) Tanina : (*Montrant le « 35 » de la ligne « 35 paquets de dix gommettes »*) Il en faut pas trente-cinq. Il en faut trois, euh il en faut quatre pour faire quarante-deux. B : Alors explique-lui. Tu lui as expliqué à Najma pourquoi tu dis qu'il en faut quatre paquets de dix gommettes ? Qu'est-ce que tu lui as dit ? Tanina : Je lui ai dit que ça, ça fait vingt (*montrant les deux groupes de dix entourés sur le ziglotron)*, et (*montrant l'ensemble du Ziglotron*) ça fait pas trente-cinq, ça fait quarante-deux *(Inaudible)* B : Qu'est-ce que tu en penses Najma ? *(Brouhaha)* Je vous ai demandé quelque chose, chut ! Donc tu lui demandes combien de paquets de dix gommettes ? Et qu'est-ce qu'elle a dit Tanina ? Najma : *(Inaudible)* Tanina : Non ! Ça, ça fait vingt *(Inaudible)* B : Najma tu sais pourquoi Tanina elle dit que ça fait vingt (*montrant les deux groupes de dix entourés sur le ziglotron)* ? Pourquoi ? Najma : Deux paquets de dix. B : Deux paquets de dix. Et pour savoir s'il y a d'autres paquets de dix, il faudrait peut-être les entourer non ? Najma : Oui. B : Pour savoir s'il y en a d'autres encore des paquets de dix à prendre. Moi c'est ce que je ferais. Tanina tu aurais peut-être pu lui dire à Najma qu'elle pouvait continuer à faire des paquets de dix. Là il y en a plus, il y en a d'autres. Essayez, d'accord ? *(B va voir un autre groupe d'élèves)* Vous vouliez changer votre bon de commande ? ?: Non. B : Ça va ? Vous vous êtes mis d'accord facilement ?

	positivement par l'enseignante. Elle enrichit ensuite son propos en signalant la non maximalité des groupements, fournissant ainsi une aide dans la situation de communication entre les élèves. Elle indique ainsi que la première partie de la tâche n'a pas été accomplie complètement (l'élève ne l'a donc pas reliée à la deuxième partie, le message à l'adresse du marchand), et elle engage à le faire, permettant ainsi à la situation de communication d'aboutir. La suite des échanges entre élèves va être relatée par ceux-ci dans la phase de synthèse qui suit.	?: Oui *(B va voir d'autres élèves et distribue des bons de commande à certains pour d'autres essais puis retourne au tableau).* 43'15

Mise en commun 43’15 - 51’13	
Unique épisode : validation du message correct et tentative pour relier les chiffres de l’écriture chiffrée à ceux du message	
Description : L’enseignante va faire la synthèse à partir du bon de commande suivant : Il faut 42 gommettes. Ma commande Je voudrais **4** paquets de dix gommettes **2** gommettes seules. Et de l’écriture 10+10+10+10=40 indiquée oralement par un élève. Contenu : L’enseignante a regardé tous les bons de commandes et conclut qu’ils sont tous identiques : grâce à son dispositif, l’enseignante a obtenu que tous les groupes d’élèves réussissent. Comme tous les élèves ont produit la même chose, la validation d’une unique production (correcte) va permettre de valider tous les messages. Pour cette validation, l’enseignante demande d’expliquer pourquoi « *il faut quatre paquets de dix gommettes et deux gommettes toutes seules* », engageant cette fois-ci les élèves à indiquer leur stratégie, alors que précédemment le message était validé en vérifiant que la quantité demandée correspondait au nombre de boutons manquants indiqué par sa désignation parlée en France (stratégie OG vers OF via GraC). L’enseignante va s’appuyer sur un des élèves ayant produit le message initial en général erroné : elle les cite « *Camélia, Céline, Mylène, Najma, Lucas* ». Elle s’assure ainsi que ceux-ci ont « réellement » compris, la reformulation du message ayant pu se faire sans qu’ils y soient associés (elle n’a pu s’informer de tous les échanges entre élèves). En demandant à l’un d’entre eux d’intervenir, l’enseignante ne peut savoir ce qu’il va dire : plusieurs refusent, un demande la parole et c’est lui qui va indiquer des éléments de sa stratégie. Celui-ci commence son	43’15 B : Bon vous vous tournez, Ilanane ! Chut, asseyez-vous. Alors je vais vous demander vos bons de commande, on va regarder ce que vous avez noté, ce que vous avez écrit. Chut ! *(B ramasse les bons de commande)* Tournez-vous là s’il vous plaît. Rose ! Jonathan ! Donc j’ai regardé tous les bons de commande, les bons de commande de la fin. Je ne vous parle que de ceux que vous avez eus, il y en a qui ont demandé à changer de bon de commande. J’ai regardé les derniers bons de commande de tous les groupes. Voilà ce qu’il y a sur les bons de commande *(écrivant au tableau* « je voudrais 4 paquets de dix gommettes et 2 gommettes toutes seules *en mettant qu’elle lit),* « je voudrais quatre paquets de dix gommettes et deux gommettes toutes seules ». *(B encadre ce qu’elle vient d’écrire)*. Souleymane tu te redresses ! Camélia, Nisrine ! Donc à la fin, tout le monde est d’accord, Camélia ! Tout le monde est d’accord pour commander quatre paquets de dix gommettes et deux gommettes toutes seules. *(Elle encadre le « 4 » et le « 2 »)*. Il faut quarante-deux gommettes (*elle écrit en même temps « Il faut 42 gommettes » et encadre le « 42 »*). (*pause de 8 secondes*) Ilalane ! Je voudrais que..., levez le doigt les enfants les enfants qui ont changé de commande. Dans ces groupes-là, je voudrais ou que Camélia, ou que Céline, ou que Mylène, ou que Najma, ou que Lucas, un de vous cinq, puisse venir expliquer, enfin essaye d’expliquer, on va vous aider, pourquoi il faut quatre paquets de dix gommettes et deux gommettes toutes seules. Si vous avez changé c’est que votre voisin a dû vous expliquer. Est-ce qu’il y en a un de vous cinq qui veut expliquer ? Qui veut essayer d’expliquer pourquoi c’est comme ça ? Lucas tu veux essayer ou pas ? Lucas : Euh… B : Je te vois hésitant, non, Najma ? Tu veux ou pas ?

	intervention par « *dix plus dix plus dix plus dix égal quarante* », mettant en jeu *a priori* une interprétation arithmétique additive de la numération parlée en France. L'enseignante écrit alors « 10+10+10+10=40 ». Elle interrompt l'explication de l'élève pour valider ce qu'il a dit par « *Dix plus dix ça fait vingt, plus dix ça fait trente, plus dix ça fait quarante* », se servant de l'égalité du tableau pour énumérer les « 10 » et utilisant aussi une interprétation additive de la numération parlée en France[i]. Un **incident** se produit quand l'élève ne donne pas la réponse attendue à la question « *Pourquoi tu lui as dit ça ?* », puisque l'élève répond « *Parce que c'était vrai* » ne fournissant pas d'explication sur sa stratégie. L'enseignante va alors guider les élèves (il n'est donc pas possible de savoir ce qu'a été la stratégie du groupe d'élèves interrogé). Pour ce faire, elle va alors utiliser l'écriture 10+10+10+10=40 produite auparavant pour amener les élèves à faire la correspondance entre le nombre de « 10 » comptés un à un (quatre) et le nombre de paquets demandés. Ainsi quarante est mis en relation avec quatre « dix » (écrits « 10 »), ce qui justifie le « 4 » du message. Le « 2 » des « gommettes seules » du message est alors justifié par le fait que pour aller de quarante à quarante-deux il faut encore deux[ii]. L'enseignante essaye ainsi d'interpréter la numération parlée en France de manière arithmétique multiplicative à partir d'une écriture additive mettant en relief l'appui quarante. Ici encore la stratégie pour obtenir le message n'est pas explicitée. En effet l'enseignante valide « *Dix plus dix ça fait vingt, plus dix ça fait trente, plus dix ça fait quarante* », en énumérant les dix matérialisés par « 10 », ce qui n'indique pas comment cette décomposition a été obtenue. De plus cette décomposition n'est pas la seule stratégie possible, la plus efficace étant de compter le nombre de groupements de dix effectués sur la fiche « Ziglotron », ce qu'une partie des élèves a fait. Ainsi, en partant des explications des élèves, l'enseignante n'a pas été	Non ? Camélia, tu veux essayer d'expliquer ? Camélia : Oui. B : Oui. Camélia : Quentin il m'a dit… B : Chut ! Alors ce que je vais faire c'est que je vais écrire ce que tu vas nous dire, d'accord ? Tu peux redire fort ? Quentin il t'a dit quoi ? Camélia : Dix plus dix plus dix plus dix égale quarante B : *(Ecrivant 10+10+10+10=40)* Egale quarante. Et alors ? C'est vrai : dix plus dix plus dix plus dix ça fait quarante. Dix plus dix ça fait vingt, plus dix ça fait trente, plus dix ça fait quarante. Pourquoi tu lui as dit ça Quentin ? C'était une bonne idée de lui ça ? Pourquoi tu lui as dit ça ? Quentin : Parce que c'était vrai. B : Oui. Qu'est-ce qu'on voit là ? *(Montrant au tableau)* ?: Des paquets. B : Des paquets de combien ? ?: Trois. ?: De dix. B : De dix. Là on voit qu'il y a des paquets de dix. Léa ! Et on en voit combien des paquets de dix ? Des élèves : Quatre. B : *(Entourant chaque « 10 »)* Si je les compte ça fait un, deux, trois, quatre paquets de dix. Quatre paquets de dix gommettes. Mais Camélia vous n'avez pas seulement demandé quatre paquets de dix gommettes ? Vous avez aussi demandé deux gommettes toutes seules (*montrant le «2 » de « 2 gommettes seules » du message*), pourquoi ? Camélia : *(Inaudible)* B : Chut ! *(A ?)* Je t'ai demandé d'enlever ta capuche. Quentin il a dit ? Camélia : Il a dit que…

	amenée à traiter cette dernière stratégie. Par ailleurs, en même temps que l'argumentation précédente, l'enseignante tente de relier l'écriture chiffrée « 42 » et les deux nombres « 4 » et « 2 », en montrant ostensiblement les écritures chiffrées. Les élèves restent silencieux quand elle leur demande « *Est-ce que vous remarquez quelque chose entre le nombre de paquets de gommettes et le nombre de gommettes et le nombre de gommettes toutes seules qu'on demande et le nombre total de gommettes qu'on demande* ». Ce qui crée un **incident**, qu'elle va ignorer ici : ce dernier point a été repris en début de séance suivante. L'enseignante indique dans un entretien post-séance qu'elle a estimé inutile d'aller plus en avant, les élèves n'étant plus assez attentifs.	B : Quentin qu'est-ce que tu lui as dit après ? Quentin : Là il y en a quarante. B : *(Montrant)* Là il y en a quarante oui. Quentin : Il manque deux gommettes. B : Pour avoir quarante-deux gommettes quand on a quarante il en manque juste deux (*montrant le « 2 » de « 42 »).* C'est ce qu'il vient de dire, je répète. D'où les deux gommettes qu'on demande toutes seules (*montrant le «2 » de « 2 gommettes seules » du message*). Est-ce que vous remarquez quelque chose entre le nombre de paquets de gommettes et le nombre de gommettes et le nombre de gommettes toutes seules qu'on demande (*montrant le «2 » de « 2 gommettes seules » et le « 4 » de « 4 paquets de gommettes du message)* et le nombre total de gommettes qu'on demande *(montant « 42 »)* ? (*silence de la classe*) Non ? Bon, c'est peut-être plus l'heure, on va s'arrêter là. On s'arrête là, c'est l'heure d'aller manger on est en retard pour la cantine. 51'13

<table>
<tr><th colspan="2">Remarques sur des bons de commande (1ère tâche de la séance) 0'- 19'40
La dernière séance s'est achevée sans formalisation du savoir visé. Celle-ci commence par un rappel qui va permettre de mettre en évidence le savoir que l'enseignante veut faire apparaître. Il s'agit pour les élèves de faire des remarques sur les bons de commande.</th></tr>
<tr><th colspan="2">1er épisode : rappel des bons de commande obtenus antérieurement 0' – 5'42</th></tr>
<tr><td>Description :
Rappel des bons de commande obtenus antérieurement
Contenu :
L'enseignante demande aux élèves de rappeler la teneur des bons de commandes complétés dans les séances précédentes. Elle extrait ainsi les données qui vont lui permettre de mettre en évidence le savoir à retenir. Les échanges sont toujours oraux, l'enseignante traduisant les nombres que disent les élèves à l'aide des écritures chiffrées. Deux exemples sont donnés par les élèves en entier : « quarante-deux boutons »(42)/« quatre paquets de dix et deux boutons tout seuls » (« 4 paquets de 10 boutons et 2 boutons») ainsi que « trente-deux boutons »(32)/« trois paquets</td>
<td>00'
B : Alors est-ce que tout le monde est prêt ?
Les élèves : Oui.
B : Jonathan tu es prêt ? Oui ? Sofiane tourne-toi un petit peu. Lucas tu es prêt ? Oui ? Et toi Simon ? Oui ? Bon ! Moi aussi je suis prête. On peut y aller. Tanina, je croyais que tout le monde était prêt, ça y est ? Alors, en fait on va retravailler sur les bons de commande pour réparer les ziglotrons de ce matin, et j'ai regardé les différentes qu'on a faites ensemble depuis la semaine dernière, j'ai regardé les ziglotrons qui étaient à réparer, et les bons de commande qui permettaient de réparer les ziglotrons. Au tableau je vais réécrire quelques bons de commande que vous aviez écrits. (Bruit extérieur) Alors on va essayer d'oublier le bruit, ça va être très, très difficile mais on va quand même essayer. Maintenant on ne va plus en parler, on en a parlé, il y a sûrement des travaux donc il y a des bruits de perceuse, c'est comme ça. Ce serait mieux s'il n'y en avait pas mais il y en a une. On ne va plus en parler même si on entend. Allez regarder le bon de commande. Donc une fois il y a eu un ziglotron, j'ai dit on en parle plus des travaux, je sais que c'est pénible mais c'est comme ça, on ne peut pas faire autrement, donc tout le monde essaye de ne plus y penser. On va penser nous aux travaux qu'on a à faire sur les ziglotrons pour les réparer, nous aussi on a des travaux à faire drôlement importants.
?: Mais ça fait pas de bruit.
B : Voilà, c'est parfait. Est-ce que quelqu'un se souvient de combien de boutons il fallait pour un des ziglotrons que vous aviez à réparer?
?: Quarante-deux.
B : Quarante-deux boutons. (B écrit au tableau « 42 boutons ») Alors pour des ziglotrons il fallait quarante-deux boutons, d'accord ? Et il y a eu les bons de commande qui permettaient de réparer ce ziglotron. Est-ce qu'il y en a qui se souviennent ?
?: Quatre paquets de dix et deux boutons tout seuls.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>de dix et deux boutons tout seuls » (« 3 paquets de 10 boutons et 2 boutons»). Un dernier est donné par l'enseignante : il concerne vingt-huit (28). Dans l'entretien post-séance, l'enseignante indique avoir sciemment écrit dix « 10 » à la place de « dix » dans les phrases à compléter, ce qui n'était pas la proposition du manuel. Elle veut ainsi que les élèves identifient immédiatement qu'il y a dix boutons par paquets : elle considère que l'écriture chiffrée « 10 » est une connaissance ancienne qui permet d'être lue « dix » plus facilement que le mot « dix ». L'écriture chiffrée peut mettre ainsi en relief le cardinal des paquets (dix), mais les différentes situations proposées aux élèves n'ont pas permis de questionner le choix de dix.</td><td>B : Voilà. Quatre paquets de dix boutons et deux boutons (B écrit au tableau en dessous de « 42 boutons », « 4 paquets de 10 boutons et 2 boutons » sur une même ligne). Je ne vais pas écrire tout seuls d'accord ? Parce boutons tout seuls c'est pas des paquets. Et ça c'était un ziglotron qu'on a réussi à réparer comme ça (B encadre tout ce qui est écrit au tableau). Il y avait d'autres ziglotrons qui n'avaient pas ce nombre de boutons, est-ce que vous vous souvenez d'autres nombres ? Ilalane ?
Ilalane : Trente-trois.
B : Trente-trois. Ce n'était pas trente-trois exactement, c'était trente-deux. Il n'y avait pas de ziglotron avec trente-trois boutons, c'est que vous avez mal compté. (Ecrivant) Trente-deux boutons. Donc là il y avait un autre ziglotron, il lui fallait trente-deux boutons (elle écrit en dessous de l'encadré précédent « 32 boutons »). Et quel était le bon de commande qui permettait de réparer ce ziglotron ?
?: Trois paquets de dix, et deux boutons tout seuls.
B : (B écrit en dessous de « 32 boutons », « 3 paquets de 10 et 2 boutons » sur une même ligne puis encadre l'ensemble)
?: Il y a toujours des deux.
B : Ah, il y a toujours des deux, bonne remarque ! On va voir un troisième bon de commande et après on parlera de ça. Vous allez me dire si je me trompe ou pas : il me semblait qu'il y avait un des ziglotrons à qui il manquait vingt-huit boutons. Il y en a qui avaient eu ça ? Non ? Personne n'a eu vingt-huit boutons ? Thomas ? Tu te souviens c'était il y a longtemps ? Celui-là je vais le mettre parce que celui-là vous n'avez pas l'air de vous en souvenir, ça va vous rappeler peut-être quelque chose (B écrit en dessous des deux messages encadrés, « 28 boutons »). Vingt-huit boutons. Vous étiez plusieurs mais c'était je crois la première séance. Qui est-ce qui veut dire quel bon de commande fonctionnait pour réparer ce ziglotron ?
?: Deux paquets de dix et huit boutons tout seuls. (B écrit en dessous de « 28 boutons », «2 paquets de 10 boutons et 8 boutons » sur une même ligne puis encadre l'ensemble)</td></tr>
<tr><td colspan="3">2ème épisode : mise en évidence du savoir à retenir 5'42 – 13'08</td></tr>
<tr><td></td><td><u>2.1</u>
<u>Description</u> :
L'enseignante va orienter la discussion sur l'analogie entre les écritures chiffrées des nombres de boutons manquants et les chiffres dans le message destiné au marchand.</td><td>5'42
?: Il y a quelque chose que j'ai remarqué très intéressant.
B : Et bien on va voir ça. Bon on va regarder ces trois bons de commande, d'accord ? Il y a quelqu'un qui a dit tout à l'heure « il y a des deux à chaque fois ». C'est Tanina qui a dit ça ? Pour quarante-deux boutons,</td></tr>
</table>

	Contenu : Malgré l'insistance de l'enseignante qui montre les chiffres visibles dans un bon de commande, les élèves ne remarquent pas facilement l'analogie, ce qui créé un **premier incident**. Ils citent principalement des connaissances anciennes ou liées au contexte ou encore qui n'ont pas de portée mathématique. Les élèves considèrent en effet les trois bons de commandes simultanément et y relèvent des similitudes ou régularités sur les nombres de boutons manquants (le « deux » de quarante-deux et trente-deux), les mots (« de ») et le nombre de paquets en jeu (quatre, trois, deux) Cette dernière remarque, reprise et enrichie par l'enseignante, peut être considérée comme un élément du passage d'une interprétation arithmétique additive de la numération parlée en France à une interprétation multiplicative, dans un contexte de problème arithmétique (désignation du cardinal d'une collection après un retrait de dix/un paquet de dix). Cette indication est un des éléments à retenir dans la séquence, mais l'enseignante ne va pas en faire un enjeu d'institutionnalisation. Les autres interventions des élèves ne sont pas exploitées : l'enseignante récupère et enrichit ou répond à la place de l'élève, clôturant ainsi l'incident et sollicitant d'autres réponses des élèves. Une nouvelle remarque d'un élève concerne le lien entre l'écriture chiffrée et la désignation parlée en France, et non le lien entre l'écriture chiffrée et les chiffres du bon de commande, ce qui créé un **deuxième incident** (Léa). L'enseignante récupère et enrichit. Elle indique tout d'abord que c'est le début des chiffres qui permet de savoir « *dans quelle famille on est* », connaissance ancienne liée à la lecture de l'écriture chiffrée (stratégie EC vers OF). La	il faut quatre paquets de dix boutons et deux boutons, où est-ce qu'il y a des deux dans ce bon de commande ? Des élèves : Dans quarante-deux. H : Dans quarante-deux. Des élèves : Dans trente-deux boutons H : Trente-deux boutons B : Et c'est tout ? (*Montrant au tableau les « 2 » de « 2 boutons »*) Deux boutons, deux boutons, et puis ? Deux paquets de dix boutons (*Montrant au tableau le « 2 » de « 2 paquets de 10 boutons »*). ?: Il y a quelque chose que j'ai remarqué. B : Lucas ! Tu n'écoutes pas, je crois qu'il va falloir que tu viennes t'asseoir sur le banc. *(B récupère un cahier)* Ilalane ? Ilalane : Il y a des « de ». B : Ah oui, il y a les petits mots « de » *(Montrant les « de »)*. Mais ce n'est la même chose, ça ce sont des petits mots, c'est pour expliquer que ce sont des paquets dans lesquels il y a dix boutons. Le nombre deux s'écrit comme ça *(montrant « deux » affiché au-dessus du tableau en dessous d'un « 2 »)*. Quentin qu'est-ce que tu as à dire ? On écoute Quentin. Quentin : J'ai remarqué que au début on avait quatre paquets de dix boutons et après on en enlève un paquet, on a trois, et après on en enlève un et on en a deux pour faire vingt. B : *(Montrant)* Alors ce que dit Quentin il dit « ah ben voilà, dans quarante-deux il fallait quatre paquets de dix boutons, dans trente-deux ce n'est plus quarante-deux c'est trente-deux et il ne faut plus quatre paquets mais trois paquets ». Il y a un paquet de dix de moins par rapport à quarante-deux, et dans vingt-huit boutons il faut deux paquets. Là il fallait trois paquets pour trente-deux, et là quatre paquets pour quarante-deux. ?: Quatre, trois, deux. B : Oui, mais ça c'est un hasard. Léa ? 8'30 Léa : J'ai remarqué que… B : Chania et Lucas : alors Lucas tu vas venir t'asseoir sur le banc,

	stratégie indiquée montre que cette écriture chiffrée est reliée à une interprétation ordinale avec repérant des nombres, ce qui va se confirmer dans la suite des propos de l'enseignante. En effet, cette dernière insiste sur les repérants quarante, trente et vingt qui sont mis en exergue, sans ici que le passage de l'un à l'autre ne soit évoqué. Une stratégie de passage OF vers EC est rappelé simultanément : « *Des vingt voilà, ça s'écrit avec le chiffre deux* ». Finalement l'enseignante va guider les élèves vers les remarques qu'elle attend en demandant aux élèves de ne considérer qu'un seul bon de commande.	je t'ai déjà prévenu, et Chania ça va être la même chose si tu continues. Oui Léa ? Léa : *(Inaudible)* B : Donc c'est les chiffres qui… ?: Les débuts des chiffres. B : Voilà, les débuts des chiffres qui nous disent dans quelle famille on est, ça on l'a déjà vu. Oui c'est dans l'ordre c'est vrai. Les familles elles sont dans le même ordre que les nombres du début de la file numérique. Donc c'est le début du nom qui nous dit dans quelle famille on est. Quand on a quarante-deux (*B montre « 42 »*), c'est la famille des ? Des élèves : Quarante. B : Quarante. Quand c'est trente-deux (*B montre « 32 »*) c'est la famille des ? Des élèves : Trente. B : Quand c'est vingt-huit (*B montre « 28 »*), c'est la famille des ? Des élèves : Vingt. B : Des vingt voilà, ça s'écrit avec le chiffre deux.
	<u>2.2</u> <u>Description</u> : L'enseignante attire l'attention sur les chiffres en jeu dans un même bon de commande, le premier. <u>Contenu</u> : En réaction aux incidents précédents, l'enseignante tente d'orienter la séance sur le savoir qu'elle veut faire apparaître en demandant aux élèves de ne considérer qu'un seul bon de commande. Le rôle joué par l'écriture chiffrée est présenté tout d'abord par l'enseignante comme permettant de s'assurer de la bonne réponse et non ici comme une stratégie pour résoudre la tâche. En d'autres termes, pour résoudre la tâche, les élèves ont utilisé une stratégie OF vers OG pour obtenir les messages (voir séance précédente) et l'écriture chiffrée est présentée	9'37 B : On va regarder juste le premier bon de commande maintenant, d'accord ? Que celui-là, on ne s'occupe plus des autres. Lucas ! Est-ce que vous avez quelque chose à dire juste sur le bon de commande, comment…On a dit que pour quarante-deux boutons il fallait quatre paquets de dix boutons et deux boutons, d'accord ? Est-ce que quelqu'un peut expliquer pourquoi il est sûr que c'est ça sans dessiner tous les boutons, sans aller chercher les gommettes et les coller. Thomas ? Thomas : Parce qu'on voit en premier que il y a le quatre, après le deux. Donc en tout nous on a quatre paquets de dix boutons et deux boutons (*Pendant que Thomas parle, B a montré successivement le « 4 » et le « 2 » de « 42 » puis le « 4 » de « 4 paquets de 10 boutons » et le « 2 » de « 2 boutons »*). B : Donc ce sont les mêmes ? ?: Chiffres.

	comme permettant de vérifier leur réponse. A la fin de l'épisode, l'enseignante indique que l'écriture chiffrée peut être (aussi) un moyen de résoudre la tâche, indiquant une stratégie EC vers OG. Dans cette dernière stratégie, l'écriture chiffrée (montrée avec la main par l'enseignante) est toujours signifiée par sa désignation parlée en France, ce qui peut ainsi convoquer simultanément une interprétation (ancienne) ordinale de celle-ci, allant à l'encontre du savoir en jeu : les élèves peuvent percevoir « 42 » comme quarante/deux, alors qu'il est question d'y voir « 4 » et « 2 ». Autrement-dit, « quarante-deux » est pour l'enseignante le moyen de parler de l'écriture chiffrée « 42 » (le but étant désigner l'écriture chiffrée, un « 4 » suivit d'un «2 »), alors que dans toutes les séances précédentes « 42 » était la forme écrite de la désignation parlée en France « quarante-deux ». L'enseignante va tenter de légitimer ces deux possibilités (vérifier sa réponse grâce à l'écriture chiffrée ou donner une réponse grâce à l'écriture chiffrée) de différentes façons. Un premier élément est fourni dans cet épisode de manière implicite. Il s'agit d'un raisonnement par induction, puisque la correspondance entre les chiffres de l'écriture chiffrée et ceux du message est constatée dans les trois messages. Un autre élément d'explication du lien est donné aussi de manière implicite sur un exemple : on retrouve le « 2 » de vingt-huit (identifié à l'écriture chiffrée « 28 ») car la « *famille* » des vingt s'écrit avec le chiffre « 2 »). Cependant l'enseignante ne va pas s'en contenter pour établir une règle de type : « dans une écriture chiffrée qui désigne un nombre d'objets, le premier chiffre indique un nombre de paquets de dix et le deuxième un nombre	?: Mais ils sont séparés. B : Chiffres. (*Montrant puis entourant le « 42 » de « 42 boutons» puis le « 4 » de « 4 paquets de 10 boutons » et le « 2 » de « 2 » boutons »*) Là, on retrouve le quatre, et le deux de quarante-deux il est dans les deux boutons. B : Est-ce que c'est la même chose pour les autres bons de commande ? Est-ce que c'est tout le temps vrai qu'on retrouve le même chiffre dans le nombre de paquets de boutons ? Des élèves : Oui. B : Et de boutons tout seuls ? Des élèves : Oui. B : Alors on va regarder : (*montrant puis entourant le « 32 » de « 32 boutons» puis le « 3 » de « 3 paquets de 10 boutons » et le « 2 » de « 2 » boutons »*) dans trente-deux boutons, trente-deux ça commence par trois et là on voit trois paquets de dix boutons, et trente-deux ça finit par deux, et ici il y a deux boutons tout seuls. En bas, (*montrant puis entourant le « 28 » de « 28 boutons» puis le « 2 » de « 2 paquets de 10 boutons » et le « 8 » de « 8 » boutons »*) pour vingt-huit boutons ça commence par deux et on a deux paquets de dix boutons, et puis huit, vingt-huit, on a huit boutons ici. Est-ce que vous aviez remarqué ça tout le monde ? Ou est-ce qu'il y en a qui viennent juste de le voir maintenant ? Levez le doigt ceux qui viennent de s'en rendre compte maintenant, qui ne s'étaient pas rendu compte de ça. ?: Ça fait que Thomas. B : Non, il y a Ilalane, il y en a peut-être d'autres. Est-ce qu'il y en a qui le savaient depuis longtemps, qui l'avaient vu depuis longtemps ? *(Plusieurs élèves lèvent le doigt)* Et est-ce qu'il y en a qui ne savent pas ? Il y en a qui n'ont pas levé le doigt j'ai l'impression. Lucas tu n'as pas levé le doigt, Najma non plus, qui est-ce qui n'a pas levé le doigt ? Najma tu vois là qu'on a les mêmes chiffres, que quarante-deux c'est quatre paquets de dix boutons et deux boutons tout seuls ? Tu ne l'avais pas vu ça ? Et est-ce que maintenant tu t'en rends compte ? Oui ? Que c'est toujours comme ça ? Que ces bons de commande permettent de réparer les ziglotrons parce qu'ils

	d'objets non groupés ». Elle ne va pas non plus l'utiliser comme la trace de la règle qui a prévalue à l'instauration de l'écriture chiffrée : « par convention une désignation de type « x paquets de dix et y » se note xy, c'est ainsi que sont définies les écritures chiffrées ». L'enseignante va proposer aux élèves une autre justification : une partie des élèves de la classe étant visiblement perplexe. Ceci n'est pas un incident car l'enseignante indique dans un entretien post-séance avoir prévu cette justification.	demandent le bon nombre de paquets de dix boutons et le bon nombre de boutons tout seuls, en regardant le nombre qu'il fallait au départ (*silence de la classe*).
	3ème épisode : éléments de justification 13'08 – 19'40	
	<u>Description</u> : L'enseignante propose une preuve de la remarque faite précédemment en utilisant la file numérique des écritures chiffrées. <u>Contenu</u> : L'enseignante propose de vérifier que « *quarante-deux ça fait quatre paquets de dix boutons et deux boutons en plus* » à l'aide de la file numérique. Ici, « quarante-deux » indique l'écriture chiffrée « 42 » (qu'elle montre de la main) et non la désignation parlée en France, ce qui peut porter à confusion. D'ailleurs un élève indique « vingt, trente, quarante », ce qui peut faire écho à une stratégie employée pour un passage OF vers OG dans la tâche « Ziglotron », mettant en jeu une interprétation ordinale avec repérant (ou arithmétique additive). Cette stratégie n'a cependant pas fait l'objet d'institutionnalisation, les synthèses précédentes portant principalement sur une	13'08 B : (*silence de la classe*) Moi je vais vous proposer de vérifier ça avec la file numérique, ce qu'on vient de voir, pour qu'on soit bien sûrs de ça. Hein Lucas, d'accord ? Que c'est vrai, parce que là on dit voilà, quarante-deux ça fait quatre paquets de dix boutons et deux boutons en plus. Oui j'entends Tanina qui dit vingt, trente, quarante. On va voir pour faire quarante-deux boutons, pour arriver jusqu'à quarante-deux (*montrant « 42 » sur la file numérique des écritures chiffrées situées en haut du tableau*) on prend bien quatre paquets de dix boutons et deux boutons, d'accord ? Donc moi ce que j'ai fait, j'ai préparé des bandes (*montrant*) pour cacher des paquets de dix, d'accord ? Vous en avez de différentes couleurs, pour qu'on puisse bien voir. Si je fais tout en rouge on ne va peut-être pas voir combien il y a de paquets de dix, d'accord ? Donc là on a dit que pour quarante-deux boutons il fallait quatre paquets de dix boutons et deux boutons. Donc si je cache un paquet de dix, je vais aller jusqu'à ? Des élèves : Dix. B : D'accord, donc je le cache *(fixant une bande rouge sur le début de la file numérique, cachant ainsi les écritures chiffrée de 1 à 10)*. Donc là on voit ça fait bien un paquet de dix boutons ou un paquet de dix gommettes. Si on compte derrière ça fait un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, dix. Donc on a dit qu'il fallait quatre paquets, d'accord ? Donc là on en a fait un, ensuite le deuxième paquet il va jusqu'à ? *(fixant une bande verte à la suite de la bande rouge sur la file numérique)* Des élèves : Vingt.

	vérification des réponses, stratégie OG vers OF. Dans la suite de sa légitimation, l'enseignante va utiliser des paquets de dix matérialisés par des bandes qui recouvrent dix écritures chiffrées. Cette légitimation repose moins sur un aspect cardinal (le fait que sur la file numérique l'écriture chiffrée est une désignation du cardinal du nombre de cases depuis la première jusqu'à celle en jeu) que sur le fait qu'en avançant de dix en dix, on lise les repérants successifs « 10 », « 20 », « 30 », « 40 » qui sont la forme écrite des repérants de la numération parlée en France « dix, « vingt », « trente », « quarante ». Les gestes de l'enseignante sont d'ailleurs ponctués par les élèves de l'énonciation de la comptine des dizaines : dix, vingt, trente, quarante. Ainsi ceci revient à utiliser une stratégie OG vers EC via OF. En effet, c'est l'interprétation ordinale avec repérant de la numération parlée en France qui est utilisée dans le passage OG vers EC. Le fait que « 42 » soit désigné par « quarante-deux » (ce qui est de toute façon déjà su de certains élèves) et le fait d'utiliser une interprétation ordinale avec repérant de la numération parlée en France dans la démonstration proposée par l'enseignante, peut inciter les élèves à voir à nouveau dans ce qui vient d'être présenté comme une stratégie OG vers OF qui « prouve » que « 4 paquets de dix boutons et 2 boutons » correspondent à « quarante-deux ».	B : Vingt. J'ai fait les bandes de la bonne longueur, à chaque fois ça fait dix, j'ai fait attention à faire exactement la bonne longueur pour faire dix. Un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, dix. Ensuite *(fixant une bande rouge à la suite de la bande verte sur la file numérique)*. Ah oui je vous ai dit la couleur c'est pour voir bien les différents paquets de dix. Le troisième paquet de dix il va aller jusqu'à ? Des élèves : Trente. B : Trente. ?: Après c'est quarante *(fixant une bande verte à la suite de la dernière bande rouge sur la file numérique)* . B : Le troisième paquet de dix il va… Des élèves : Quarante. B : Le quatrième pardon, il va jusqu'à ? Des élèves : Quarante. B : Quarante. Donc là on a mis quatre paquets de dix, d'accord ? Et puis on dit qu'il faut deux ? ?: Boutons. B : Boutons. Deux. Donc j'ai pris deux *(montrant un carré rouge)*. Alors les couleurs c'est pareil c'est pour qu'on voie bien la différence. Des élèves : Quarante-deux. B : *(Fixant un carré rouge et un carré jaune)* Un, et deux. Alors comme dit Sofiane sinon on peut compter par dix. Est-ce que là vous voyez que si on prend quatre paquets de dix et deux boutons on arrive jusqu'à quarante-deux ? Est-ce que tout le monde voit bien ça ? Najma ? Des élèves : Oui 16'30 B : Pour trente-deux on a dit qu'il fallait trois paquets de dix. *(Comptant les bandes fixées)* Un, deux, trois paquets de dix. Celui-là je l'enlève (*enlevant la dernière bande fixée*). Et puis deux boutons. *(Déplaçant les carrés et les fixant)* ?: On va les mettre juste à côté. B : Est-ce qu'on a le bon nombre s'il vous plaît ? Des élèves : Oui. D'autres : Non.

	Par ailleurs, la démarche de l'enseignante consiste à « démontrer » que la quantité de boutons désignée par « 4 paquets de dix boutons et 2 boutons » est la même que la quantité de boutons désignée par l'écriture chiffrée « 42 ». Or il a été admis que la quantité de boutons désignée par « 4 paquets de dix boutons et 2 boutons » est la même que la quantité de boutons désignée par quarante-deux. Ainsi comme les élèves savent que « quarante-deux » s'écrit « 42 » (c'est écrit en haut du bon de commande) il n'y a pas besoin de la démonstration de l'enseignante. Des éléments de légitimation du lien entre les différents chiffres en jeu dans le bon de commande ont été ainsi *a priori* donnés. A la fin de l'épisode l'enseignante va alors pouvoir indiquer, à partir d'un exemple, une stratégie pour résoudre la tâche « Ziglotron » : traduire la désignation parlée en France « trente-deux » en sa désignation écrite chiffrée « 32 » puis utiliser les chiffres. A noter que l'argumentation précédente a mis en jeu une stratégie OG vers EC et c'est l'inverse qui est convoqué pour résoudre la tâche. L'épisode se termine par une remarque d'un élève qui associe visiblement le premier chiffre de « 42 » et le « 4 » du message pour faire « 44 » qu'il lit « quarante-quatre » (idem pour le deux). Ceci créé un **incident** que l'enseignante gère en ignorant la réponse de l'élève.	B : On regarde il y en a combien qui sont pris ? ?: Deux. B : Trente-deux, on va jusqu'à trente-deux, il y en a trente-deux qui sont recouverts, cachés. 17'10 B : On va vérifier pour le dernier. Vingt-huit boutons : on dit qu'on veut deux paquets de dix. *(Montrant le « 2 » de « 2 paquets de dix)* Un paquet, un deuxième paquet *(Montrant la première bande puis la deuxième fixée sur la file numérique puis ôtant la troisième et les deux carrés)* Des élèves : Rouge, vert. D'autres : Rouge, vert, blanc. B : Alors avec deux paquets de dix on arrive à ? (*B décolle l'extrémité de la bande verte et découvre « 20 » qu'elle recouvre ensuite avec la même bande verte en la repositionnant*) ?: Vingt. B : Vingt. Et on veut rajouter ? ?: Deux. ?: Huit. B : Huit. Vous comptez avec moi *(rajoutant des carrés de couleur à la suite de la bande verte sur la file numérique)* Un, deux, trois, ... Donc là ça fait vingt-trois, quatre, chut ! Je vous demande compter avec moi ce n'est pas ce que vous faites. Un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, et huit. On a fini jusqu'à ? Des élèves : Vingt-huit. B : Vingt-huit. 18'54 B : (montrant le deuxième bon de commande) Est-ce qu'on a raison de faire comme ça quand on voit qu'il faut trente-deux boutons, de dire trois paquets de dix et deux boutons ? On peut faire quoi ? On n'a pas besoin de dessiner tout ou de découper pour regarder, on en est sûrs normalement maintenant. Thomas ? Thomas : Aussi, on dirait sur les bons de commande par exemple le premier, quand on les met ensemble le quatre et le deux on dirait que ça fait quarante-quatre et vingt-deux. 19'40

Lancement, réalisation et synthèse de la 2ème tâche de la séance, cas de « 16 » 19’40 - 38’50	
1er épisode : lancement de la tâche, cas de « 16 »	
<u>Description</u> : L’enseignante continue la séance en donnant une nouvelle tâche. <u>Contenu</u> : L’enseignante va vérifier que le savoir mis en exergue précédemment est compris par les élèves. Elle prescrit une tâche simple et isolée consistant à écrire un message à partir de la désignation écrite chiffrée. Elle propose ici l’écriture chiffrée « 16 » qu’elle ne prononce pas (ce sera la seule fois des quatre séances que l’écriture chiffrée ne sera pas accompagnée de sa désignation parlée en France). Cet exercice est identique à l’exercice 2 p. 70. proposé dans le manuel.	19’40 B : Alors on va voir si vous avez compris : vous allez prendre votre ardoise (*B efface le tableau pour garder un bon de commande vierge*). Vous croisez les bras vous posez la tête sur les bras. Taranica qu’est-ce que je viens de dire ? Alors au tableau je vais écrire…Léon ! Je vais écrire combien il faut de boutons pour réparer un ziglotron, et vous sur votre ardoise vous allez écrire le bon de commande pour réparer ce ziglotron. J’ai laissé cet exemple de bon de commande au tableau. Donc pour écrire le bon de commande, Chania ! Ça c’est moi qui l’écris (*B écrit « 16 boutons »)* que pour ce ziglotron, pour être réparé, il faut cette quantité-là de boutons (*montrant le « 16 » sans le dire*), d’accord. Je vous demande d’écrire sur votre ardoise le nombre de paquets de dix et le nombre de boutons tout seuls (*B écrit au tableau en dessous de « 16 » « ...paquets de 10 boutons » sur une ligne et « ...boutons » en dessous*). Donc vous sur votre ardoise c’est ça que vous écrivez mais complété. Est-ce que tout le monde a compris ? Des élèves : Oui. B : Alors allez-y réfléchissez. Vous écrivez euh euh paquets de dix boutons et euh euh boutons. C’est cette quantité-là qu’il manque pour réparer le ziglotron. ?: *(Inaudible)* B : Non je viens de le dire. Alors ce que vous écrivez, voilà je l’entoure (*elle encadre « ...paquets de 10 boutons » et « ...boutons »*), c’est ça que vous écrivez sur votre ardoise en complétant combien il faut de paquets de dix et de boutons tout seuls pour réparer ce ziglotron qui a besoin de ce nombre de boutons. Il ne faut pas écrire trop gros Simon sur ton ardoise, d’accord ? Sinon tu ne vas pas avoir la place. 24’04

<table>
<tr><th colspan="2">2ème épisode : réalisation de la tâche par les élèves, cas de « 16 ».</th></tr>
<tr><td>Description :
Les élèves réalisent la tâche en écrivant la réponse avec leur ardoise.
Contenu :
Les élèves devant recopier sur leur ardoise le bon de commande écrit au tableau, le temps accordé à la résolution sera significativement plus long que celui de la proposition « 34 » qui va suivre. L'enseignante passe dans les rangs et regarde les réponses mais ne donne pas d'aide sur la tâche mathématique.</td><td>24'04
B : (B va voir les élèves) Calista, euh euh paquets de dix boutons, et euh euh boutons, tu commences au début. Alors Souleymane, est-ce que tu as écrit ce qu'il y a écrit en violet ? Non, alors écris ce qu'il y a écrit en violet et tu complètes avec le nombre de paquets de dix boutons et le nombre de boutons tout seuls. (A ?) Ecris ce qu'il y a écrit dans le cadre violet. (A ?) Je t'ai demandé d'écrire ce qu'il y a écrit dans le cadre violet, d'accord ? (A ?) Je te prête un rose, tu me le rendras après. (A ?) Vas en prendre un dans la boîte métallique, pareil. (A ?) Tu finis d'écrire, tu veux que je te l'écrive ?</td></tr>
<tr><th colspan="2">3ème épisode : mise en commun, cas de « 16 »
L'enseignante va s'appuyer sur les réponses de trois élèves pour corriger l'exercice. Elle a pris des informations durant la phase précédente qui lui assurent que ce sont les trois types de bons de commande écrits par les élèves. Tous les élèves auront ainsi une évaluation de leur réponse. A noter qu'un certain nombre d'élèves n'utilisent pas l'écriture chiffrée, leur stratégie précédente menant à répondre correctement. Le milieu créé ne contraint pas à considérer comme plus efficace la stratégie indiquée par l'enseignante précédemment (et attendue). Par ailleurs il se peut aussi que l'écriture chiffrée puisse être utilisée comme vérification de la réponse (ce qui a été indiqué auparavant dans la séance).</th></tr>
<tr><td>3.1
Description :
Le bon de commande du premier élève, Camélia, est reproduit au tableau par l'enseignante puis discuté en classe.
Bon de commande 1 :
10 paquets de 10 boutons
4 boutons
Contenu :
L'enseignante indique à l'élève que ce qu'elle à écrit, « 10 » dans « 10 paquets », ne correspond pas à ce qu'elle voulait demander : elle lui indique la bonne réponse (un paquet). Cette confusion entre « écrire le nombre de boutons voulus sous forme de</td><td>30'
B : Alors Camélia, tu peux nous dire ce que tu as écrit ? Je vais écrire en même temps. Dix paquets de dix boutons et ?
Camélia : Quatre.
B : Et quatre boutons. (B reproduit au tableau la réponse de Camélia, bon de commande 1) Alors on va réfléchir ensemble, avec Camélia pour voir si ça va ou pas. Reculez encore un petit peu, on va voir après. Alors qu'est-ce que vous avez à dire les uns, les autres du bon de commande de Camélia ? Vous n'avez rien à dire ? (silence de la classe) Vous êtes…
B : Camélia est-ce que tu peux nous expliquer comment tu as fait pour trouver cette commande, pour écrire cette commande ?
Camélia : J'ai réfléchi.
B : Tu as réfléchi ? Puis qu'est-ce que tu t'es dit ? Tu t'es dit quoi dans ta tête ?</td></tr>
</table>

	paquets » et « écrire le nombre de paquets de dix » a déjà été relevé par l'enseignante et des séances intermédiaires y on été consacrées. L'enseignante va invalider la réponse via une stratégie OG (le message « 10 bandes de 10 boutons ») vers OF via EC, grâce à la file numérique et à la matérialisation des quantités demandées dans le message. Le même matériel que précédemment est donc utilisé mais cette fois-ci pour invalider une réponse.	Camélia : Je vais mettre dix. B : Tu vas mettre dix ? Dix quoi ? Camélia : Boutons. B : Dix boutons ? Alors Camélia quand tu écris ça tu ne demandes pas dix boutons mais dix paquets de dix boutons. Et comment tu as fait pour trouver les quatre autres tout seuls que tu demandes à la fin ? Tu as réfléchi aussi ? Camélia : Oui. B : Et comment tu t'es dit « c'est quatre que je vais écrire » ? Oui parce que ? Camélia : Je connais que les quatre. B : Et pourquoi tu ne connais que les quatre ? Bon tu ne sais pas comment expliquer ça ? Camélia : Non. B : Bon. Est-ce que tu t'es aidée du nombre de boutons qu'il fallait pour écrire le nombre de paquets de boutons et les boutons ? Oui ? D'accord. Alors on va regarder : Camélia elle dit « dix paquets de dix boutons » donc je vais faire avec une bande qui recouvre dix, d'accord ? Je vais reporter sur la file numérique dix paquets de dix. On va voir si on arrive à ? Combien il fallait de boutons en tout ? Des élèves : Seize. B : Seize. Alors comptez avec moi que je ne me trompe pas. J'ai dix paquets : *(reportant les bandes sur la file numérique)* un paquet, deux paquets, trois paquets, quatre paquets, cinq paquets, six paquets, je continue mais il y a notre file numérique qui n'est pas assez longue. ?: Ça fait cent B : Ça ferait cent il a raison si on a dix paquets ça ferait cent. Est-ce qu'on est arrivés jusqu'à seize ? Des élèves : Non. B : Là ça fait cent, et puis quatre boutons ça ferait ? Et quatre, cent-quatre.
	<u>3.2</u> <u>Description :</u> Le bon de commande du deuxième élève, Toaïre, est reproduit au tableau par l'enseignante puis	33'15 B : Et toi Lucas qu'est-ce que tu as écrit ? Non on commencer par Toaïre qu'est-ce que tu as écrit Toaïre ? Alors Toaïre il a écrit dix paquets de dix boutons, et six boutons (*B reproduit le message au tableau, bon de commande 2*, à la place du

discuté en classe. Bon de commande 2 : 10 paquets de 10 boutons 6 boutons Contenu : Un incident survient quand un élève valide le message. Pourtant, ce qui vient d'être fait pour le premier bon de commande aurait dû l'alerter. L'enseignante demande alors un approfondissement et traduit ce que l'élève dit par l'égalité 10+6=16 en validant « *on a raison de demander dix boutons et après six boutons* » puis change d'intervenant. L'écriture chiffrée va lui permettre de récupérer et d'enrichir ce qui a été dit : le « 10 », nommé « dix », de « 10+6=16 » symbolise alors les paquets et permet de les compter. Ainsi, 10+6 permet de symboliser une production graphique hybride (le nombre de « 10 » peut symboliser les groupements d'une production graphique de type 1) ou/et une évocation de la collection avec deux types de groupements, les paquets de dix et le paquet de six restant. L'enseignante va à nouveau essayer de faire la distinction entre le nombre de paquets et la quantité qu'ils désignent dans la numération parlée en France, en utilisant une bande recouvrant les dix premières écritures chiffrées de la file numérique : le « 10 » recouvert en dernier étant un élément de preuve qu'une seule bande contient dix.	bon 1). B : Alors « il a raison » dit Quentin. Pourquoi tu dis qu'il a raison ? Quentin : Dix plus six égal seize. B : Alors Quentin dit que dix plus six c'est égal à seize (*B écrit 10+6=16*), et donc on a raison de demander dix boutons et après six boutons. Quelqu'un a quelque chose à dire par rapport à ce que vient de dire Quentin ? Léon ! Est-ce que c'est vrai que dix plus six égal seize ? ?: Non. B : Oui c'est vrai. ?: Oui mais il y a encore des paquets de dix. Dix paquets de dix boutons. B : Là il y a combien de paquets de dix dans dix plus six (*montrant le « 10 » de 10+6=16)* ? ?: Un. B : Un paquet de dix boutons, et là il y a écrit dix paquets de dix boutons (*montrant le premier « 10 » de 10 paquets de 10 boutons)*. On vient de le voir avec Camélia : si on prend dix paquets de dix boutons on arrive… ?: Ça fait cent B : Bon là il n'y a pas les nombres jusqu'au bout mais ça aurait fait cent, c'est-à-dire qu'on dépasse notre file numérique qui pour l'instant va jusqu'à cinquante. ?: Ça fait cent six. B : Est-ce que quelqu'un comprend pourquoi il s'est trompé Toaïre ? ?: Parce que ça fait cent. ?: Il voulait faire dix plus six. Il a mis dix fois dix, il s'est trompé. B : Si on veut dix ça fait combien de paquets de dix ? ?: Un. B : On va regarder. Est-ce que pour dix on n'a besoin que d'un paquet de dix ou de plusieurs ? *(Fixant une bande sur la file numérique)* Un paquet de dix, est-ce que ça suffit pour aller jusqu'à dix ? ?: Oui. B : Oui. Donc on a besoin seulement de un paquet de dix. Et après si on reprend encore six boutons, est-ce qu'on arrive à seize ?

		?: Oui. B : Alors on va voir. *(Fixant six carrés à la suite de la bande sur la file numérique)* Un, deux, trois, quatre, cinq, et six. On a bien pris seize en tout, c'est ce qu'on voulait.
	3.3 Description : Le bon de commande du troisième élève, Lucas, est reproduit au tableau par l'enseignante puis discuté en classe. Bon de commande 3 : 1 paquet de 10 boutons 6 boutons Contenu : L'enseignante valide la réponse de l'élève et pense qu'il utilise la stratégie attendue. Cependant il reste muet quand elle lui demande cette stratégie, ce qui créé un **incident**. Elle va alors changer d'intervenant. Ce dernier indique une stratégie OF vers OG : il compte en montrant une fois ses deux mains (d'où le « un » écrit « 1 ») et ensuite il surcompte à partir de dix avec ses doigts, obtenant ainsi six (qu'il note « 6 »). C'est une des premières fois qu'une stratégie est donnée par un élève publiquement. Elle met en jeu une interprétation arithmétique multiplicative de la numération parlée, celle qui est visée. Elle ne correspond pas cependant à ce qui est attendu ici par l'enseignante qui va alors reprendre et interpréter la réponse. La stratégie donnée mêle les deux numérations et deux interprétations. En effet, dans le « 42 » montré et dit « quarante-deux », le « 4 » est bien indiqué comme le chiffre à utiliser pour écrire le nombre de	36'15 B : Alors comme dit Lucas « moi je l'avais fait » (*B reproduit au tableau le message de Lucas, bonde commande 3, à la place du bon 2*) donc il y a d'autres enfants. Lucas pourquoi tu as écrit un paquet de dix et six boutons tout seuls ? Qu'est-ce que tu as regardé ? Lucas : J'ai regardé ici (*montrant le « 16 » au tableau*). B : Ce serait bien que vous écoutiez ceux qui se sont trompés et les autres pour voir si vous avez fait comme Lucas, parce qu'il est en train d'expliquer exactement ce qu'il a fait, comment il a trouvé le bon bon de commande. Il a dit « j'ai regardé ça » *(montrant au tableau « 16 »)* : il a regardé le nombre, hein Najma ? Tu n'écoutes rien du tout, tu dors, tu dors. Alors tu as vu quoi Lucas ? Lucas : J'ai vu que ... *(silence de quelques secondes)* B : Tu t'es aidé du nombre écrit. Pourquoi tu as écrit un paquet de dix ? Lucas : Parce que, ben, … *(silence de quelques secondes)* B : Tu n'arrives pas à expliquer ? C'est pas grave du moment que tu as compris c'est le principal, maintenant ça serait bien que quelqu'un puisse expliquer. Va t'asseoir Lucas, c'est bien. *(Montrant au tableau « 16 »)* Qu'est-ce qu'on regarde dans ce nombre-là pour savoir combien il faut de paquets de dix boutons ? On regarde quoi ? (*quatre élèves lèvent le doigt dont Souleyman*). Souleyman. Souleyman: On regarde le nombre ça fait dix (*il fait un geste en ouvrant ces dix doigts simultanément*). Après on rajoute encore six. Un deux, trois, quatre, cinq, six (*il lève au fur et à mesure les doigts*). Ça va faire seize comme là (*montrant le « 16 »).* B : Comme là. Donc on peut regarder sur la file numérique…Lucas ! Voilà tu reviens là c'est pas possible, ben oui ! On avait vu pour quarante-deux boutons c'est le même chiffre. Quarante-deux boutons : pour quarante il faut quatre paquets de boutons et deux boutons tout seuls pour faire les quarante-deux. Ici dans ce nombre-là le premier chiffre nous dit combien il faut de paquets de dix et le

<table>
<tr><td>paquets de dix , mais il est relié au « quarante » de la numération parlée. L’écriture chiffrée est alors renvoyée aussi à l’interprétation ordinale avec repérants (ou peut être arithmétique additive puisqu’ici sont évoqués les cardinaux des collections à réunir, quarante et deux).</td><td>deuxième chiffre combien de boutons tout seuls.
38’50</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">Lancement, réalisation et mise en commun de la 2ème tâche,
cas de « 34 », 38’50 – 45‘45</th></tr>
<tr><th colspan="2">1er épisode : lancement de la tâche, cas de « 34 »</th></tr>
<tr><td><u>Description</u> :
L’enseignante continue la séance en donnant une nouvelle tâche.
<u>Contenu</u> :
La tâche est la même que la précédente, mais cette fois-ci le nombre en jeu est non seulement écrit « 34 » mais aussi dit « trente-quatre ».</td><td>38’50
B : Vous effacez juste ce que vous avez écrit là sur votre ardoise (elle efface le « 1 » et le « 6 »), vous gardez le reste, et maintenant pour réparer le ziglotron il va falloir trente-quatre boutons (écrivant « 34 » à la place de « 16 »). Mettez votre bon de commande. Tu vas faire pareil Lucas. J’ai dit de ne pas effacer Toaïre, tu n’as pas écouté. (A ?) Tu fais quoi ? Un autre bon de commande avec trente-quatre boutons cette fois.</td></tr>
<tr><th colspan="2">2ème épisode : réalisation de la tâche par les élèves (exercice 2)</th></tr>
<tr><td><u>Description</u> :
Les élèves réalisent la tâche sur leur ardoise.
<u>Contenu</u> :
L’enseignante laisse une quarantaine de secondes de réflexion et ne donne pas d’aides mathématiques. Ici les élèves n’ont plus à recopier sur leur ardoise le message au tableau.</td><td>39’18
B : (B passe voir les élèves). Tu vas faire pareil Lucas. J’ai dit de ne pas effacer Toaïre, tu n’as pas écouté. (A ?) Tu fais quoi ? Un autre bon de commande avec trente-quatre boutons cette fois. Il faut pas effacer. On n’est plus avec seize boutons.</td></tr>
</table>

3ème épisode : mise en commun, cas de « 34 » L'enseignante va s'appuyer sur les réponses de deux élèves pour corriger l'exercice. Elle a pris des informations en regardant les ardoises que tous les élèves ont levées, ce qui lui assure que ce sont les deux seuls types de bons de commande qu'ils ont écrits. Tous les élèves auront ainsi une évaluation de leur réponse. Des remarques similaires à l'exercice 2 peuvent être faites ici, mais les stratégies des élèves sont moins l'objet de débats (il reste peu de temps avant la fin de la matinée).	
3.1 Description : Le bon de commande du premier élève, Jonathan, n'est pas reproduit au tableau par l'enseignante, mais est lu puis discuté en classe. Bon de commande A : 3 paquets de 10 boutons 10 boutons Contenu : La validité du message est discutée par une élève qui avance un argument non attendu par l'enseignante « *Parce que trente-dix ça n'existe pas* », ce qui créé un **incident**. Cet argument montre que l'élève envisage dans sa stratégie, ou sa vérification, de recourir à un appui additif ou un repérant, ici trente : elle n'interprète donc pas directement les chiffres de l'écriture chiffrée ou bien a encore besoin de vérifier sa réponse en revenant à une connaissance ancienne, une interprétation ordinale ou arithmétique additive de la numération parlée en France. Cette interprétation doit encore être « lisible » dans la réponse fournie dans le bon de commande, c'est à dire que d'un côté l'appui/repérant entendu (trente) doit pouvoir être retrouvé et de l'autre l'appuyant/comptant entendu (deux). L'enseignante gère l'incident en fournissant une réponse argumentée à l'élève, montrant ainsi que les deux lignes du message indiquent une quantité obtenue en réunissant celles désignées par chacune des deux parties du bon de commande (trente plus dix). L'égalité 30+10=40 reflète ici l'opération en jeu dans un problème additif. Elle signale alors que l'incorrection du	41' B : Vous levez votre ardoise. (B regarde toutes les ardoises) Ça y est Thomas ? Thomas : Non je n'ai pas terminé. B : Alors tout le monde a écrit sur son ardoise à part Jonathan qui n'a pas fini et puis Thomas. Alors Jonathan et Thomas, baissez votre ardoise les autres. Je vais demander à Mylène, Thomas et Jonathan, non restez à votre place, de nous dire ce que vous voulez écrire parce qu'on a fini. Baissez votre ardoise, tous les autres vous avez écrit la même chose, on verra après, baissez votre ardoise. Thomas tu veux nous dire ce que tu voulais écrire ? On écoute Thomas si vous êtes d'accord avec lui ou pas. Thomas : Je voulais écrire la commande qui y a écrit au tableau. B : Tu voulais faire quelle commande ? Combien de paquets de dix boutons et combien de boutons tu voulais ? Tu vas me le dire et je vais l'écrire, comme tu n'as pas fait sur ton ardoise. Alors Jonathan, qu'est-ce que tu voulais écrire toi ? Réfléchis encore Thomas. Jonathan : Trois. B : Trois ? C'est ça que tu voulais écrire ? Trois paquets de dix boutons ? Et combien de boutons ? Jonathan : Dix. B : Et dix boutons ? (*Ce bon de commande, bon de commande A, n'est pas reproduit au tableau*). Alors il y a quelqu'un qui dit que ça n'existe pas, pourquoi ? Pourquoi vous dites que ça n'existe pas ? Qui est-ce qui a dit « ça n'existe pas » ? C'est toi Tanina ? Pourquoi tu as dit ça ?

bon de commande A, vient d'une part d'un non respect de la contrainte afférant au nombre de boutons seuls et d'autre part de la quantité désignée par le message : quarante ce n'est pas trente-quatre.	Tanina : Parce que trente-dix ça n'existe pas. B : Ah ! Trente dix ça n'existe pas. Trois paquets de dix boutons ça fait combien de boutons ? On va regarder *(utilise la file des écritures chiffrées)* : un paquet de dix ça fait dix…Bon là je vais m'arrêter, si je parle toute seule donc, elle a raison Tanina trois paquets de dix ça fait trente, dix, vingt, trente, et on ne dit pas trente-dix. Mais trente et encore dix ça existe. Si on a trente et puis encore dix donc en tout ça fait trente plus dix (*B écrit 30+10*). Trente et on rajoute dix : (*comptant sur la file des écritures chiffrées avec son doigt*) un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, dix, ça fait quarante (*B écrit « = 40 » à la suite de « 30+10 »*). Bon, on ne voulait pas quarante boutons, et puis il y a une règle : on a dit que pour les boutons on ne peut pas dépasser combien ? Des élèves : Dix. B : Neuf. Donc on ne peut pas écrire ça. Thomas tu voulais écrire quoi toi ? Tu sais ou pas ? Tu as eu le temps de réfléchir, tu dis oui ou non. Est-ce que tu as eu le temps de réfléchir ? Non ? D'accord.
3.2 Description : Le bon de commande du deuxième élève, Mylène, n'est pas reproduit au tableau par l'enseignante, mais est lu puis discuté en classe. Bon de commande B : 2 paquets de 10 boutons 4 boutons Contenu : Le bon de commande est erroné. L'élève reste silencieuse quand l'enseignante demande des explications, ce qui créé un **incident**. L'enseignante guide les élèves vers une stratégie correcte, celle-ci menant à une réponse différente de celle donnée par l'élève. Ceci permet d'invalider le bon de commande B et fournit en plus la réponse correcte aux autres (écrite au tableau), chacun pouvant	44'27 B : Mylène tu nous dis ce que tu as écrit sur ton ardoise ? Mylène : Deux. B : Deux paquets de dix boutons. Mylène : Quatre. B : Et quatre boutons (*la réponse de l'élève, bon de commande B n'est pas reproduite au tableau*). Pourquoi tu as écrit deux paquets de dix boutons ? Mylène : (*silence*) B : Où est-ce qu'on regarde pour savoir combien on écrit, combien on a besoin de paquets de dix boutons ? Thomas ? Qu'est-ce qu'on regarde ? Ilalane tu pourrais aider Mylène peut-être non ? Tu ne crois pas ? Alors on peut regarder la famille : trente-quatre (montrant « 34 ») c'est quoi la famille ? ?: C'est trois.

ainsi valider ou non sa réponse. L'enseignante va guider les élèves vers une stratégie EC vers OG via OF, et non directement EC vers OG (enjeu du savoir précédemment). En effet, l'enseignante montre « 34 » qui est dit « trente-quatre », sans donner d'explication, se référant à une connaissance supposée ancienne. « Trente-quatre » est analysé via une interprétation ordinale. Le repérant « trente » est renvoyé au fait que « la famille des trente ça commence par trois » ce qui va donner le « trois » de « trois paquets de dix ». Le comptant « quatre » donnant directement le « quatre » de « quatre boutons ». En utilisant des connaissances anciennes, cette stratégie permet à l'enseignante de donner des éléments de justification	B : C'est la famille des trente, celle qui commence par? Des élèves : Trois. ?: Sinon ça fait vingt-quatre. B : Oui sinon ça fait vingt-quatre. La famille qui commence par deux c'est la famille des vingt. Donc il fallait demander combien de paquets de dix boutons ? Des élèves : Trois. B : Trois, et après quatre boutons (*B écrit « 3 » puis « 4 » au tableau sur chacune des deux lignes à compléter*). 45'45

Lancement, réalisation des tâches du fichier, 3ème et 4ème tâche de la séance 45'45 - 1h00'53

1er épisode : lancement des premières tâches du fichier, 3ème tâche de la séance (exercice 2 p. 70)

Description : L'enseignante continue la séance en donnant une nouvelle tâche, celle de l'exercice 2 du fichier élève Contenu : L'enseignante ne donne *a priori* pas d'aides, mais en indiquant que la tâche à faire est identique à la précédente, elle peut mobiliser chez les élèves l'utilisation des stratégies et du savoir mis en exergue auparavant. Pour gérer les rythmes de travail, certains élèves ayant fini rapidement, elle leur indique la possibilité de faire l'exercice suivant (cette tâche leur est donc pour l'instant indiquée par le fichier seul).	45'45 B : Vous allez ranger votre ardoise et prendre le cahier de mathématiques. *(B efface « 34 », ainsi que « 3 » et « 4 »)* Rangez votre ardoise, prenez votre cahier de maths. Chania assieds-toi. Jonathan ! Allez, vos cahiers. Vous le prenez à la page soixante-dix. Un sept et un zéro, comme ça *(écrivant au tableau)*. Non vous l'écrirez à la fin, on n'écrit pas la date, on va expliquer le travail tout de suite, on va voir ce qu'il faut faire. Nisrine qu'est-ce que tu fais ? Assieds-toi. Vous croisez les bras vous posez la tête sur les bras. Vous regardez la page soixante-dix, vous regardez la page soixante-dix. Rose ! Ça y est ? On va commencer par le numéro deux en bleu là où on voit Zoé, Arthur et Gribouille. Baisse ton doigt ! Qui est-ce qui veut lire la consigne ? Chainez vas-y. Complète le bon… ? Chainez : De commande. B : Très bien. Complète les bons de commande. C'est ce qu'on vient de faire sauf que ce ne sont pas les mêmes enfin je n'ai même pas regardé, non ce ne

	sont pas les mêmes. Alors Zoé elle a un ziglotron à réparer elle aussi. Sur son bon de commande c'est écrit quoi ? Il faut… ? Des élèves : Trente-six. B : Trente-six boutons, d'accord. *(Ecrivant « 36 » au tableau)* Trente-six boutons pour le ziglotron de Zoé. Vous complétez le bon de commande en dessous. Ma commande il y a écrit, euh paquets de dix boutons et euh boutons. Vous voyez ? Tu vois où c'est Najma ? Oui ? Alors vas-y, complète le bon de commande, celui de Zoé. B : Vous continuez pour les commandes d'Arthur et de Gribouille. Vous regardez le nombre de boutons qu'il faut pour réparer les ziglotrons. *(A ?)* Lisez la consigne et réfléchissez. Les enfants qui ont terminé vous commencez à regarder la suite, vous lisez, vous regardez les bons de commande. Vous réfléchissez à ce qu'il faut faire.
2ème épisode : réalisation de la tâche par les élèves (exercice 2 p. 70)	
<u>Description</u> : Les élèves réalisent la tâche sur leur fichier. <u>Contenu</u> : L'enseignante passe rapidement parmi les élèves et va rester auprès d'une élève qui n'a encore rien écrit, ce qui va laisser près de quatre minutes de temps de travail aux autres. L'enseignante va laisser à l'élève le choix de l'aide qu'elle désire avoir en lui rappelant toutes les séances autour du Ziglotron. L'élève va choisir de reprendre un travail sur la fiche Ziglotron : elle indique ainsi ne pas pouvoir utiliser l'écriture chiffrée ou la désignation parlée en France pour résoudre l'exercice.	49'58 B : *(B va voir les élèves. A Mylène qui n'a rien écrit)* Tu veux dessiner des choses sur ton ardoise ? Tu veux dessiner des boutons ? Non ? Tu ne veux rien faire pour t'aider ? Tu n'as pas d'idée de ce qui pourrait t'aider ? Mylène ? Qu'est-ce qui pourrait t'aider à ton avis alors ? Avec quoi tu as le mieux compris quand on a…, je sais pas, quand il fallait demander les gommettes ? Avec ziglotron quand tu pouvais regarder sur ziglotron ? Quand on a dessiné sur l'ardoise ? Quand on a fait des groupes de dix sur le ziglotron ? Quand on était dans le groupe de mathématiques tous les six ? Est-ce qu'il y a quelque chose qui t'a un petit peu aidé dans ce qu'on a fait ? Quelle chose t'a le plus aidée à ton avis ? Mylène : *(Inaudible)* B : Dessiner quoi ? Dessiner sur le ziglotron ? Bon. Donc c'est ce que tu souhaiterais pouvoir faire pour faire ça ? Alors tu vas prendre ton ardoise, tu vas dessiner les boutons qui manquent au ziglotron sur ton ardoise, tu n'as qu'à faire des ronds, on va dire que c'est des boutons ronds, d'accord ? Parce que les carrés c'est un peu plus difficile. Tu prends ton ardoise, on va dire que ton ardoise c'est le ziglotron, d'accord ? C'est le robot. Et donc pour lui il lui faut trente-six boutons, tu vas les dessiner, d'accord ? Puis après je reviendrai, tu lèveras le doigt d'accord ? Et je viendrai voir comment on peut faire, tu diras si tu as une idée. Tu le fais toute seule, et si tu as besoin tu lèves le doigt, d'accord ?

3ème épisode : lancement des dernières tâches du fichier, 4ème tâche de la séance (exercice 3 p. 70)	
3.1 <u>Description :</u> L'enseignante continue la séance en précisant la tâche proposée par l'exercice 3 du fichier élève <u>Contenu</u> : La tâche est assez simple à comprendre, mais elle n'a jamais été réalisée par les élèves. L'enseignante décide alors d'indiquer une réponse au premier des quatre bons à compéter. Un élève donne la réponse sous la forme de la désignation parlée en France « soixante-dix-huit » : il a ainsi effectué une tâche supplémentaire que certains ne peuvent pas faire. En effet, l'enseignante indique que le lien entre l'écriture chiffrée des nombres au-delà de 70 et de leur désignation parlée en France n'a pas encore été abordé, mais que ce n'est pas nécessaire : ceci peut permettre d'anticiper le fait que certains élèves n'écrivent pas la réponse du fait qu'ils ne vont pas savoir lire le nombre. Cette non connaissance des élèves va bloquer toutes les stratégies liées au passage entre l'écriture chiffrée et la désignation parlée en France, ce que l'enseignante relève. Elle indique une stratégie qui permet d'obtenir la réponse. Celle-ci consiste à associer les deux chiffres, dans un ordre précis, pour composer l'écriture chiffrée demandée : c'est cette stratégie qui a été l'objet du savoir mis en exergue précédemment. Ici elle n'est plus accompagnée d'éléments de légitimation mais appliquée pour résoudre la tâche. La tâche a donc	54'30 Alors on va continuer : le numéro trois, qui est-ce qui veut lire la consigne ? C'est pas la même consigne. Attention c'est quelque chose qu'on n'a jamais fait. Céline. (*B efface les écritures du tableau*) ?: (*Inaudible*) B : Alors c'est la même consigne, c'est pas le même travail, chut !! Dans le cadre violet de votre cahier…Chania ! Il y a écrit *(écrivant au tableau)* : il faut …. boutons, et en bas il y a écrit, qu'est-ce qu'il y a écrit ? ?: Ma commande. B : Ma commande oui, et il y a écrit ? Sept paquets de dix boutons, et puis ? Et huit boutons. C'est à vous d'écrire le nombre de boutons en tout qu'il faut pour réparer le ziglotron. Si on veut sept paquets de dix boutons et huit boutons, c'est le contraire de tout à l'heure. Est-ce qu'on a besoin de compter quelque chose pour le faire ? Des élèves : Non. B : Non. Ilalane tu l'as fait ton travail ? Dans le cadre violet du numéro trois ? Qui est-ce qui a une idée ? Qui est-ce qui peut expliquer aux autres ce qu'il a fait et ce qu'il pense que ça peut être ? Jason ? Qu'est-ce que tu as écrit là ? Jason : Soixante-dix-huit B : Alors tu as écrit ça, soixante-dix-huit il me dit, les autres ? Souleymane ! Soixante-dix-huit c'est comme ça *(montrant au tableau « 78 »)*. Par rapport au bon de commande qu'est-ce que vous remarquez ? ?: C'est pareil, le sept c'est le sept et le huit c'est le huit. B : Voilà. Sept paquets de boutons ça nous donne le premier chiffre, celui de quelle famille c'est. La famille on ne l'a pas encore apprise, d'ailleurs on n'a même pas besoin de savoir lire les nombres pour trouver comment écrire le nombre de boutons qu'il faut. Et puis en deuxième c'est le deuxième chiffre du nombre qui dit combien on veut de boutons tout seuls (*B montre les chiffres au tableau*). Donc on n'a qu'à regarder : les paquets de dix boutons c'est le premier chiffre du nombre et le nombre de boutons tout seuls c'est le deuxième chiffre du nombre total de boutons qu'on veut.

	été redéfinie, elle consiste à utiliser cette stratégie.	B : Donc allez-y, finissez de compléter, enfin de dire combien il faut de boutons d'après les bons de commande qui sont écrits. Quand vous avez terminé vous écrivez la date.
4ème épisode : réalisation de la tâche par les élèves (exercice 3 p. 70)		
	Contenu : La stratégie précédente est à nouveau indiquée à un élève : associer les deux chiffres du bon de commande, dans un ordre précis, pour composer l'écriture chiffrée demandée. L'élève exécute la tâche (d'abord mentalement) qui est validée par l'enseignante. Au moment où l'élève a communiqué à l'enseignante la réponse qu'il allait écrire il a utilisé la connaissance ancienne consistant à relier une écriture chiffrée et sa désignation parlée en France. Ainsi, la situation de communication oblige les élèves à effectuer cette tâche supplémentaire..	57'54 B : *(B va voir les élèves et indique qu'elle est d'accord ou s'arrête pour expliquer). (A ?)* Là on te dit combien il y a de paquets et combien il y a de boutons. Le nombre de paquets de dix c'est le premier chiffre du nombre total de boutons, tu vois ? Et le deuxième, c'est deuxième chiffre du nombre de boutons qu'il faut pour réparer le ziglotron. Si ça tu as bien compris, tu dois pouvoir écrire le nombre total de boutons qu'il faut. On l'a fait, regarde au tableau : le premier chiffre ça donne le nombre de paquets, c'est-à-dire dans quelle famille on est, et le deuxième chiffre nous dit combien il y a de boutons tout seuls dans cette famille. Deuxième chiffre du nombre total de boutons. Alors ici regarde, tu trouves le nombre de boutons total, ma commande : un paquet de dix boutons, cinq boutons. Alors qu'est-ce que tu vas écrire ici ? ?: Quinze B : Très bien, et ici ? ?: Quarante B : Oui tu as compris. Bon il va être l'heure de manger, vous laissez le cahier ouvert s'il vous plaît. 1h00'53

Mme H.

1ère Séance (40'31)

Cap Maths « Grand Ziglotron »

Janvier/février 2009

<table>
<tr><th colspan="2">Lancement : 0'-10'30</th></tr>
<tr><td colspan="2">1er épisode : Indication de la tâche 1 des élèves 0' – 6'10
L'enseignante est debout la majorité du temps devant le tableau. Elle s'adresse à toute la classe et sollicite les élèves en leur posant des questions mais aussi en leur laissant la possibilité de réagir (ils lèvent la main pour prendre la parole qui leur est donnée par l'enseignante).</td></tr>
<tr><td><u>1.1</u> : premières indications de la tâche 1 des élèves.
<u>Description</u> :
L'enseignante demande aux élèves d'évoquer une séance semblable vécue avec le ziglotron, une fiche ziglotron est affichée au tableau. Ils indiquent ce dont ils se rappellent mais ne savent pas encore ce que va être la séance du jour.
<u>Contenu</u> :
La stratégie de la sous-tâche 1.1, « compter un à un pour mener à une désignation parlée en France », est sous-entendue par les élèves et approuvée par l'enseignante, sans qu'elle la reformule lui-même. La sous-tâche 1.6, la validation est évoquée par un élève sans qu'il soit clairement établi qu'elle doive s'effectuer par rétroaction du milieu (coller les boutons) ou par approbation de l'enseignante.</td><td>0'
H : Chut ! Alors, ça y est ? On a les bras croisés ? On écoute bien. Alexandre s'il te plait ; on écoute bien et on va .., ça j'ai demandé de le ranger ... on écoute bien et je vais maintenant vous donner les indications pour le jeu. Est-ce que vous vous souvenez…
Elèves : Oui !
H : ...de ce Monsieur, Monsieur Ziglotron ? (affiche au tableau) Alors Monsieur Ziglotron vous vous souvenez ? Je vais demander à Shana qui a l'air d'être bien au courant, alors explique-nous Shana.
Shana : (inaudible) on avait des jetons … , on avait des jetons et il fallait compter des carrés qui étaient blancs..
H : Oui alors c'est quoi ? Qu'est-ce qu'il a sur son ventre ? On avait dit que c'était quoi ? Maé ? Alors ce sont des petits carrés, ce sont des ... ?
Maé : Boutons… (inaudible)
H : Et on mettait quoi ?
Maé: On mettait des carrés.
H : On mettait ce qu'il manquait, d'accord
Maé : Ben n'importe quel chiffre je cherchais le nombre, et après je les mets.
H : D'accord
Maé : Si tu en avais pris trop tu (inaudible)
H : Et après moi j'ai pas (inaudible), si tu avais réussi ou pas.
Maé : Si tu en avais trop, si tu en avais moins</td></tr>
</table>

	Ce premier épisode se termine par une proposition d'un élève (Sabrina) qui permet au professeur de « récupérer et enrichir » pour débuter un épisode indiquant les spécificités de la tâche à faire dans la séance (essentiellement la tâche 1, des « clients »).	H : D'accord, qui euh, non tu n'as pas la parole Shana, Clara as-tu quelque chose à rajouter, euh pardon Sabrina as-tu quelque chose à rajouter ?
	<u>1.2 </u>: l'enseignante revient sur certaines sous-tâches et indique la sous-tâche 1.5 <u>Description </u>: Elle se fait en interaction avec les élèves. L'enseignante présente le matériel, les deux formes de conditionnement des plaques de dix carrés/boutons et les carrés/boutons seuls : elle fait remarquer aux élèves qu'il y a dix petits carrés sur les plaques. Elle présente dans la tâche 1 la sous-tâche 1.3 (indiquer le message au marchand, un seul élève). Elle indique ensuite la sous-tâche 1.5 (transporter la collection) puis 1.6, c'est à dire la validation. Elle indique en outre la variable didactique « un seul voyage ». <u>Contenu</u> : Un exemple de la forme du message de la sous-tâche 1.3 est donné dans ce sous épisode : « *j'aurais besoin de trois boutons* ». Sinon, il n'y a pas d'autres aides apportées, si ce n'est un conseil concernant la vigilance. A la fin de cette	2'30'' Sabrina : Il faut, eh ben on va mettre quelque part le jeton et après il faudra compter et après il faudra chercher exactement la bonne quantité. H : Alors elle a raison, exactement c'est ça, c'est-à-dire que aujourd'hui ça va être un peu différent de la dernière fois, c'est que nous allons avoir des marchands, d'accord ? Donc il va y avoir… chut, chut ! Non, non, non c'est moi qui désigne c'est pas la peine de lever la main. Il va y avoir un marchand dans la salle, euh, *(elle désigne les emplacements)* dans la bibliothèque, un marchand ici, un autre là, et un autre là. Et les marchands.., non, tu écoutes la consigne. ?: C'est la maîtresse qui décide H : C'est la maîtresse qui décide déjà, et vous écoutez la consigne parce que sinon on ne va pas savoir. Alors les marchands vont avoir à leur disposition trois boîtes, d'accord ? *(elle montre les boîtes)* Alors j'ai fait des choses en plus grand. Première vous allez avoir des petits jetons individuels alors ils sont tous petits je vous les montre pas je vous montre ceux que j'ai faits là *(elle accroche au tableau le matériel reproduit en plus grand : bande/barre d'une dizaine, groupement d'une dizaine, carrés seuls)* ; un petit jeton individuel. Vous allez avoir aussi des grandes barres comme ça *(elle en dépose une sur la table centrale)* sur lesquelles il y a combien de jetons Clara ? ?: Six H : Chut ! Clara ? Clara : Dix H : Dix, et alors donc on démarre comme ça, ça ça va être à la disposition du marchand, ou bien des barres comme ça Sabrina il y en a combien ? *(les fixe au tableau)* Sabrina : Dix H : Il y en a dix aussi, d'accord ? Ça c'est ce qui va être à la disposition du marchand. Attention ! On écoute bien : vous allez jouer par équipes de deux, vous allez avoir un Ziglotron par groupe de deux. Vous devrez dire au marchand, il y en a un des deux qui se déplacera, pas les

	phase, l'enseignante a donné les principaux éléments de la tâche 1. Les élèves vont alors demander des précisions.	deux, un des deux qui se déplacera pour aller voir le marchand pour aller chercher ce dont il a besoin. Par exemple « monsieur le marchand j'aurais besoin de trois boutons », et là le marchand il vous donne trois boutons et vous allez les remettre, vous allez les remettre à votre place. D'accord ? Alors bien entendu, Romain tu viens de me dire il coupe, vous après quand vous avez les petits boutons individuels vous pourrez les mettre dessus mais quand vous avez des grandes plaques comme ça ou comme ça qu'est-ce qu'il va falloir faire ? Romain ! Romain ? Romain. Romain : Les couper H : Les couper pour les placer au bon endroit et pour savoir si vous avez réussi ou pas. Attention ! Attention ! Une chose très importante, vous n'avez le droit qu'à un seul voyage ?: Oh non ! H : Ah oui ! Vous n'avez le droit qu'à un seul voyage… H : Vous n'avez pas le droit de vous déplacer deux fois pour aller redemander des boutons, si vous n'avez pas pris la bonne quantité ou pour, ou pour euh vous dire « j'en ai pris trop », non ! A vous de faire très attention avant.
	<u>1.3</u> : les élèves veulent des précisions sur certaines sous-tâches. <u>Description</u> : Les élèves vont demander des précisions sur la tâche, en particulier la sous-tâche 1.4, l'adéquation entre ce qui est demandé et ce que leur donne le marchand. L'enseignante ne donne pas de stratégie. Elle donne différents exemples de commandes possibles. <u>Contenu</u> : En ce qui concerne la sous-tâche 1.4, l'adéquation entre ce qui est demandé et ce que leur donne le marchand, l'enseignante ne donne pas de stratégie et les élèves n'en n'évoquent pas, ils ne font que soulever le problème.	4'43'' H: Je... On va donner la parole à Jihan, Jihan ? Jihan: Et si on a pas le bon résultat ? (Jihan a levé la main) H : Ben si tu n'as pas le bon résultat la prochaine fois tu feras attention. ? : Et si le marchand … H *(interrompt Jihan)* On en discutera après, justement comment vous avez fait pour trouver le bon résultat. H *(s'adresse à un élève qui veut parler (Shana ?))* eh minute ! Et on explicitera vos procédures après. Shana ? Shana : (inaudible) et la dernière fois aussi on avait fait ça et puis après aussi on écrivait sur un papier H : Ah oui, après on écrivait un message, mais ça ce sera une prochaine fois, le message on verra par la suite, aujourd'hui on n'a pas besoin d'écrire de message, on le dit oralement ? *(prend la parole sans lever le doigt et sans y être autorisé):* Mais si le marchand il nous donne pas la bonne quantité ? H : A toi de vérifier la bonne quantité, attention. Alors une chose aussi importante : vous allez demander le nombre de boutons… Romain s'il te plait tu peux t'asseoir. Arrête de jouer avec ton crayon c'est agaçant. A vous de demander si vous voulez par exemple *(H montre au*

	L'enseignante revient de sa propre initiative sur la sous-tâche 1.1, en donnant différents exemples de commandes.	*tableau ce qu'elle désigne oralement)* trois boutons tout seuls ou bien, je sais pas, quinze boutons tout seuls ou si vous voulez une barre ou bien si vous voulez un paquet de dix avec des jetons tout seuls. A vous de décider. ?: (inaudible)… des petits jetons et il nous donne pas la même quantité ? H : Qu'est-ce qu'on a dit si il nous donne pas la bonne quantité on peut dire au marchand « dis donc marchand tu t'es trompé, tu ne m'as pas donné la bonne quantité », d'accord ?
2ème épisode : reformulation de la tâche 16'10 – 8'30		
	<u>Description</u> : A l'initiative de l'enseignant, les élèves vont reformuler la tâche 1. Ils ne vont le faire que partiellement et l'enseignante ne complète pas. <u>Contenu</u> : Les élèves évoquent le fait de ne faire qu'un voyage ainsi que la sous-tâche 1.1 (« *compter et demander le nombre* » dit un élève). L'enseignante ne revient pas sur les autres sous-tâches, mais, à la suite d'une question d'un élève, elle indique que les plaques de dix sous la forme de bandes (1x10), « *c'est pareil que sous la forme de rectangles* » (2x5).	6'10' Alors, je vais distribuer, je vais déjà redemander avant ça à.., H *(des élèves lèvent le doigt dont Gabriel)* : aux élèves, qui voudra me répéter la consigne ? Gabriel ? Gabriel, explique-nous. Chut ! On est concentrés on écoute Gabriel. Alors, qui est-ce qui peut l'aider ? Alexandre ? Alors on t'écoute Alexandre. Qu'est-ce qu'on va devoir faire ? Tu te souviens plus ?! Alors ça y est la mémoire est revenue à Gabriel. Tu pourras te faire aider. Gabriel : On peut pas faire deux tours pour demander deux bandes parce que sinon on peut se tromper, on peut en avoir moins ou trop H : Ou trop, oui, alors il faut faire qu'un seul voyage, qu'est-ce qu'il va falloir faire Djibril ? *(Ni Djibril, ni aucun élève n'a levé le doigt)* Djibril : Compter, compter les carrés et demander le nombre qu'on veut pour placer les boutons sur les carrés H : Sur le grand Ziglotron, celui-ci c'est le grand Ziglotron, attention ! Gabriel tu veux rajouter quelque chose ? On a le droit on a dit on a droit qu'à une seule fois Gabriel : Si le marchand il se trompe par exemple moi j'ai commandé une bande de dix, une grande bande, et lui il m'a donné un paquet de dix ? H : Alors oui, est-ce que c'est la même chose ? Est-ce qu'en quantité tu auras la même chose si tu as une grande bande ? Si tu as ça *(montrant au tableau les deux groupements de dix)* ou s'il te donne ça ? Est-ce que ce sera la même chose ? Elèves : Oui ! H : Oui ! Il y en a dix là et dix là, d'accord ? Toi tu peux, soit tu demandes une bande ou bien un paquet de dix et puis tu demandes ce que tu as besoin, tu peux demander… à Gabriel: Et si… H vous de vous débrouiller pour savoir ce que vous allez demander, on ne va pas en dire plus, parce que là on commence à entrer un petit peu trop dans le détail.

<table>
<tr><th colspan="3">3ème épisode : Installation de la classe 8'30 – 10'30</th></tr>
<tr><td></td><td><u>Description</u>:
L'enseignante désigne les emplacements et les élèves pour réaliser la tâche : « vendeurs », « clients ».
<u>Contenu</u> :
Dans un entretien post-séance, l'enseignante a indiqué qu'elle avait choisi, dans l'action, les « meilleurs » élèves comme « marchand » afin qu'ils ne se trompent pas dans ce qu'on leur demande. S'il y a erreur, elle veut que ce soit le fait des « clients ».
A la fin du lancement, l'enseignante passe voir quelques lieux de « vente » préciser la tâche 1 bis 1, sans donner de stratégies. Elle insiste sur « pas plus, pas moins ». Elle n'anticipe pas sur le fait de pouvoir se tromper dans les plaques ou les boutons seuls, ou tout au moins elle n'avertit pas les élèves à ce sujet.</td><td>8’30’’
H : Alors, euh, les marchands. (des élèves lèvent la main) Non, non, non ! Baissez les mains, c’est moi, baissez les mains, c’est moi. Jihan, marchand. Shana, marchand. Clara et Sabrina vous changez… non pas Clara ! Djibril et Sabrina vous changez de place. Marchand euh, Alexandre.
Maé et d’autres élèves : Moi !
Alexis: Mais non, arrêtez de dire « moi ».
H : Non, merci, merci Alexis, merci. Vous deux c’est bon, c’est bon. On va demander à Anaïs-Ludivine d’être marchand, et, et, et, et je vais en rajouter un autre ici je vais demander à Mathis d’être marchand ici. D’accord ? Donc vous avez quatre lieux, cinq lieux pardon, vous vous asseyez devant vos bureaux les marchands et maintenant je distribue… vous deux vous êtes ensemble.
?: Ce sont les mêmes ?
H : Non c’est pas les mêmes, exprès. (distribution, silence de 15 secondes) : Chut, chut, ah oui vous êtes par équipes de deux, d’accord ? Chut, chut ! Alexis, va en chercher un qui se trouve là-bas derrière. Voilà, très bien Alexis. (fin de distribution)
H : (à Mathis = marchand 1) … alors toi tu donnes ce qu’il te demande, pas plus pas moins d’accord ? Juste ce qu’il te demande.
H : (à Shana = marchand 2) : Tu donnes exactement ce qu’il te demande (H se déplace vers le marchand 3=Alexandre)</td></tr>
</table>

Réalisation de la tâche des élèves : 10'30 – 21'23 L'enseignante se dirige vers les groupes (tous ont été vus) et demande ce qu'ils ont formulé. Les interventions sont privées, c'est-à-dire qu'elles ne concernent que le groupe et l'enseignante. Cependant certaines peuvent être entendues par d'autres élèves, du fait de leur niveau sonore ou du fait que quelques-uns viennent spontanément solliciter l'enseignante pour de l'aide. Dans ce dernier cas, généralement l'enseignante relance le travail des élèves sans donner d'aides ou indique qu'elle va venir les voir ultérieurement. De temps à autre les interventions sont publiques pour des régulations organisationnelles et pour veiller au respect des consignes		
1er épisode : 10'30 – 18'10 L'enseignante passe de groupe en groupe d'élèves « clients », qui sont le plus souvent en train d'effectuer la commande (sous-tâche 1.3 ou 1.4). Les interactions ont principalement pour enjeu la forme de la commande, c'est à dire le fait que les élèves ne demandent que des « boutons tout seuls » ou bien des boutons et des plaques. L'enseignante insiste auprès des « vendeurs » pour qu'ils respectent ce qu'on leur demande et ne l'interprètent pas. Les interventions sont privées.		
	1.1 : intervention de l'enseignante auprès du groupe 1 Description : L'enseignante demande au client ce qu'il a demandé et insiste pour que le marchand lui délivre cette commande. Contenu : L'élève a demandé « *trente-quatre comme ça* », mais il n'est pas possible de voir sur la vidéo ce qui est désigné (plaques ou boutons seuls). L'enseignante fait en sorte que le marchand n'interprète pas la commande.	10'30'' H : *(à la cliente X (=Charlotte ?) auprès du marchand 3 Alexandre)* : Alors, qu'est-ce que tu as demandé ? X : Trente quatre. H : Trente quatre, trente quatre comme ça ? Donc tu lui as donné trente quatre alors ? Un, deux, trois quatre comme ça tu veux ? *(Nabil le binôme de X essaye d'intervenir)* Hep, hep, hep, tu lui dis pas ce qu'il faut qu'elle fasse, c'est à elle de le savoir. *(se rend auprès du marchand 4= Jihan)*
	1.2 : intervention de l'enseignante auprès du groupe 2 Description : L'enseignante demande au marchand de respecter la forme de la commande (des « *boutons seuls* »), alors que ce dernier (aidé du client) compte les boutons un par un sur les plaques de dix. Contenu : L'élève a demandé « *trente-quatre* » et à l'initiative de l'enseignant (« *trente-quatre comment ?* ») indique la boîte	10'53' H : *(à Clara cliente du marchand 4 Jihan)* Qu'est-ce que tu as demandé ? D'abord Nabil tu vas t'asseoir, j'ai dit un par équipe. Trente quatre, donc elle va te donner trente quatre comment ? *(Clara montre la boite contenant des carrés seuls) (H va prendre un papier et un crayon sur son bureau).* Clara : (inaudible)….un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, dix, onze, douze... *(elle compte ce qu'il y a sur des barres de dix)* H : *(à marchand 4 = Jihan)* Non, non, non, non, je suis désolée, elle n'a pas dit ça, elle a dit trente quatre comme ça *(H montre la boite contenant des carrés seuls). (à Clara)* C'est ce qu'elle t'a dit. *(H se dirige vers le marchand*

	contenant les carrés seuls. Les élèves de ce groupe ne semblent pas utiliser la ressource que constitue <u>une</u> plaque de dix : ils ne comptent pas les plaques mais les boutons sur les plaques, comme des boutons « *tout seuls* ».	*2= Shana*)
	<u>1.3</u> : intervention de l'enseignante auprès du groupe 3 <u>Description</u> : L'enseignante interroge un des élèves « client » sur ce qu'il a demandé. <u>Contenu</u> : L'élève a demandé « *quarante-cinq* » et à l'initiative de l'enseignante (« *quarante-cinq comment ?* ») indique la boîte contenant les barres de dix. L'enseignante marque sa surprise mais ne fournit pas d'aide.	11'35'' H : *(Au client Y du marchand 2 Shana)* Qu'est-ce que tu lui as demandé ? Quarante cinq comment ? alors quarante cinq comme ça alors ? Quarante cinq bâtons comme ça ? Quarante cinq groupes de dix ? *(A une élève qui passe)* Anita s'il te plait c'est un par équipe. Alors tu lui demandais quoi ? *(se lève et se dirige vers le marchand 1)*
	<u>1.4</u> : intervention de l'enseignante auprès du groupe 4 <u>Description</u> : L'enseignante demande au « client » ce qu'il a demandé et voit le marchand compter un à un pour fournir les boutons (seuls). <u>Contenu</u> : L'élève a demandé « *quarante-deux* », il a donc fait une erreur dans son dénombrement car aucune fiche ne contient quarante-deux boutons, ce que l'enseignante ne signale pas. Nous ne savons pas s'il a indiqué « boutons seuls » ou autre (ou rien). Le marchand compte un à un les boutons seuls à l'aide de la comptine numérique.	11'54'' H : Un par équipe, là, comment ça se fait qu'il y en a deux, là ? Toi tu n'as rien à faire là ! Toi tu n'as rien à faire là ! Qu'est-ce qu'il t'a demandé ? Joanna *(cliente)* ? Joanna : Vingt et un (inaudible), vingt deux, vingt trois, vingt quatre… H : D'accord, alors *(au marchand 1)* fais-lui quarante deux, toi tu attends. Quand il y a déjà un marchand… *(à un client)* tu vas t'asseoir bonhomme, tu reviendras quand il n'y aura plus de marchand. (brouhaha/inaudible) vous allez vous asseoir. Alors Joanna tu as tes quarante deux ? D'accord
	<u>1.5</u> : intervention de l'enseignante auprès du groupe 5 <u>Description</u> : L'enseignante demande au client ce qu'il a demandé et demande de préciser « *que des comme ça ?* » <u>Contenu</u> : L'élève a demandé « vingt-huit. Nous ne savons pas s'il a	12'38'' H : *(à Alexis autre client du marchand 1 Mathis)* Et toi qu'est-ce qu'elle demande ? Alors tu veux que des comme ça ? Vingt huit comme ça ? *(H note le nombre et la commande et se dirige vers le marchand 2 Shana)*

	indiqué « boutons seuls » ou autre (ou rien). L'enseignante essaye d'engager l'élève à réfléchir sur la possibilité de demander deux conditionnements différents (plaques et carrés seuls), mais n'insiste pas.	
	<u>1.6</u> : ré-intervention de l'enseignante auprès du groupe 3 <u>Descriptif</u> : L'enseignante redemande au client ce qu'il a demandé et ponctue par « *tu t'en sors ou pas*? » <u>Contenu</u> : L'élève a demandé cette fois-ci quatre bandes au lieu des « quarante-cinq comme ça » (plaques), ce qui avait surpris l'enseignante. L'enseignante marque sa désapprobation « *tant pis* », mais n'insiste pas.	12’58’’ H : *(à Maé une cliente du marchand 2)* Non toi pour le moment tu es où ? Avec qui ? Alors tu t’assois là parce que là ils vont compter. *(Maé va s’asseoir à sa place)* H : *(au client Y-le même- du marchand 2)* Tu lui as demandé, tu t’en sors ou pas ? Quatre bandes ? Tu dis quatre bandes. T’as mis quatre bandes. Tant pis. *(H note la commande et le nombre du client Y Elle se dirige vers le marchand 4 Jihan)* 13’28’’ H : *(A Clara cliente du marchand 4)* Et toi tu as demandé quoi ? Clara : (inaudible) H : D’accord. H : Euh, il y a une place de disponible si tu veux ici *(H montre le marchand 4),* Joanna. H *(parlant du groupe de Djibril et Sabrina)* Eh ben ils se sont pas mis d’accord. H (*répondant à un élève Z qui s’est déplacé pour demander quelque chose à H (inaudible))* alors s’il n’a pas assez tu peux faire autrement.
	<u>1.7</u> : intervention de l'enseignante auprès du groupe 6 <u>Description</u> : L'enseignante redemande au client ce qu'il a demandé. <u>Contenu</u> : L'élève a demandé « *trente* », ce qui indique un dénombrement exact. L'enseignante le note, sans intervenir auprès des élèves.	13’50’’ H : (à Romain) Alors, qu’est-ce que tu m’as demandé toi ? Euh comment il s’appelle, Romain tu en as demandé trente ? *(H se dirige vers le marchand 5= Anaïs-Ludivine)* Romain : Oui
	<u>1.8</u> : intervention de l'enseignante auprès du groupe 7 <u>Description</u> : L'élève « client » est en train d'indiquer au « marchand » ce	14’10’’ H : *(s’adressant à Dounia cliente du marchand 5)* Alors là tu en as besoin de combien ? Combien ? Alors qu’est-ce tu as fait ? Tu lui as demandé

	qu'il veut obtenir. L'enseignante demande à l'élève « client » : « *Alors là tu en as besoin de combien ?* ». S'en suivent des échanges sur la formulation de la commande, l'élève marchand restant spectateur. <u>Contenu</u> : Plusieurs incidents ponctuent cet épisode, à chaque fois l'enseignante relance de manière plus ou moins neutre (intonation marquant la surprise), en demandant de recommencer, ou en demandant un approfondissement (elle demande par exemple s'il y en a assez ou non, ou bien de recompter). L'élève semble tout d'abord se tromper dans la transformation de la désignation parlée en France et celle en terme de bandes de ... (il demande trois bandes de dix et une de cinq pour quarante-cinq). La rétroaction du milieu proposée par l'enseignante (compter les carrés dans les quatre bandes) lui permet de voir son erreur. D'une manière générale, il y a différentes formulations qui sont proposées par l'élève (donc différents essais), du fait des demandes réitérées de l'enseignante (elle gère **l'incident** le plus souvent en demandant un approfondissement parfois proche d'un guidage). Cette dernière tente d'utiliser certains éléments de la rétroaction du milieu (dans quatre bandes on peut compter quarante), puisqu'elle estime que l'élève se trompe afin de l'amener à une réponse correcte (en termes de bandes de dix et de boutons seuls). Nous retenons que ceci n'est théoriquement pas la tâche 1 assignée à l'élève, puisqu'il doit arriver avec son message (un seul essai) et n'a pas eu la rétroaction du milieu constitué de la commande. Ainsi, dans la tâche qu'est en train de réaliser l'élève, certaines stratégies sont possibles (comme compter de dix en dix avec les bandes) bien que	quoi là ? Dounia : (*Inaudible*) H : Quarante cinq jetons ? Quarante cinq jetons tu veux c'est ça ? *(H compte)* Non tu n'as pas demandé quarante cinq jetons. Ah d'accord. Est-ce que tu veux des bandes ou des jetons ? Des bandes ? Alors est-ce que tu en avais quarante cinq bandes ? Quarante cinq bandes tu as demandé ? Dounia: (*inaudible*) H : Tu dis « je vais lui demander des bandes » alors qu'est-ce que tu vas lui demander ? Est-ce que tu demandes quarante cinq bandes et quarante cinq jetons ou pas ? Alors, si tu veux, toi tu en as besoin de quarante cinq. Si tu as besoin des quarante cinq tu vas lui demander quoi ? Tu as dit « je vais lui demander des bandes » est-ce que tu vas lui demander quarante cinq bandes ? Dounia : Non H : Tu vas demander combien ? Dounia : Quatre H : Quatre bandes, et c'est tout ? Dounia: Non H : Dounia. Combien ? Je note ce que tu dis c'est tout, c'est juste pour moi. Alors tu vas demander quoi ? Dounia : Quatre bandes H : Quatre bandes ? Tu demandes ça, ça y est, c'est définitif ? Allez, quatre bandes. Non celle-ci elle est pas entière. (inaudible) Ah, ah oui, d'accord, c'est pour ça qu'elle est coupée celle-ci, une bande coupée de cinq, non ? Dounia: Oui H : Tu peux pas, tu peux pas, celle-là elle n'a rien à faire là. Tu m'as dit quatre bandes, est-ce que ça ça te convient ? Dounia : Non H : Non ? Pourquoi ça ne te convient pas ? Pardon ? Dounia : (Inaudible) H : Il va t'en manquer, c'est ça ? *(Acquiescement de Dounia)* Dounia : Il va y a en avoir en plus. H : Là *(montrant les bandes prises)* tu en auras en plus là ?

<table>
<tr><td></td><td>l’enseignante ne les indique pas : l’élève en emploie une (que nous ne pouvons identifier) et arrive avec succès à dire que dans quatre bandes il y a quarante boutons. Il montre aussi qu’il sait que quarante-cinq c’est « plus que quarante ». Le fait cependant d’échouer à formuler la commande nous indique que l’élève ne semble pas concevoir de demander des bandes et des jetons à la fois, c'est-à-dire deux conditionnements différents. Il demande soit des bandes (il lui en faut quatre, même si elles ne comportent pas toutes le même nombre de carreaux, le total de carrés étant jugé adéquat), soit des unités (jetons/carrés/boutons) seules, ce qui se voit à différents moments, y compris la fin de l’échange lorsque l'élève étant obligé de demander cinq « jetons » en plus des quatre bandes, revient sur une formulation avec uniquement des « jetons », quarante-cinq. L'enseignante ne semble pas percevoir cette difficulté ou bien décide de ne pas guider l'élève. Ce sous-épisode va être repris dans la phase de conclusion, alors que la tâche effectuée par l’élève n’est pas exactement la tâche 1 puisque les différents conditionnements ne doivent pas être présents au moment de formuler la commande.</td><td>(Acquiescement de Dounia). Ben alors il va falloir que tu mettes autre chose, tu vas demander juste ce que tu as besoin.
Dounia : (inaudible)
H : Tu repars sur des jetons ? Tu as abandonné les bandes ? Tu repars sur des jetons ? Je ne pense pas qu’elle va avoir suffisamment de jetons, je suis sûre que tu peux trouver mieux, tu as presque la solution. Essaye de voir là combien ça fait de jetons.
H : (S’adressant à Romain un élève venu près d’elle). Tu vas t’asseoir Romain on va discuter sur les procédures.
H : Tu es avec qui ? Alors va t’asseoir ma grande. (à Dounia) : il t’en manque combien ? Tu en as assez ou pas ? (Dounia fait signe que non) Pas assez ? Il va t’en manquer combien ? Tu en as combien là ?
Dounia : Quarante
Dounia : Quarante. Tu en veux combien au total ?
Joanna: Quarante cinq
H : Donc il en manque combien
Dounia : …
H : Combien ?
Joanna: …
H : Alors qu’est-ce que tu vas lui demander ?
Joanna: …
H : Tu vas lui demander autre chose, parce que ça ne suffit pas. Alors tu vas lui demander quoi ?
Joanna: (inaudible)
H : Tu vas lui en demander combien ? Combien ? Tu m’as dit combien ? Quarante cinq jetons ? Allez, je te laisse faire, je ne te dis plus rien. (H va voir un autre groupe)</td></tr>
<tr><td colspan="3">2ème épisode : régulations et interventions publiques 18'10 – 21'23</td></tr>
<tr><td></td><td><u>Description</u> :
Les interventions sont publiques (c'est à dire audibles à tous les élèves et</td><td>18’10’’
Une élève : On en a que cinq
H : Alors asseyez-vous tous les deux, on va regarder ça. Alors tu avais… oui, on va en discuter. Ca y est tout le monde a mis ses petits jetons ?</td></tr>
</table>

	de façon délibérée), même si l'enseignante s'adresse à certains élèves en particulier. Elles concernent l'organisation des allers et venues des élèves, et le contrôle du respect des consignes. <u>Contenu</u> : L'enseignante ne fournit pas d'aides aux élèves, elle insiste en particulier sur le fait de ne faire qu'un essai (tâche 1) et de ne pas interpréter la commande faite (tâche 1 bis).	?: Non parce que c'est long H : Oh ben là tu vas en rechercher un H : C'est bon, ici aussi ? Ben Djibril viens l'aider ! Alors attends, dis-moi. Qu'est-ce que c'est que ça ? Ah !! Dis donc Djibril, est-ce que tu as le droit de rapporter des choses ? Tu triches ? Est-ce qu'on a le droit de tricher ? Alors, dis-moi, qu'est-ce qu'il t'a demandé Djibril ? ?: Il m'a demandé trente H : Trente quoi ? ?: Trente bandes H : Trente bandes, tu lui as donné trente bandes ? Tu lui en as donné trente, d'accord, et ben voilà, non, c'est pas trente jetons c'est trente bandes de dix, trente paquets de dix. H : Ok tout le monde s'assoit par groupe de deux. Vous, vous restez là ou vous allez là-bas, à vos places ? Bon restez là alors. Ça y est ? Heu, Romain, pas Romain, Alexis tu t'assois, Romain aussi. Djibril tu t'assois. Et le petit … par terre il est où ? Ça y est vous me rangez vos trousses. Alors, on va à sa place, t'as vu ce qu'il te fallait ? Va à ta place. H : *(à A)* Vous aviez demandé….Vous en aviez demandé combien ? Quarante cinq ? Et alors y en a eu trop ? Va t'asseoir. Tu lui as demandé quoi ? Quarante cinq jetons ? Mais pourquoi ? Tu as fait la translation toi, t'avais pas à dire, c'est eux qui doivent te donner les cartes et tout ça. Ok, on s'assoit et on arrête tout. On s'assoit. ?: (*inaudible*) H : Eh bien tu vas ramasser. C'est bon il est dessus ou pas ? Oui, oui c'est bon, ça va ça, quand on (*inaudible*). Ok, on s'assoit maintenant on fait le bilan, je voudrais que tout le monde s'assoie. Sabrina et Clara. Djibril, tu croises tes bras, et tu attends.

Mise en commun : 21'23 – 40’31

Au début de la phase, les élèves restent à la place qu'ils avaient en tant que marchand ou client, l'enseignante leur demande au fur et à mesure de réintégrer leur place d'origine. L'enseignante est debout au milieu de la classe, le plus souvent devant le tableau, tableau qu'elle va utiliser dans cette phase. Le matériel est toujours à disposition des élèves, mais ils ne l'utilisent pas et écoutent les différentes interventions : ils sont la plupart du temps sollicités par l'enseignante. Celle-ci récupère le plus souvent leur réponse pour les enrichir

1er épisode : 21'23 – 22’38

Description :

L'enseignante demande à un groupe qu'elle choisit « *comment vous avez fait pour avoir le nombre de jetons que vous aviez demandé ?* ». Les élèves indiquant qu’ils ont compté et l’enseignante relève qu’ils se sont trompés entre le message élaboré dans la sous-tâche 1.1 et celui délivré dans la sous-tâche 1.3.

Contenu :

La réponse des élèves a amené l’enseignante sur une autre tâche que celle qu’elle voulait questionner. Elle insiste alors sur l'adéquation entre le message élaboré dans la sous-tâche 1.1 et celui délivré dans la sous-tâche 1.3.

L'enseignante demande ensuite à l'ensemble de la classe « *Qui a réussi déjà* » . Et passe vérifier dans la classe (en regardant les fiches ziglotrons). En demandant aux élèves et en leur faisant confiance sur le fait d'avoir réussi ou non et en passant vérifier rapidement, elle émet un jugement sur la validité des réponses. Cependant, il est difficile aux élèves de savoir ce que leur professeur appelle « réussir » au vu de la complexité de la tâche. Il semble que ce soit d'avoir « réparé » le ziglotron, mais un élève

21’23’’

H : Le groupe de Clara, alors déjà, asseyez-vous, comment vous avez fait pour avoir le nombre de jetons que vous aviez demandé ? Clara, comment tu as fait ?

Clara : On a compté

H : Tu as compté quoi ?

Clara : Sabrina elle a compté

H : Elle a compté quoi Sabrina ?

Sabrina: J’ai compté les trous et après et ben je lui ai dit et après elle a été les chercher

H : D’accord. Alors, quand tu as compté...

Sabrina : Quarante quatre

H : Combien ? Quarante-quatre ? Alors pourquoi après tu es allée demander trente-quatre ?

Sabrina : Je suis pas allée demander

H : Non, non, Clara est allée demander trente-quatre, d’accord ? (à ?) Je sais pas tu mets ça à la poubelle. Toi tu as dit qu’il y en avait quarante-quatre et Clara elle est allée demander trente-quatre.

22’15’’

H : Alors, qui ? Qui a réussi déjà ? *(les élèves lèvent la main)*

?: Moi

?: Nous

H : Vous vous n’avez pas réussi Gabriel ? Toi tu n’as pas réussi, lui non plus, Sabrina non plus, vous vous avez réussi, vous avez réussi, et qui a réussi ?

?: J’ai pas de ciseaux.

<table>
<tr><td></td><td>souligne qu'il n'avait pas de ciseaux pour faire la validation en jeu dans la sous-tâche 1.6 (intervention ignorée). En outre, l’enseignante n’est jamais intervenue sur cette sous-tâche auparavant.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">2ème épisode : 22'38 – 25'42</td></tr>
<tr><td></td><td><u>Description</u> :
L'enseignante demande à l'ensemble de la classe « Pourquoi vous avez réussi et pourquoi vous n'avez pas réussi ? ».
Elle fait référence aux sous-tâches dans l'ordre chronologique et donne des précisions:
Sous-tâche 1.1 : elle valide le fait que tout le monde a compté avant d'aller chercher les boutons
Sous-tâche 1.2 : des procédures pour ne pas oublier le message sont données par les élèves (les doigts, mentalement, les écrits)
Sous-tâche 1.3 : déjà traitée auparavant
Sous-tâche 1.4 : l'enseignante insiste sur le fait qu'il ne faut pas oublier cette étape, sans indiquer de stratégie
Sous-tâche 1.5 : non abordée ici
Sous-tâche 1.6 : non abordée ici
<u>Contenu</u> :
A la fin de cet épisode toutes les</td><td>22’38’’
H : Bon, alors maintenant on va essayer de voir ce qu’il s’est passé, pourquoi vous avez réussi et pourquoi vous n’avez pas réussi ? Alors, Romain, donc déjà, tous, vous avez compté avant d’aller demander, vous n’êtes pas partis directement. Vous vous souvenez que quand on avait joué au premier Ziglotron… (à Sabrina) Tu t’assois tu te tais maintenant c’est terminé. Tu te tais et tu croises tes bras. On va regarder ce qui s’est passé après. La dernière fois quand on avait joué au Ziglotron certains dès le départ sont partis directement demander au marchand combien il leur fallait sans compter ce qu’il avait sur son Ziglotron, combien il manquait de boutons donc déjà c’est bien parce que ça vous y avez pensé d’accord ? Première chose. Maintenant, qu’est-ce qui s’est passé pour certains ? Qui n’en a pas assez ? (à ?) Tu n’en as pas assez ? Regarde tout ce que tu as là. Alors j’ai dit « Qui n’en a pas assez ? ». Sabrina, tu n’en as pas assez ? D’accord, alors Sabrina avait compté quarante-quatre et quand elle a dit à Clara, Clara qu’est-ce qu’elle a fait ? Clara elle est allée demander parce que moi j’ai entendu Clara, elle a demandé à qui Clara ? A toi ? Et elle t’en a demandé trente-quatre et elle en a bien eu… donc toi tu ne t’es pas trompé mais Clara entre temps elle a oublié le message. Qu’est-ce qu’il faut faire pour ne pas oublier le message ? (Des élèves lèvent le doigt dont Romain) Romain ?
Romain : Il faut garder dans la tête
H : Garder dans la tête. Chut, chut, moi je ne peux pas entendre si toutes les mains sont levées et si on parle en même temps. Romain dit qu’il faut garder dans sa tête, très bonne idée (inaudible)
?: On peut l’écrire sur une feuille
H : Sinon on peut l’écrire sur une feuille, tout à fait.
?: Mais si on n’a pas de feuille on peut écrire sur l’ardoise
H : Ou alors on peut écrire sur l’ardoise, tout à fait. Je n’avais pas dit qu’on n’avait pas le droit d’utiliser l’ardoise, on pouvait aller chercher une ardoise, alors Sabrina par contre on n’a pas le droit d’écrire sur la table, Romain, d’accord, ce que tu es en train de faire. Donc Sabrina vous auriez dû noter pour ne pas oublier, d’accord ?</td></tr>
</table>

	sous-tâches de la tâche 1 nécessitant des stratégies mathématiques ont été abordées, en indiquant quelques stratégies pour les mener à bien. Il reste la formulation du message, enjeu de la sous-tâche 1.1.	?: Tu dois le garder dans la tête, tu dois dire quarante-quatre, quarante-quatre dans la tête H : Ah ! Jusqu'à ce que tu arrives là-bas tu disais quarante-quatre, quarante-quatre, quarante-quatre, quarante-quatre ? Oui, c'était une bonne idée aussi pour garder dans la tête. Très bien. Qui n'en a pas assez encore ? Euh, Joanna. Joanna vous aviez demandé combien ? Joanna : Quarante-deux H : Est-ce qu'on vous a bien donné les quarante-deux ? Joanna : Non il nous en manquait quatre (inaudible) H : Est-ce qu'on avait le droit de retourner en chercher ? Est-ce que c'était dans la consigne ? Joanna: Non, c'est Mathis qui (inaudible) H : Eh bien pourquoi tu es venu t'occuper de leur travail ? Ton travail à toi c'était quoi ? Mathis: Marchand H : Alors et pourquoi tu es venu t'occuper de leur travail ? Mathis: (inaudible) H : Ah non, ben la prochaine fois tu ne seras plus marchand si tu n'es pas capable de jouer ton rôle, d'accord ? Eh non c'est pas possible ça. Donc vous vous n'aviez pas, vous aviez demandé ce qu'il fallait, c'est lui qui ne vous avait pas donné la bonne quantité, d'accord ? Donc dans ce cas là il faut vérifier quand vous êtes chez le marchand d'accord, pour dire « là il m'en manque » et là il vous en donnait directement, d'accord ?
3ème épisode : processus d'institutionnalisation d'une stratégie. 25'42 – 30'33		
	3.1 : Premier temps, une procédure d'un élève est validée positivement Description : L'enseignante aborde les stratégies pour la sous-tâche 1.1. Elle a déjà validé le fait que tout le monde ait compté avant d'aller chercher les boutons. Ici une stratégie est donnée par un élève qu'elle désigne et dont elle connaît la stratégie. Contenu : La procédure d'un élève (qui a été relevée par l'enseignante durant la phase précédente) est validée par l'enseignante	25'42'' H : Ça c'est un autre problème parce que vous vous aviez demandé. Donc vous, vous aviez demandé des jetons tout seuls, H : Qui a demandé encore des jetons tout seuls ? H : Qui a demandé des bandes comme ça ? ?: Djibril H : Alors, Gabriel tu avais demandé quoi toi Gabriel ? Gabriel : Quatre bandes de dix H : Alors, en tout tu avais besoin de combien de, de combien de…Clara assieds-toi s'il te plait. Tu avais besoin de combien ? Gabriel : Quarante-cinq H : D'accord. Il avait besoin de quarante-cinq boutons *(H écrit au tableau « 45 boutons »)*, et il a demandé

	(« *écoutez car il a la bonne solution* ») et écrite au tableau. L'enseignante valide ainsi une des stratégies menant à formuler un message en termes de « bandes (de dix) et boutons seuls ». Elle consiste à obtenir la désignation parlée en France du cardinal de la collection par un comptage (aucune stratégie n'est mentionnée ici), ensuite passer de cette désignation au fait de commander des bandes (de dix) et des éléments seuls. Elle est présentée à partir de l'exemple donné par un élève, pour le seul nombre quarante-cinq. Chez l'élève, la bonne réponse a été obtenue par rétroaction du milieu puisqu'il n'avait commandé initialement que quatre bandes et il n'en n'avait pas assez (à remarquer qu'ici l'élève à enfreint la consigne, puisqu'il n'avait pas le droit de faire un autre essai, l'enseignante ne le lui fait pas remarquer). Les élèves n'ont pas tous eu de rétroaction et dans cet épisode, l'enseignante n'y fait pas référence mais va indiquer une façon d'obtenir la « *bonne solution* ». Elle ne prend pas en compte les multiples propositions erronées des élèves (ignorées la plupart du temps ou invalidées sans développement de l'argumentation) et s'appuie sur celles qui vont dans le sens prévu. Elle indique	Gabriel : Quatre bandes de dix H : Quatre bandes de dix *(H écrit au tableau « 4 bandes de 10 »)*, c'est ce que tu as demandé ? Gabriel : Oui H : Est-ce qu'on t'a bien donné les quatre bandes de dix ? Gabriel : Oui H : Et quand tu les as placées, quand tu les as découpées et que tu les as placées qu'est-ce que tu t'es aperçu ? Gabriel : Il m'en manquait cinq H : Ah ! Est-ce que c'est normal qu'il lui en manquait cinq ? Qui peut expliquer ? *(Charlotte lève la main)* Charlotte ? Charlotte : Parce que, il aurait fallu qu'il prenne une bande grande comme il a pris et H : Une seule ? ?: Non H : Laisse la parler s'il te plait, laisse la parler Charlotte : Pas une seule il devrait prendre deux H : Il aurait dû Charlotte : Prendre deux ou alors il prenait cinq petites H : Alors toi tu dis qu'il aurait dû prendre deux bandes de dix ? Charlotte : Deux bandes de dix H : Tu es sûre de toi ? Alexandre as-tu une idée ? *(Alexandre n'a pas levé la main)* Tu n'écoutes pas Alexandre retourne à ta place parce que si tu vois peut-être que tu écouteras mieux. Jihan aussi tu vas à ta place, Mathis à ta place. Je vous appelle si j'ai besoin de vous. Alors, Gabriel nous dit… Clara s'il te plait, écoute bien. Gabriel nous dit « j'ai demandé quatre bandes de dix et il m'en a manqué cinq ». ?: Bah H : Attends. On va essayer de faire réfléchir les autres, je pense que tu as compris. *(Romain lève la main)* Romain ? Romain : Faudrait qu'il prenne quinze bandes de dix H : Quinze bandes de dix ! Quinze paquets de dix ?! Tu es sûr ? Qui n'est pas d'accord avec Romain ? Oui, tout le monde. ?: Non ! Je suis d'accord avec Romain

	la stratégie qui consiste à retrouver les dizaines dans la désignation parlée en France d'un nombre en les énumérant à l'aide des doigts. Ce travail sur la désignation du nombre est mis en relation avec la réalisation de la tâche, ici un parallèle entre le nombre de dizaines et le nombre de bandes (de dix) ou encore entre le nombre de bandes et la désignation parlée en France (une bande « *ça fait* » dix, deux, vingt, etc.) : les élèves ne voient pas tous cette relation, par exemple ils continuent à énumérer la suite des dizaines, alors qu'il ne reste plus de bandes de dix à compter. Le travail sur le décompte des repérants est poursuivi par un travail sur la décomposition du nombre en une somme, mis en évidence par la désignation parlée du nombre (quarante-cinq/ quarante plus cinq). En outre, l'enseignante ponctue la stratégie qu'elle met en avant par des écrits au tableau : le nombre dit « quarante-cinq » est écrit « 45 » et il est noté en dessous « 4 bandes de dix ».	H : Gabriel Gabriel : Parce que moi j'ai compté de dix en dix H : Tu as compté de dix en dix, alors Gabriel : Dix, vingt, trente, quarante et j'ai compté avec mes mains il en avait quatre, ça s'arrêtait à quatre, quarante, et pour arriver à cinq il fallait demander cinq petits jetons. H : Alors qu'est-ce que tu aurais dû faire ? Toi tu as demandé quatre bandes de dix, écoutez bien parce qu'il a la bonne solution, c'est bien ce que tu viens de dire, tu as bien analysé. Tu as dit « j'ai demandé quatre bandes de dix et j'aurais dû demander quatre bandes de dix et ? » Gabriel : Plus cinq H : Plus cinq. Pourquoi plus cinq ? (*H écrit « plus 5 » au tableau*) Gabriel : Parce que si … H : Si tu demandais une bande de plus, qu'est-ce qui se serait passé ? Gabriel : On en aurait cinquante H : On en aurait cinquante. Est-ce que là on en avait besoin de cinquante ? Des élèves: Non H : Non, d'accord ? Voilà, tu avais besoin de quarante-cinq donc quatre bandes de dix il a dit je compte, on va l'aider pour compter sur nos mains. H et classe : *(ouvre simultanément dix doigts et les referme) mains avec élèves*) Dix, vingt, trente, quarante. *(H s'arrête).* Des élèves : Cinquante H : Quatre bandes ça fait quarante d'accord ? (*lève un à un les doigts*) Une bande ça fait dix, deux bandes ça fait ? Elèves : Vingt H : Trois bandes ça fait ? Elèves : Trente H : Quatre bandes ça fait ? (*quatre doigts sont levés*) Elèves : Quarante H : D'accord. Donc quatre bandes de dix il en manquait cinq. C'est bien Gabriel et Anita parce que vous avez bien analysé derrière, c'est bien. ?: Aussi il fallait pour avoir quarante-cinq il fallait enlever une main H : Une main oui. Quand on compte de dix en dix il fallait enlever une main, tout à fait d'accord.

	3.2 : poursuite du processus, par la correction du travail des élèves en mettant en jeu cette stratégie Description : L'enseignante demande au fur et à mesure aux groupes d'élèves d'expliquer ce qu'ils ont fait. Elle reprend et enrichit les réponses des élèves : en guise de correction, elle applique, à l'aide de questions posées aux élèves la même stratégie qu'exposée précédemment. Il n'est toujours pas fait appel au milieu, les validations se faisant comme précédemment, de manière « intellectuelle » : il s'agit ici de reproduire la stratégie pour des cardinaux différents. Certaines sous-tâches sont abordées et à nouveau traitées comme précédemment. Contenu : L'institutionnalisation de la stratégie précédente se poursuit grâce à son application aux cas que des groupes ont rencontrés. Par exemple, pour trente-quatre/34/trois bandes de dix et quatre[341], la vérification se fait avec l'énumération des dizaines présentées avec les bandes de dix : dix, vingt, trente, et il reste quatre, trente-quatre. Ceci permet en outre à l'enseignante	30'33'' H : Charlotte, toi tu en avais besoin de combien, en tout ? Charlotte : Quarante-quatre H : Quarante-quatre. Charlotte. Non, trente-quatre, trente-quatre c'est ça ? Moi j'avais noté trente-quatre. Qu'est-ce que tu as demandé Charlotte ? Clara, tu croises tes bras. Charlotte : J'ai demandé trois bandes de dix H : Alors, on y va pour Charlotte : *(écrit au tableau « 34 »)* Charlotte elle en avait besoin de trente-quatre, elle a demandé trois bandes de dix *(H écrit au tableau « 3 bandes de 10 »)*, et c'est tout ? ?: Ça fait trente Charlotte : Plus quatre petits tout seuls H : Plus quatre jetons tout seuls (*H écrit au tableau « 4 jetons »)* Charlotte : On avait le droit H : Je ne comprends pas ce que tu veux dire Charlotte : Elle, elle a demandé chez le marchand les petits jetons parce qu'aussi elle avait le droit d'en prendre encore quatre H : Oui, ben oui elle avait le droit de dire, non même elle a demandé, moi j'étais là quand elle a demandé. Quand elle a demandé elle a dit « je veux trois bandes de dix et quatre tout seuls ». Trois bandes de dix et quatre tout seuls est-ce que ça fait bien trente-quatre ? Elèves : Oui ! H : On va compter les bandes de dix ? On y va. Si on a une bande de dix ça fait combien ? Elèves : Dix H : Deux bandes de dix ça fait combien ? Elèves : Vingt, trente, quarante H : Trois bandes de dix ça fait trente Elèves : Quarante H : Non ! Est-ce qu'on a bien les trois bandes de dix ? Est-ce qu'on a bien trente ? Elèves : Oui H : Trente, et quatre tout seuls ça fait ? Trente ... ?

[341] Au tableau la désignation parlée en France est traduite par sa désignation chiffrée.

	d'apporter une correction portant sur la procédure à appliquer et par conséquent sur la formulation de la commande, en termes de plaques de dix et de carrés/boutons/jetons seuls. De plus la stratégie est replacée dans l'ensemble des sous-tâches à faire et des « précautions » à prendre (reprise de l'aide à la réalisation de certaines sous-tâches). Cependant cette stratégie n'est réellement faisable qu'avec les bandes de dix, c'est-à-dire un matériel que les élèves n'ont pas pour effectuer la sous-tâche 1.1, mais qu'ils peuvent voir, sans a priori le manipuler, au moment des sous-tâches 1.3 (transmission du message à l'adresse du « vendeur ») et 1.4 (vérification de l'adéquation entre la formulation du message et la collection livrée). En outre ce matériel est resté affiché au tableau. Ceci se retrouve en particulier en ce qui concerne le traitement du cas du groupe 7, rencontré dans la phase précédente. L'enseignante indique la marche à suivre avec des questions qui permettent d'orienter les élèves sur la stratégie précitée. Les connaissances en jeu font intervenir le lien entre un nombre de bandes et la désignation parlée en France cinq bandes/cinquante. Le lien entre les deux n'est pas rappelé, mais il a été évoqué	?: Quarante quatre, euh trente-quatre H : Trente-quatre, d'accord ? H : Alors vous qu'est-ce qui s'est passé chez vous? ?: On en a trop parce que moi j'étais venu chercher la commande mais Djibril il avait pris une autre commande H : Alors Djibril, tu n'as pas écouté, j'avais dit un par équipe, tu as fait ce que tu as voulu tu n'as pas fait ce qu'il fallait. Est-ce qu'on peut être content avec toi ? Elèves : Non H : Non, d'accord ? Chez le marchand ! Tu as vu si on ne vérifie pas la commande chez le marchand qu'est-ce qui se passe ? On en a trop, d'accord ? Ok ? Alors la prochaine fois il faudra penser à quoi la prochaine fois ? On lève la main. Déjà avant d'aller chercher sa commande qu'est-ce qu'il faudra faire, que vous avez bien fait attention ? Chana ? Qui a levé la main et qui a attendu qu'on lui donne la parole monsieur Djibril. Chana : Il fallait quand on était chez le marchand il fallait compter les petits jetons H : Avant d'y aller il faut compter ce qui nous manque, d'accord ? Après ? Une fois qu'on est chez le marchand et qu'on a donné sa commande qu'est-ce qu'il faut faire ? ?: Il faut… H : *(Anaïs-Ludivine demande la parole*) Anaïs-Ludivine ? Anaïs Ludivine : Il faut vérifier si on a bien tous les… H : Vérifier ce qu'a donné le marchand pour ne pas avoir les désagréments que vous avez là, c'est dommage, d'accord ? *(Mathis lève la main)* Et, euh, tu as autre chose à rajouter Mathis ? Mathis : Aussi ne pas tricher H : Oh oui, ne pas tricher, n'est-ce pas ? Vous me regardez ? Puis en plus c'est toi qui dis ça, tu as raison ne pas tricher ! H : J'ai pas demandé à Dounia ce qu'il s'est passé, alors Dounia, explique-nous parce que d'abord on a eu une petite discussion qui était un petit peu.., allez raconte-nous ! Combien tu avais besoin de jetons en tout ? Dounia : Quarante-cinq H : Tu as eu besoin de ? Dounia : Quarante-cinq H : (à ?) Attends, après. Quarante-cinq, d'accord. Est-ce que tu as eu ce que tu voulais ?

	précédemment avec le comptage des bandes dix, vingt, trente, etc. Intervient aussi la comparaison de désignations parlées en France (quarante-cinq et cinquante), dont il n'est pas non plus rappelé de stratégie à ce sujet.	Dounia : Non H : Non ? Et qu'est-ce qui se passe ? Chut, on l'écoute, écoutez-la Dounia : (inaudible) H : Voilà. Alors au départ tu as demandé quarante-cinq jetons, et puis après tu dis « non, des bandes », d'accord ? Alors qu'est-ce que tu aurais dû dire, au niveau des bandes, combien il te fallait de bandes ? (à Lisa-Joyce) Tu l'aides, c'est dans ton équipe. Qu'est-ce que tu aurais dû dire au niveau des bandes ? Quarante-cinq jetons ? Combien il te fallait de bandes ? Dounia : Quatre H : Quatre. Et est-ce que quatre bandes ça te suffisait ? Il aurait fallu rajouter quoi ? Est-ce que si je prenais cinq bandes c'était bien ? Dounia: Non H : Pourquoi c'était pas bien cinq bandes Lisa-Joyce ? Si je prenais cinq bandes, ça aurait fait quoi ? Qu'est-ce qui se serait passé ? (?) : Y en aurait que cinq H : Y en aurait cinq bandes ? Non, si elle prenait cinq bandes qu'est-ce qui se serait passé ? *(Inès lève la main)* Inès ? Inès : Y en aurait cinquante H : Y en aurait cinquante et toi tu en avais besoin de combien ? Dounia : Quarante-cinq H : Quarante-cinq et donc tu en aurais eu trop ou pas assez ? Tu en aurais eu trop. Romain : (*Inaudible. D'autres ne semblent pas d'accord)* bandes tu as raison Romain, et cinq jetons tout seuls, d'accord ? Ok ?
	<u>3.3</u> : fin du processus grâce à une comparaison de l'efficacité de la stratégie avec une autre stratégie. <u>Description</u> : L'enseignante demande aux élèves de comparer deux types de formulation de message, en termes de « *jetons* » seuls (désignation parlée en France) et en termes de nombre de bandes et de jetons.	36'00'' H : Alors vous avez utilisé.., si on fait le bilan vous avez utilisé deux procédures différentes : certains ont demandé des jetons tout seuls, et d'autres des jetons, enfin des bandes plus des jetons, d'accord ? Si on demandait des bandes plus des jetons qu'est-ce que ça faisait, qu'est-ce qui se passait ? Romain ? Romain : Ça ferait trop H : Non ! H : Non, tu demandais la bonne quantité. Maé ?*(silence 12 secondes)* Alors ? Vous n'avez pas une idée sinon je vous laisse là, c'est pas grave on en discutera la prochaine fois. Maé: Aussi, si on entendait le même numéro, c'est pas le même chiffre et il fallait pas

	Contenu : L'enseignante a rappelé auparavant que les deux formulations indiquent le même nombre de boutons (pas d'argumentation développée ici). Elle demande une approbation des élèves qui n'est pas complète, mais ne relève pas ce fait. L'institutionnalisation de la stratégie précédente se poursuit alors grâce à la comparaison avec une autre stratégie. Cependant ici c'est le point de vue du vendeur (tâche 1 bis) qui doit être considéré, ce que fait l'enseignante en demandant à un élève son avis. Certains élèves indiquent des stratégies de comptage, dix en dix, vingt en vingt, trente en trente, deux en deux, et ne répondent pas ainsi à la question posée (il est possible que la question posée par l'enseignante soit hors de la portée de ces élèves). L'enseignante guide alors un élève en reformulant sa question relative à la comparaison des types de message.	(inaudible) H : Dis-nous par exemple, vas-y. Par exemple quoi ? Explique-toi. Tu te tais Mathis. Maé : Si on entend… par exemple, si on avait euh, si on comptait les trous, les… H : Les boutons Maé : Les boutons H : Qui manquaient Maé : Oui, et après, si l'autre il avait aussi pas compté et ben (inaudible) H : Oui, d'accord, on va s'arrêter là. Bon, alors, qui peut m'expliquer ce que nous avons fait aujourd'hui ? Est-ce que vous avez appris des nouvelles choses aujourd'hui ? Des élèves : Oui ! H : Euh.., Mathis ? Mathis : On a fait le grand Ziglotron, avec des bandes… H : Alors, quoi avec des bandes ? Explique-moi. Mathis : Des bandes de dix H : Des bandes de dix. Alors, si moi je demandais c'est ça où vous voulez arriver. Si par exemple je demande quarante-cinq jetons c'est la même chose de demander quarante-cinq jetons, c'est la même chose de demander quatre bandes de dix et cinq jetons tout seuls. J'arrive au même résultat, mon Ziglotron il aura tous ses boutons, vous êtes d'accord ? Ou pas d'accord ? ?: D'accord. H : Tu es d'accord, qui n'est pas d'accord avec ça ? Tout le monde est d'accord ? Des élèves : Oui. H : Bon, alors d'après vous qu'est-ce qui ira plus vite ? (à Joanna) : Joanna tu peux te tenir correctement ? Joanna: Compter de dix en dix H : Compter de dix en dix, d'accord, alors ? ?: De vingt en vingt H : Oui vingt en vingt c'est difficile ?: Trente en trente H : Ça après ça ne nous intéresse plus, on n'en a pas besoin ?: Ou sinon deux en deux H : Oui… si on compte de dix en dix Joanna puisque tu nous dis de compter de dix en dix, est-ce que tu crois qu'on va aller plus vite et qu'on va arriver plus vite à sa commande ? Est-ce

		que le marchand ça va être plus facile pour lui ? (à Mathis) Pour le marchand, toi qui étais marchand Mathis, dis-nous, est-ce que ça va plus vite pour toi et est-ce que c'est plus facile de compter de quarante-cinq jetons ou de compter quatre bandes de dix et cinq jetons tout seuls ? Qu'est-ce qui est le plus facile ? Mathis : Le plus facile c'est de prendre des bandes et de les compter H : Oui Mathis : Après ça on… H : Et cinq jetons tout seuls Mathis : Et cinq jetons tout seuls. H : D'accord ? Ok, très bien. Alors, juste Chana et après on arrête. (à ?:) Pendant ce temps tu mets tous tes petits jetons là dedans. Chana : (inaudible) H : Bah oui, des bandes de dix, d'accord, ok, on va s'arrêter là pour aujourd'hui. Il est l'heure on va faire un petit peu de calcul tiens en plus, d'accord ? Alors vous reprenez vos places et je veux, je vais demander à Maé tiens de ramasser les grandes bandes de Ziglotron, tu les mets au bout. Non, chacun, tu ramasses les boîtes si tu veux et tu viens les mettre là, là c'est bloqué. 40'31''

Mme H.
2ème Séance (48'51) Cap Maths « Grand Ziglotron »

Janvier/février 2009

<table>
<tr><th colspan="2">Lancement 0'- 9'25</th></tr>
<tr><th colspan="2">1er épisode : Rappel de la séance précédente</th></tr>
<tr>
<td><u>Descriptif épisode</u> :
L'enseignante interroge les élèves sur la séance précédente.
<u>Contenu</u> :
Différentes explications de l'échec à la tâche 1 sont données. Les élèves l'imputent à un mauvais comptage (oubli dans l'énumération) ou un oubli du message. L'enseignante récupère et enrichit en appuyant sur le fait que l'écriture est un moyen de ne pas oublier.
<u>Puis, elle</u> indique un élément nouveau de la nouvelle tâche : écrire un message.</td>
<td>00'
H : ..La dernière fois nous avons joué au grand Ziglotron, d'accord ? Alors, je vais demander à…, qui est-ce qui peut m'expliquer ? (H affiche un ziglotron agrandi au format A3 et des bandes et carrés seuls eux aussi agrandis)
Des élèves: Moi !
H : Euh.., allez, Chana ?
Chana : Dans le grand Ziglotron il y avait un marchand qui donnait des petits boutons une bande de dix ou des petits jetons…
H : Alors, il y avait deux possibilités, enfin on avait trois possibilités moi j'en ai vu faire qu'une, d'accord, soit des bandes de ?
Des élèves: Dix !
H : Il y en a combien dedans ?
Des élèves: Dix !
H : Soit …
?: Un tout seul
H : Soit un tout seul
Chana : En premier il fallait compter et écrire sur l'ardoise
H : Ah bon ? On a fait ça ?
?: Non, mais on pouvait
H : Non, qu'est-ce qui s'est passé justement ? Qu'est-ce qui s'est passé ? (H consulte le guide de l'enseignant) Chut ! (à Djibril) J'ai pas fini de poser ma question, alors assieds-toi et tiens-toi correctement. Non, on pouvait mais est-ce que vous l'avez fait vous d'écrire sur quelque chose ? Sur l'ardoise ou sur un morceau de papier ?
Des élèves : Non
H : Et qu'est-ce qui s'est passé pour certains ?
Charlotte: Ils ont pas réussi
H : Il faut lever la main pour prendre la parole. Charlotte ?</td>
</tr>
</table>

	Charlotte : Ils ont pas réussi y en a des qui ont réussi H : Alors, réexplique-moi ça, ça veut dire quoi tout ça ? Charlotte : Ça veut dire que ils ont mal compté ou peut-être si il y en avait plus ça veut dire qu'ils ont compté deux fois les mêmes ou trois fois, et si il y en a moins ça veut dire qu'ils en ont oublié. H : D'accord alors on a dit que peut-être ils ont mal compté mais peut-être aussi que certains ne se souvenaient plus de ce qu'ils devaient demander. Alors qu'est-ce qu'on avait dit ? Pour se souvenir qu'est-ce qu'on faisait ? Qu'est-ce qui serait bien de faire ? Maé: On pouvait écrire (inaudible) comme on avait fait la dernière fois sur l'ardoise H : Ah quand on avait fait une fois Maé: Sur l'ardoise ?: Soit sur un petit papier
2ème épisode : indication de la nouvelle tâche	
Descriptif épisode : L'enseignante donne différents éléments de la tâche 2. Contenu : L'enseignante focalise sa présentation de la tâche sur la nouveauté que consiste le message écrit. Il s'agit en premier d'obtenir une désignation parlée en français qui doit être notée par une écriture chiffrée pour ne pas oublier (connaissance ancienne). Des éléments de stratégie sont donnés : le comptage pour obtenir la désignation parlée en France. La deuxième partie du message, en référence aux deux conditionnements des boutons, est indiquée grâce à des exemples de messages oraux mettant en jeu des bandes et des jetons, comme pour la séance 1. Cette deuxième partie va faire double emploi pour la fonction mémorielle (ce qui n'est pas annoncé ainsi).	2'09 H : D'accord, voilà, eh bien moi c'est ce que je vais vous proposer aujourd'hui, c'est-à-dire qu'aujourd'hui je vais vous donner un morceau de papier *(H montre un morceau de papier blanc)* par équipe de deux, il va y avoir des marchands et vous allez devoir écrire votre message, d'accord ? Alors attention deux choses : d'une part vous allez écrire le nombre de jetons qui manquent, d'accord ? Et vous allez devoir écrire ce que vous voulez que le marchand vous donne. Je m'explique *(montre au tableau)* : si par exemple, je ne prends pas ce Ziglotron là, j'en prends un autre, comme ça pour euh ... sur mon ... , alors je ne compte pas là, c'est trop long trop compliqué, sur mon Ziglotron il me manque par exemple douze boutons, et bien je vais écrire douze (*elle écrit « 12 » sur un papier et l'affiche au tableau*) et je vais entourer le douze, comme ça je sais que c'est douze boutons qui manquent, et ici je vais écrire le message, je vais dire au vendeur ce que je veux. Donc je ne le fais pas parce que je veux voir ce que vous vous allez écrire. Vous allez dire « il me faut » par exemple « une bande et des jetons », ou bien « deux bandes et trois jetons », ou bien « quatre bandes et cinq jetons », d'accord ? 3'36 ?: Mais comment on va faire si on sait pas écrire une bande de dix ? H : Est-ce que tu peux dessiner si tu ne sais pas écrire ? ?: Oui H : Oui, tu peux dessiner, d'accord ? La bande comment tu vas la dessiner la

Un élève pose une question car il ne sait pas comment écrire cette deuxième partie de message (ils apprennent à écrire durant cette année de CP). Ce qui crée un **incident.** L'enseignante répond à l'élève en donnant la solution : dessiner ce qui est dit. La tâche est donc changée par rapport à celle prescrite dans le manuel. Il s'agit de traduire graphiquement par un dessin (GraC) une phrase du type « quatre bandes et cinq jetons ». Le type de représentation indiqué pour les groupements de dix comporte la trace des dix boutons sur les bandes, ce qui permet un comptage un à un. Ce changement n'avait pas été anticipé par l'enseignante qui n'a pas photocopié le bon de commande à remplir prévu par le manuel (il était prévu des papiers blancs sur lesquels doivent être écrits les messages). L'enseignante continue ensuite à indiquer la tâche. Des élèves demandent à intervenir de temps à autre et l'enseignante leur donne la parole. Pour la variable didactique concernant les neuf boutons, l'enseignante aide les élèves en leur indiquant ce à quoi cela oblige : demander des bandes. L'aide est indiquée sans argumentation. Le fait d'indiquer de ne pas parler au vendeur est relié au fait que la deuxième partie du message lui est destinée. En conséquence la première partie du message n'est plus utilisée comme une aide pour	bande ? Un élève: Un rectangle avec des ronds H : Voilà, un rectangle avec des ronds, d'accord. Et les jetons, comment tu vas les dessiner ? ?: Un carré avec un rond dedans H : Par exemple, d'accord ? Par exemple 3'58 H : Alors attention, aujourd'hui il y a une contrainte supplémentaire. Vous savez que quand je donne plusieurs fois les jeux, quand on travaille plusieurs fois sur les mêmes jeux, eh bien je complique au fur et à mesure en donnant des contraintes supplémentaires. C'est ce qui va se passer aujourd'hui : eh bien les marchands n'auront pas le droit de vous donner plus de neuf jetons tout seuls. Des élèves : Quoi ? Neuf ! H : Pas plus de neuf. Si j'en ai besoin de plus de neuf, qu'est-ce que je vais devoir faire ? Mathis : Des bandes. H : Merci Mathis, il faudra que je demande des bandes, d'accord ? Donc à vous de vous débrouiller. Attention une autre chose, pas le droit de parler au vendeur, pas le droit de dire « tiens vendeur je veux » par exemple « trois bandes et deux jetons », non, non ! Vous devez écrire sur votre message ce que vous avez besoin. *(Montrant au tableau)* Et le vendeur ne vous donnera pas par exemple douze jetons, il vous donnera ce que vous avez écrit, le douze c'est pour moi pour vérifier ce que vous avez demandé, pour vérifier si vous avez bien compté le bon nombre de jetons. Parce qu'on avait dit ce qui était important déjà c'était de bien compter ce qu'on avait besoin, après là on s'est dit la dernière fois avec la séance de la dernière fois on s'est dit qu'il fallait écrire donc on va écrire. Donc on écrit le nombre de jetons et on écrit ce qu'on demande, d'accord ? Alexandre, tu as une question ? Alexandre : Oui, est-ce qu'on a juste le droit de dire au marchand « tenez vendeur voilà ma commande » ? H : Oh oui, ça tu as le droit « tenez vendeur je vous donne mon bon de commande », oui, ça tu as le droit, tout à fait. Mais tu n'as pas le droit de lui dire ce que tu

<table>
<tr><td>réaliser la sous-tâche consistant à se rappeler du message, mais est destinée à informer l’enseignante.</td><td>veux. D’accord ?</td></tr>
<tr><td colspan="2">3ème épisode : reprise de l’explication de la tâche avec les élèves</td></tr>
<tr><td><u>Descriptif épisode</u> :
Reprise de l’explication de la tâche avec les élèves : un incident survient.

<u>Contenu</u> :
Un élève apporte une réponse incomplète, portant à confusion sur la forme du message, créant un incident. L’enseignante récupère et enrichit en apportant une précision. L’emploi de « quarante comme ça » peut indiquer que certains élèves conçoivent, comme dans la première séance, leur tâche plus comme un choix de conditionnement que réellement la désignation d’une quantité, ce que l’enseignante tente d’indiquer dans sa reformulation. Ces échanges restent oraux, le passage à l’écrit n’est pas évoqué : l’écrit semble être une « simple » traduction de l’oral (écrire ce qu’on dit).</td><td>5’37
Je voudrais que quelqu’un me réexplique tout ça (Clara, Maé, Joanna lèvent le doigt). Maé, et Joanna l’aide si jamais Maé est en difficulté. Je t’écoute.
Maé : (inaudible)
H : Ecoutez-bien là, attends, attends, il y en a qui n’écoutent pas, position d’écoute pour tout le monde, merci.
Maé : Dans le Ziglotron, on compte sur le ziglotron les carrés qu’on a et après on passe la commande au marchand et si j’en voulais quarante et ben je demande par exemple comme je peux pas prendre ceux-là eh ben je pourrais demander quarante comme ça (en montrant les bandes de dix)
H : Alors quand elle dit elle peut pas prendre ceux-là elle me montrait des petits jetons isolés, elle ne peut pas prendre plus de ?
Des élèves : Neuf
H : Neuf jetons isolés, donc elle sera obligée de demander des bandes.
Maé : Est-ce que nous on a le droit de bien recompter ?
H : Ah oui, par contre lorsque le vendeur t’apporte, tu vérifies, arrivée à ta place, tu viens à ta place, et avec la personne avec qui tu travailles tu vérifies que le vendeur t’a bien donné la bonne quantité. Ça c’est un bon réflexe parce que le vendeur peut se tromper, ça arrive, et oui, ça arrive.
Maé : Et on peut compter chez le vendeur aussi ?
H : Tu peux compter chez le vendeur mais le vendeur va peut-être avoir beaucoup de travail. D’accord ?
Maé : Moi je préfère compter chez le vendeur.
H : Tu préfères compter chez le vendeur ? Si tu n’es pas marchande, d’accord ?</td></tr>
<tr><td colspan="2">4ème épisode : installation matérielle</td></tr>
<tr><td><u>Descriptif épisode</u> :
Installation matérielle des vendeurs et des clients, distribution du</td><td>6’58
Alors je vais vous distribuer les Ziglotrons. Hum, Maé, veux-tu distribuer ?
Maé : Oui (se lève).</td></tr>
</table>

	matériel. Contenu : L'enseignante choisit les groupes au fur et à mesure, sans se référer à une préparation antérieure. Elle indique dans un entretien post-séance avoir choisi des « bons compteurs » comme vendeurs. Pourtant ici, *a priori*, ceux-ci n'auront à compter que jusqu'à neuf. De plus de « bons » élèves pourront avoir la tentation de lire l'écriture chiffrée et de l'interpréter au lieu de donner ce qui leur est demandé dans le message.	H : Une feuille comme ça par ... , à chaque fois que je dépose des Ziglotrons. Je vais demander à Anaëlle… Maé : J'en mets une à chaque table ? H : Non, une à chaque fois que je dépose un Ziglotron. Anaëlle, tu vas nous faire le vendeur ici ?: Moi aussi ! H : Non, non, c'est moi qui décide c'est pas vous, d'accord, vous savez très bien que ça marche comme ça à chaque fois. *(Se déplace et distribue)* Donc Anaëlle est vendeur ici, hum, Jihan tu as été vendeur la dernière fois ? ?: Oui elle a été vendeur. H : Jihan tu viens travailler avec Anaïs-Ludivine, et Dounia, avec Lisa-Joyce, et Dounia tu vas être vendeur là-bas. Tiens, tu prends ça. (à ?) Non, mets-toi sur la petite table. Maé elle va être vendeur aussi. Chut, chut, (à ?) toi tu es là ! Vous pouvez commencer à travailler. Mathis, non, vous deux vous travaillez ensemble, Alexandre, ….chut, chut. (à ?) Alors toi t'es vendeur et Anita tu viens travailler avec…, tu vas avec Sabrina (brouhaha inaudible) H : Stop, stop *(claque dans ses mains)*. Chut, on va écouter deux minutes. Mademoiselle Charlotte, Charlotte : alors déjà c'est un travail où on est à deux, on ne le fait pas tout seul, on demande à son co-équipier s'il est d'accord : « est-ce que je peux faire ça ? Est-ce que tu es d'accord ? », d'accord ? Vous vous mettez d'accord à deux et je ne veux pas… Non c'est Anita qui vient avec et toi tu es vendeur. Et je ne veux plus vous entendre parler, vous chuchotez. H (à Gabriel) : Tiens tu va nous faire le vendeur, ben tiens à ta place. 9'25

<table>
<tr><th colspan="3">Réalisation de la tâche des élèves 9’25- 20’40</th></tr>
<tr><th colspan="3">Episode 1 : rappel auprès de certains groupes de certaines « règles du jeu »</th></tr>
<tr><td></td><td><u>Descriptif épisode</u> :
Des règles sont rappelées auprès de certains groupes (diffusion non publique).
<u>Contenu</u> :
En constatant que la fonction du message n’est pas comprise, tant du côté de certains vendeurs que de certains clients, l’enseignante reprécise la tâche sans donner de stratégies.</td><td>9’25
H à ?) : Tu la laisses faire dès que tu vois si tu es d’accord avec elle ou pas. Tu recomptes, recomptez. (pas de dialogue pendant 22 secondes puis H se déplace vers ?)
H : (à ?) Alors, est-ce que ça c’est un message correct ? Eh non, là trente-quatre c’est ce que tu as besoin, d’accord, je t’ai dit qu’il fallait dire ce que tu voulais comme bandes et comme jetons donc ça ne va pas. Les marchands ! Si vous avez des messages qui vous arrivent et qui sont incorrects vous dites « non, je ne peux pas répondre à ce message-là, il est incorrect », d’accord ?
(inaudible). (deux élèves viennent voir H) : (à ?) ça c’est la quantité de jetons dont tu as besoin ? Alors qu’est-ce que j’ai dit qu’il fallait faire ? Qu’est-ce qu’il faut faire déjà ? Regarde au tableau. Qu’est-ce qu’il faut faire ? Regarde le douze qu’est-ce qu’il a ?
?: Il a un rond
H : Il est entouré, c’est pas un rond il est entouré. Dites ce que vous voulez comme message là ça ne va pas c’est pas un message ça.
(H va voir un autre groupe) (inaudible)
Alors, attends, attends, attends ! Qu’est-ce qu’il y a comme message ?
Maé: (inaudible)
H : Trente-quatre, et ici, ici ça veut dire quoi ? Non, non, non, une bande, une bande.
Djibril : (inaudible)
H : Trente bandes ? Trente-quatre quoi ?
Djibril : (inaudible)
H : Oui mais toi tu as dessiné une bande, elle te donne une bande. Alors qu’est-ce qu’il faut que tu dessines ? Est-ce qu’il est bon ton message ? J’ai rien dit hein, après je vous revoie plus, vous vous débrouillez</td></tr>
<tr><th colspan="3">Episode 2 : aide en direction de la classe sur la stratégie de comptage un à un (énumération)</th></tr>
<tr><td></td><td><u>Descriptif épisode</u> :
Aide en direction de la classe sur la stratégie de comptage un à un (énumération).
<u>Contenu</u> :
L’enseignante anticipe la</td><td>13’02
H : (H va voir un autre groupe puis retourne au tableau) Alors, chut, chut, stop, on arrête deux minutes. On arrête deux minutes, je peux avoir le silence ? Chana s’il te plait tu me déranges, assieds-toi j’ai demandé le silence, tu arrêtes. Lisa-Joyce et Jihan je vous attends deux minutes. Alors je te dis de te taire, tu te tais, comme celui-là qui parle à côté de moi. Charlotte une fois, je ne vais pas répéter dix fois quand même !
Euh, Joanna vient de me dire quelque chose, est-ce que tu peux répéter Joanna parce que je pense que ça va être utile pour plusieurs élèves qui se sont trompés.</td></tr>
</table>

	difficulté de comptage un à un en donnant une aide sur l'énumération en rendant publique la procédure d'un groupe. Elle diffuse alors de fait une stratégie qui apparaît comme la stratégie à adopter.	Joanna : Pour s'aider… H : Pour s'aider à faire quoi Joanna ? Joanna : Pour savoir combien il nous en faut et faire des petits traits sur des carrés, c'était notre idée H : Voilà. Donc Joanna, ce qu'elle a fait, pour pouvoir s'aider elle compte un : elle fait un, deux, trois, quatre, comme ça elle ne compte pas, pourquoi ? Ça va t'aider pour faire quoi ? Joanna : Pour pas recompter les mêmes. H : Pour pas recompter les mêmes, ça c'est une très bonne technique. Qui a utilisé cette technique-là ? ?: Moi j'y ai pensé mais je l'ai pas fait. H : Non mais des fois on en a pas forcément besoin écoute, on n'a pas forcément besoin ?: Nous on a fait des points. H : Toi tu as fait des points d'accord, ou des petits traits, ça peut être des points, un petit repère. Vous avez le droit, tout à fait, d'accord, alors vous travaillez dans le silence, c'est reparti, pensez à bien écrire votre message.
Episode 3 : indication en direction de la classe de la non présence de phase de validation		
	<u>Descriptif épisode</u> : Indication en direction de la classe (diffusion publique) de la non présence de phase de validation <u>Contenu</u> : La sous-tâche de validation n'a pas été indiquée par l'enseignante (elle suit ainsi les prescriptions du manuel), mais les élèves l'envisagent : elle a été présente dans les autres séances ziglotron.	14'40 *(H va voir un groupe)* (inaudible) Quoi, et pourquoi elle aurait pas le droit ? Pourquoi elle n'aurait pas le droit ? Pourquoi elle a pas le droit ? Combien tu penses qu'il y a besoin qu'on mette de bandes? Laisse la parce que c'est elle qui a raison il parait. Réfléchis. Attention quand on vous donne n'en découpez pas. (à ?) : T'as pas besoin de ciseaux donc tu peux ranger. *(H va voir un autre groupe puis s'adresse à la classe entière)* Attention on ne coupe pas, pour le moment on garde les bandes telles qu'elles sont. Alors fais voir ton message. Alors tu avais besoin de trente cinq ? ?: Oui H : Attends, touche pas, mais non il y en a pas trente et un il y en a dix, vingt, trente, trois, et où ils sont les deux autres ? (inaudible) *(H retourne au centre)* Alors, chut, chut ! Je dois redonner une consigne supplémentaire : lorsque vous êtes allés chez le marchand, et qu'il vous a donné des bandes, pour le moment on ne découpe pas pour mettre sur le Ziglotron, on vérifiera après parce que je voudrais qu'on mette en commun ce que l'on a trouvé et ce que l'on a fait, d'accord ? Alors, qu'est-ce qu'il y a Chana ? Vous avez tous compris ? On ne découpe pas.
Episode 4 : rappel/indication de règles du jeu concernant la tâche du vendeur		
	<u>Descriptif épisode</u> :	16'28

	L'enseignante rappelle des règles du jeu auprès de certains groupes concernant la tâche du vendeur. <u>Contenu</u> : Deux règles sont en particulier abordées : le fait de ne pas interpréter le message et de ne pas tenir compte de l'écriture chiffrée. Le message comportant deux parties, le vendeur peut faire le lien entre les deux et donc relever la non-cohérence. En outre, l'enseignante veille, comme dans la première séance, à ce que les élèves ne fassent pas deux essais, limitant ainsi les possibles rétroactions du milieu au moment de la livraison de la commande.	H : Euh, pardon Maé. Maé : (*inaudible*) *(H se déplace dans les groupes)* (*inaudible*) H : Combien il faut ? ?: (*inaudible*) H : Dix bandes ? Dix bandes de dix ? OK .... *(H se déplace dans les groupes)* (*inaudible*) H : Est-ce qu'on a le droit de parler au marchand ? ?: Il m'avait demandé trois bandes comme ça, et je lui ai donné trois bandes comme ça et il a dit « erreur ». H : Ah ! Si tu lui demande trois bandes et qu'elle te donne trois bandes va chercher ce qu'elle t'a donné et va chercher ton message. ?: (*inaudible*) H : Non je viens de te le dire. Les paires de ciseaux, vous n'avez pas besoin donc vous rangez ces paires de ciseaux. (à ?) Tu attends on va mettre en commun. Ah bon ! Personne n'est allé voir Gabriel. (à ?) Toi je suis désolée il y a marqué « trois bandes » tu as eu trois bandes. Toi tu as demandé trois bandes tu as eu trois bandes, là le message il correspondait. Si tu penses que tu t'es trompé tu as le droit de te corriger. *(H va voir un autre groupe)* Alors ? Ok. (*inaudible*) Vous vous organisez. ?: Si on n'en a pas assez (*inaudible*) H : Elle doit te donner ce qu'il y a sur ton message, c'est normal, regarde. Ton message, moi je vois ton message qu'est-ce que je fais ? Ceux-là ils sont barrés je te les donne pas ceux-là, tu les as barrés donc je ne te les donne pas. *(H retourne à son bureau)* Là vous aviez combien, il y a quoi ? (*inaudible*) *(H se déplace à nouveau)* Romain, dis donc, c'est pas un travail à deux Romain ? C'est un travail à deux. Là je suis désolée, pourquoi tu lui donne ça ? ?: Tu as dit dessiné. H : Eh bien tu lui donnes rien, tu n'as pas le droit. On a dit dessiné. Vous n'avez plus que dix secondes. (à ?) Tu lui as demandé quoi ? Tu lui as demandé deux bandes et tu as demandé combien ? Trois tout seuls ? Bon alors et là tu as demandé deux bandes et trois tout seuls ? Ils sont où les trois tout seuls ? (*inaudible*) 20'40

Mise en commun 20’40 - 48’51

Cette phase est dirigée par l’enseignante. Les échanges sont publics.

1er épisode : la fiche n°38

L’écriture chiffrée « 28 » est inscrite en haut du tableau. Durant toute la phase, les deuxièmes parties de message sont mises en parallèle avec cette écriture, qui est toujours mentionnée comme « vingt-huit ». L’enseignante mène la séance en posant des questions aux élèves et en permettant à ceux qui le demandent d’intervenir.

1.1 Descriptif épisode : Validation du nombre de boutons commandés pour la fiche ziglotron n°38. L’écriture chiffrée « 28 » est inscrite en haut du tableau. Contenu : La validation est une évaluation (l’enseignante apporte un jugement sans appel sur la validité des réponses des élèves). L’enseignante s’informe sur la validité des réponses des élèves ayant la fiche 38.	20’40 *(H retourne au tableau)* Ok on va arrêter on va regarder ce que vous avez fait. Il y a beaucoup, beaucoup d’erreurs, sans compter les erreurs de dénombrement. (à Anaëlle) Alors, Mademoiselle, tu retournes à ta place parce que tu verras mieux. Dounia tu peux te mettre à la place d’Alexis ? C’est bon ? Ok. Alors, on va regarder : ici j’ai le Ziglotron numéro trente-huit. Le Ziglotron numéro trente-huit qui est-ce qui l’a ? Vous ? Qui est-ce qui a le numéro trente-huit ? Combien vous avez dénombré de jetons ? ?: Huit H : Huit ? ?: Vingt-huit H : Vingt-huit. Et le groupe de Sabrina est-ce que vous êtes d’accord ? (à ?) Tu peux te tenir correctement s’il te plait ? (à ?) Est-ce que tu en as dénombré vingt-huit ? Est-ce que vous avez bien écrit vingt-huit et vous avez entouré vingt-huit ? Est-ce que vous avez bien fait ça déjà ? Pour tous ceux qui avaient le numéro trente-huit ? Ok, déjà ça c’est bien (*elle écrit « 28 » au tableau*).
1.2 Cas d’Axel Descriptif épisode : Traitement du message 1. Contenu : Précédemment, il a été validé que vingt-huit boutons manquaient (encore écrit au tableau par « 28 »). Le message 1 que reproduit l’enseignante au tableau est considéré par un élève comme	21’52 H : Maintenant on va demander ce que vous avez demandé. Alors, euh, Anita, tu as demandé quoi ? Anita : Ben j’avais pas fini. H : T’avais pas fini ? Peut-être que tu pourras nous aider après. Hum, Axel vous avez demandé quoi ? Axel : (inaudible) H : Moi je regarde le message d’Axel, alors je vais vous le faire *(elle le reproduit au tableau en plus grand. Il s’agit du message 1 : deux bandes dessinées en parallèle à la verticale sur lesquelles les dix carrés sont représentés et à côté trois carrés figurant des boutons isolés)* parce que

exact, alors qu'il n'indique pas vingt-huit boutons, ce qui crée un **incident.** L'enseignante relance, puis change d'intervenant puis guide. Du fait que les élèves n'arrivent pas à argumenter, l'enseignante va les guider. Il s'agit de voir si le message 1 (production graphique de type 1) et « vingt-huit » (qui est noté par 28) indiquent la même quantité de boutons. Les désignations orales des groupements utilisés (... bandes et ... tout seuls) sont des descriptions des productions graphiques de type 1. L'explication donnée consiste à effectuer un passage de la production graphique 1 vers la désignation parlée en France correspondante, via une désignation orale des groupements : une des stratégies GC vers OF via OG. Il s'agit plus précisément de retrouver la désignation parlée en France en comptant oralement les groupements (dix, vingt, trente) puis de faire de même avec les boutons isolés. La désignation finale peut être obtenue par un procédé algorithmique en accolant	c'est… quand je fais ça c'est une bande hein, donc Axel il a, Axel et Riyad ils ont, combien de bandes ? Des élèves : Deux. H : Deux bandes, voilà. Qu'est-ce qu'il va demander Axel ? ?: Deux bandes de dix H : Deux bandes de dix ?: Et trois petits tout seuls. H : Et trois petits tout seuls. D'après vous, est-ce que c'est bon ? ?: Oui H : Tu penses que ça lui fait les vingt-huit jetons ? Alexandre s'il te plait tu peux te tenir correctement ? Tu verras ça après c'est plus le moment maintenant. ?: Ça fait dix sept. H : Là, deux bandes de dix. Arrête de répéter (inaudible) ?: Vingt-trois H : Alors on laisse parler Joanna. Joanna, deux bandes de dix et trois tout seuls ça fait combien ? Joanna: Dix-sept H : Est-ce que vous êtes d'accord avec dix-sept ? Des élèves : Non ! C'est vingt-trois ! H : Qui est d'accord avec dix-sept ? (à ?) Et bien toi tu as dis dix sept, tu es d'accord avec dix-sept ? Alors on va se rappeler comment on compte de dix en dix ok ? On y va ? Si c'est une bande ça fait : dix, deux bandes vingt *(montrant à chaque fois le deux mians)* Les élèves : Vingt, trente, quarante, cinquante, soixante, soixante-dix, quatre-vingts, quatre-vingt-dix, cent (*chaque nom prononcé est accompagné d'un geste consistant à monter les deux mains*) H : Ok, stop. Je compte : si j'ai une bande ça fait ? ?: Dix H : Deux bandes ça fait ? Des élèves : Vingt H : Trois bandes ça fait ?

les deux désignations obtenues : ici l’enseignante indique une interprétation arithmétique additive (« *Donc en tout j’en ai combien ?* »). Cette stratégie n’est pas comprise de tous les élèves au vu du silence qui suit cette question. A noter en outre qu’il est possible que la suite des dizaines soit comprise par au moins un élève comme une « autre » comptine numérique (aspect ordinal sans repérant) pour compter les objets, mais pas forcément réservée aux dizaines : ceci peut être inféré du fait que les trois boutons restants sont nommés « *trente* » par un élève, remarque qui est ignorée par l’enseignante. La fin de l’incident montre que soit l’explication n’a pas convaincu l’élève, soit que les questions posées ne sont pas comprises : il est possible par exemple que l’élève se rapporte à une validation matérielle, ce sur quoi l’enseignante le renvoie.	Des élèves : Quarante H : Trois bandes, ça fait ? Des élèves : trente ! H : Quatre bandes ça fait ? Des élèves : Quarante H : Cinq bandes ça fait ? Des élèves : Cinquante H : Six bandes ? Des élèves : Soixante *(H lève au fur à mesure les doigts sans parler)* Les élèves : Soixante-dix, quatre-vingts, quatre-vingt-dix, cent. H : Ok, donc je compte maintenant *(elle montre les bandes dessinées sur le tableau sur tableau)* : ça fait, une bande ça fait ? Axel: Dix H : Deux bandes ça fait ? Axel: Vingt H : Vingt (*elle fait une accolade englobant les deux bandes et écrit « 20 » au tableau*). Donc là j’ai vingt, et là j’ai ? (*elle montre les trois carrés isolés qu’elle a dessinés au tableau*). ?: Trente H : Trente ? ?: Non ! ?: Trois ! H : Mais, Clara ! Comme d’habitude si tu veux parler tu lèves la main, ok ? Là je suis avec Axel et Riyad. Riyad, là ça veut dire combien de jetons ? Riyad : Trois H : Trois ? Donc ça fait vingt, et là j’en ai ? Riyad : Trois H : Donc en tout j’en ai combien ? Riyad : (*silence*) H : Axel j’en ai combien en tout ? Axel : Vingt-trois

<table>
<tr><td></td><td>H : Vingt-trois. Est-ce qu'elle t'a donné ce que tu avais demandé ?
Axel : Non.
H : Si. Je suis désolée, tu avais mis deux bandes et trois tout seuls. Tu as bien eu deux bandes et trois tout seuls. Est-ce qu'elle t'a donné ce que tu avais demandé ?
Axel : Oui
H : Est-ce que tu avais demandé le bon message ?
Axel : Oui
H : Vous aviez demandé ce qu'il fallait ?
(à Axel) Est-ce que tu en as assez là ? Ben tu les découpes et tu les places et tu me diras si tu en as assez.</td></tr>
<tr><td>1.3
<u>Descriptif épisode</u> :
Traitement du message 2.
<u>Contenu</u> :
Précédemment, il a été validé que vingt-huit boutons manquaient (encore écrit au tableau par « 28 »). L'enseignante anticipe le fait que l'obtention de trente boutons puisse être considérée comme une réussite. Elle redonne alors un élément de la tâche qu'elle n'avait pas indiqué ici (alors que c'était le cas dans la séance précédente) : il fallait obtenir juste ce qu'il faut de boutons. Elle reformule la question à un élève ce qui met en jeu la comparaison entre les nombres désignés par vingt-huit et trente. Aucune justification n'est avancée sur le résultat de cette comparaison (connaissance ancienne) qui est</td><td>25'02
H : (au groupe derrière Axel et Riyad) Vous, qu'est-ce que vous avez demandé ? Si je vois votre message, je vois trois bandes. (H dessine au tableau le message 2 : trois bandes dessinées en parallèle à la verticale sur lesquelles les dix carrés sont représentés) Une bande, deux bandes, trois bandes, d'accord ? C'est ce que vous vouliez ? Et c'est pas ce que vous avez eu.
(à ?) Tu as commencé à découper ? Oui, bon ça fait partie des bandes ? D'accord.
Est-ce que vous avez eu ce que vous aviez demandé ?
?: Non
H : si, tu as demandé trois bandes, tu as eu trois bandes. Tu as bien eu ce que tu as demandé. Est-ce que tu as demandé ce qu'il fallait ? Est-ce que vous avez demandé ce qu'il fallait ? (à la classe) D'après vous, est-ce que vous pouvez les aider ?
Chana : Ça fait trente
H : Là ? Trois bandes, Chana tu me dis ça fait ?
Chana : Trente
H : Ça fait trente (elle écrit « 30 » au tableau).
Tu devrais écouter Clara, je pense que ça pourrait t'intéresser.
Ça fait trente, et on a dit qu'il en fallait combien ?
?: Vingt-huit
?: Trente
H : Vingt-huit. Alors peut-être qu'il y a un petit élément qu'on a oublié de rappeler
?: Il faut (inaudible)
H : Eh oui. Là elle en a trop mais peut-être que j'ai oublié de vous rappeler tout à l'heure,</td></tr>
</table>

	évaluée positivement : cependant par la suite l'enseignante demande une validation par superposition.	on a oublié de se le rappeler quand on s'est dit ce qu'on avait fait la dernière fois : il fallait juste ce qu'il fallait, en un seul voyage aller chercher juste ce qu'il faut, pas plus, pas moins, juste ce qu'il faut. (à ?) Est-ce que tu as juste ce qu'il faut ? Les filles vous avez juste ce qu'il vous faut ? ?: Non H : Vous en avez comment ? ?: On a plus. H : D'accord. Vous les découpez et vous les mettez dessus pour vérifier.
	1.4 Descriptif épisode : L'enseignante fournit une réponse correcte pour la deuxième partie du message : le message 3 qui est obtenu en complétant le message 1. Contenu : Précédemment, il a été validé que vingt-huit boutons manquaient (encore écrit au tableau par « 28 »). L'enseignante n'a pas obtenu de réponse satisfaisante en interrogeant un élève, ce qui génère un **incident**. L'enseignante relance en indiquant l'erreur, puis change d'intervenant puis récupère et enrichit. Le message obtenu est décrit oralement par un élève (OG) : « *Deux bandes de dix et huit tout seuls* », formulation reprise par l'enseignante pour la lier à la désignation parlée en France. Il est transcrit en une production graphique de type 1 par l'enseignante et validé. Elle va	26'30 (à ?) Est-ce que toi tu es capable de me refaire le message maintenant ? ?: Oui. H : Alors qu'est-ce que tu demanderais comme message ? ?: Ben je demanderais dix et trois tout seuls. H : Tu demanderais dix et trois tout seuls ? *(H montre au tableau)* C'est ça ? Ben on a dit que ça faisait vingt trois. (silence) H : On en a besoin de vingt-huit, Sabrina tu sais toi ? Sabrina : (inaudible) et huit tout seuls. H : Et huit tout seuls ? Mathis, tu demanderais quoi ? Mathis : Si j'avais .. H : Si tu avais dû demander ce message-là, tu ferais quoi ? Mathis : Vingt, et huit tout seuls H : Alors vingt tu le demandes comment vingt ? Mathis : Deux bandes de dix H : Deux bandes de dix Mathis : Et huit tout seuls H : D'accord (elle *rajoute cinq carrés aux trois déjà dessinés, obtenant ainsi le message 3*). Est-ce que vous êtes d'accord les autres ? Des élèves : Oui H : Deux, quatre, six, huit (*avec gestes pour compter les huit carrés*). Deux bandes de dix et huit tout seuls. Donc là j'ai dix plus dix ça fait combien ? Des élèves : Vingt H : Vingt (*elle écrit « 20 » au tableau sous les deux bandes*). Et là j'en ai ?

	ensuite argumenter par une stratégie de type GC (de type 1) vers OF via OG. Ici elle utilise une interprétation arithmétique additive de la numération parlée en France, l'appui additif vingt étant obtenu comme somme de dix et dix (les groupements sont dessinés au tableau), et la désignation vingt-huit étant obtenue comme vingt plus huit. L'écriture « *20+8=28* » traduit à l'écrit ce procédé (vingt s'écrit 20, huit s'écrit 8, vingt-huit s'écrit 28), sans qu'il y ait d'analyse des écritures chiffrées. L'enseignante change de groupe, en récupérant une remarque d'un élève sur un autre.	?: Six H : J'en ai combien ? Des élèves : Huit H : Huit *(elle écrit « 8 » au tableau sous les huit carrés)*. Et en tout j'en ai ? Des élèves : Vingt-huit H : Vingt-huit. D'accord ? Donc j'en ai bien vingt plus huit est égal à vingt-huit (*elle écrit en même temps « 20+8=28* »). D'accord ? Vous écrivez votre prénom. Ecrivez votre prénom sur les messages. ?: Maé c'est toi qui t'es trompée H : Non, non ! Ce n'est pas Maé qui s'est trompée c'est toi qui n'a pas donné le bon message. Maé elle ne s'est pas trompée. Maé tu veux rajouter quelque chose ? Tu veux rajouter quelque chose ? Chut ! Tu veux écouter Maé qui parle? Maé : Mathis il avait… H : Charlotte ! Maé : Il avait fait deux commandes c'est-à-dire qu'il m'avait demandé trois bandes. H : Oui alors après il s'est repris.
2ème épisode : validation concernant la fiche n°39		
	2.1 <u>Descriptif épisode</u> : Validation du nombre de boutons commandés pour la fiche ziglotron n°39. <u>Contenu</u> : La validation est une évaluation (l'enseignante apporte un jugement sans appel sur la validité des réponses des élèves). L'enseignante s'informe sur la validité des réponses des élèves ayant la fiche 39.	28'26 H : Ben justement on va s'occuper de Mathis. Alors Mathis tu as quel numéro ? Mathis : (inaudible) H : Tu as le numéro trente-neuf. Trente-neuf. Qui a le numéro trente-neuf ? Vous, vous, ok. Dans le Ziglotron trente-neuf, vous non, dans le Ziglotron trente-neuf. Nabi, euh, Nabi, euh Riyad, s'il te plait. Dans le numéro trente-neuf, combien il fallait ? Qu'est-ce que vous avez écrit ici et entouré ? Mathis, tu as écrit quoi ? Mathis : Trente-quatre H : Trente-quatre (*elle efface le tableau puis y écrit « 34 » en haut*). Est-ce que…, qui est-ce qui a eu le même ? (à Joanna) Est-ce que tu es d'accord ?

		Joanna : Oui (à ?) Est-ce que tu es d'accord, trente-quatre? ?: Oui H : D'accord, donc déjà trente-quatre. Déjà, on a bien compté, on est d'accord.
	2.2 Descriptif épisode : Début de l'étude du message 4. qui est interrompue par un incident. Contenu : Une description orale du message est demandée par l'enseignante (passage GC vers OG) : « *trois bandes de dix et quatre jetons tout seuls* ». Cette formulation sera reprise par l'enseignante. Le vendeur Maé n'est pas d'accord sur la validité du message 4, alors qu'il est évalué comme juste par l'enseignante. Ce qui créé un **incident**. Les élèves sont en désaccord mais personne n'a tort. Cet incident va connaître son dénouement ultérieurement dans l'épisode 3.5. L'enseignante demande un approfondissement puis demande à l'élève de faire la tâche évoquée. L'élève ne veut valider le message 4 que s'il vérifie par lui-même. Or, il n'a pas effectué la tâche car il était « vendeur » et non client. Il ne considère pas que la validation du message puisse se faire vis-à-vis de la désignation parlée « trente-quatre » (écrite « 34 » au tableau), et ne peut valider le message qu'en faisant la	29'20 H : Je peux avoir ton message Mathis ? Si je les affiche, vous allez pas les voir ceux-là. (à Joanna) Toi, ah ben toi tu n'as pas fait de message ? Tu n'as pas trouvé ? (à la classe) Alors ici j'ai simplement trente-quatre et j'ai pas de message donc on peut pas vous donner les jetons. Et toi ? Ok. Alors, je vous écris…chut ! (à ?) Toi tu te lèves, et tu vas te mettre derrière le (inaudible) debout, debout, debout, comme ça et tu ne bouges plus, d'accord ? Ok ? Et tu écoutes ce qui se passe parce que je pense que ça pourra te servir. J'ai le message de Mathis et d'Anaïs-Ludivine, je vous le fais, et vous me dites si vous êtes d'accord. *(Silence pendant huit secondes pendant lesquelles, au tableau Mme H. dessine le message 4 : trois bandes dessinées en parallèle à la verticale sur lesquelles les dix carrés sont représentés ainsi que quatre carrés isolés).* Qu'est-ce qu'ils ont demandé Anaëlle? Anaëlle : Trois bandes de dix H : Trois bandes de dix (*elle dessine au tableau trois bandes de dix et quatre carrés isolés en dessous de « 34 »*) Anaëlle : Et quatre jetons tout seuls H : D'accord. Est-ce que tu es d'accord avec ça ? Est-ce que tu penses qu'ils ont en une seule fois juste assez pour remplir leur Ziglotron ? Anaëlle : Oui H : Toi tu penses que oui. Qui est d'accord avec ce message et qui n'est pas d'accord ? Alors on va lever la main ceux qui ne sont pas d'accord. (à Maé) Tu n'es pas d'accord ? Pourquoi ? Explique donc. 30'50 Maé: Parce que on n'était pas d'accord alors que j'avais donné la bonne commande qu'il avait demandé. H : Oui. Alors au départ c'est vrai, tu as raison, Mathis il avait fait ça au départ :

	tâche du client. A noter qu'ici encore le mot « *jeton* » est employé par l'enseignante et l'élève, alors que celui de « *bande* » est préféré à « *bande de dix* ».	Mathis et Anaïs ils avaient fait trois bandes, donc Maé elle a donné trois bandes. Et après Mathis qu'est-ce qui s'est passé ? Il est revenu. Il est revenu en modifiant son message. Alors je l'ai laissé faire mais normalement Mathis tu sais bien que tu n'avais pas le droit c'était en une seule fois. Mais avec ce message-là écrit ici est-ce que tu es d'accord Maé ? Est-ce que tu penses qu'il est bon ce message ? Maé : Euh… Oui parce que là il est pas revenu me demander. H : Ah, il est bon parce qu'il est pas revenu te demander ! D'accord, mais toi, si tu avais besoin de trente-quatre jetons pour remplir ton Ziglotron, est-ce que tu aurais fais ce message-là ? Maé : Bah je pense que (*inaudible*) H : Bon alors toi il te faut trente-quatre jetons. Il te faut trente-quatre jetons, qu'est-ce que tu vas me faire comme message ? Qu'est-ce que tu vas me dire ? Tu as besoin de trente-quatre jetons, qu'est-ce qu'il faut comme message ? Maé : Bah, je demande, je compte dans ma tête au départ (inaudible). Je vérifie d'abord bien chez le marchand pour pas me tromper parce que sinon on n'a pas le droit. H : D'accord. Mais toi, tu demanderais combien de bandes ? Je suis d'accord, ça c'est une bonne technique, tu n'as pas besoin de revenir. Maé : Je sais pas H : Ah, ben voilà c'est ce que je te demande, je te demande de réfléchir. Maé : Parce que là je suis pas marchand. H : Ben tiens, voilà, voilà ton Ziglotron, et fais-le moi le message. Elle est têtue la bougre !
	2.3 <u>Descriptif épisode</u> : Fin de l'étude du message 4, (hors incident). <u>Contenu</u> : L'enseignante s'appuie sur un élève et guide pour valider le message 4. Une stratégie GC vers OF via OG est à nouveau utilisée. Elle indique cette fois-ci	32'45 Euh, Charlotte, que penses-tu de ce message ? Charlotte : Il est bien. H : Il est bien ? Trois bandes ça fait combien de jetons en tout ? Charlotte : Trente H : Trente. D'accord ? Ici on a bien trente (*elle écrit « 30 » sous les trois bandes de dix*), et ici on a ? (*elle montre les quatre carrés isolés*). Charlotte : On a quatre H : Quatre (*elle écrit « 4 » sous les quatre carrés isolés*). Donc, au total, trente et

<table>
<tr><td></td><td>que trois bandes « ça fait trente », sans argumenter à nouveau (les bandes ont été comptées dix, vingt, etc. auparavant). L’écriture chiffrée sert à nouveau de traduction au tableau des désignations parlées en français. L’enseignante tente d’approcher la désignation parlée en français de la quantité à nouveau par une interprétation additive avec repérant. Un incident survient en fin d’épisode : un élève répond à la question « Donc, au total, trente et quatre… » par une réponse erronée « Ça fait vingt-neuf » : l’enseignante gère l’incident en indiquant « Non, recompte ! » et donne la réponse correcte.</td><td>quatre…
?: Ça fait vingt-neuf
H : Non, recompte !
Trente et quatre ça nous fait bien trente-quatre.
Joanna et Baptiste, est-ce que vous êtes d’accord avec ce message maintenant ?
Joanna : Oui
H : D’accord ? Vous ferez attention ? Ok ?</td></tr>
<tr><td colspan="3">3ème épisode : validation concernant la fiche n° 40 et fin de la fiche 38.</td></tr>
<tr><td></td><td>3.1
<u>Descriptif épisode</u> :
Validation du nombre de boutons commandés pour la fiche ziglotron n°40.
<u>Contenu</u> :
La validation est une évaluation (l’enseignante apporte un jugement sans appel sur la validité des réponses des élèves). L’enseignante s’informe sur la validité des réponses des élèves ayant la fiche 40.</td><td>33’25
H : Maintenant je vais faire le Ziglotron numéro quarante. Le Ziglotron numéro quarante il avait besoin de combien de jetons en tout ?
(à Romain/Inès, Clara/Djibril, Chana/Alexandre) Vous, vous, vous et qui d’autre ? Non, c’est le numéro quarante.
Maé compte dans ta tête.
Le numéro quarante, vous aviez besoin de combien de jetons ? (Elle efface le tableau puis lit les messages relevés)) Romain et Inès vous m’avez dit quarante-cinq, Clara et Djibril quarante cinq, et Chana et Alexandre quarante-cinq, tout le monde est d’accord sur quarante-cinq, d’accord ?
(elle écrit « 45 » en haut du tableau)</td></tr>
<tr><td></td><td>3.2
<u>Descriptif épisode</u> :
Etude du message 5.
<u>Contenu</u> :</td><td>33’50
H : Maintenant, euh.., alors j’ai un message qui change ici.
Djibril, j’ai ça et ça. (elle dessine le message 5 au tableau une bande dessinée à la verticale sur laquelle les dix carrés sont représentés et un carré seul)</td></tr>
</table>

	Le message contient uniquement un exemplaire de chaque conditionnement. Il est traité comme les précédents pour l'invalider : GC vers OF via OG. L'interprétation arithmétique additive est toujours convoquée pour la numération parlée en France : dix et un, « *tout ça, ça fait onze* ». L'écriture chiffrée reste la version écrite de cette dernière et permet d'indiquer au tableau ce qui est dit. En particulier « 10 » est associé à une bande et « 1 » à un carré. L'enseignante ne demande pas la source de l'erreur de l'élève. Elle pourrait signifier une non compréhension de la tâche.	Maé: J'en ai trente-quatre en tout H : Alors fais ton message. ?: Ça fait onze. H : Est-ce que vous êtes d'accord avec ça ? Djibril s'il te plait je ne voudrais pas que tu écrives sur ma table, merci. Djibril tu as vu ton message ? Tu as marqué une bande et un tout seul, tu es bien d'accord, c'est bien ce que tu as demandé ? Djibril : Oui (*faiblement*). H : Chana, qu'est-ce que tu nous dis ? Chana : C'est parce que… On fait une bande, une bande de dix ça fait dix, si on rajoute un petit tout seul et ben est égal à onze (*Pendant ce temps Mme H écrit « 10 » sous la bande et « 1 » sous le carré*) H : Tout ça, ça fait onze, est-ce que c'est la bonne quantité ? (*elle écrit « 11 » au tableau*). Des élèves : Non H : Non, d'accord. (à Djibril) Tu essayes de modifier ton message ? Tiens, prends mon rouge, Djibril, prends avec un vert. Modifies ton message en rajoutant avec le vert ce que tu as besoin, tu es d'accord ? Tu n'en as pas assez là. Maé : J'ai fini maîtresse H : Maé je suis avec tes camarades on verra après.
	3.3 Cas de Romain et Inès (1) Descriptif épisode : Etude du message 6. Contenu : L'enseignante essaye avec ce message d'indiquer que la règle consistant à ne pas commander plus de neuf boutons a été enfreinte. Elle ne s'est pas aperçue dans un premier temps qu'il manquait aussi une dizaine, ce qui va créer un peu de confusion. L'écriture chiffrée reste une traduction de l'oral, trente-cinq étant	35'20 Alors j'ai maintenant celui de Romain et de Inès (*elle va le dessiner au tableau au fur et à mesure*). Alors là il m'a mis des numéros : un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, dix. Après j'ai la même chose une autre fois avec les numéros, et ici j'ai un, deux, trois, quatre cinq, six, sept, huit, neuf, dix, onze, douze, treize, quatorze, quinze. Et j'ai un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, dix, onze, douze. Alors on avait un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, dix, et là j'en ai un deux, trois, quatre, cinq. Voilà ce que m'a fait Romain et Inès (*Mme H dessine le message 6 : deux bandes dessinées en parallèle à la verticale sur lesquelles les dix carrés sont représentés et numérotés de 1 à 10 puis quinze carrés seuls en colonne à côté),* est-ce que vous êtes d'accord avec ce message ? Des élèves : Oui. Inès : Non

	traduit « 35 ». L'interprétation reste additive pour l'enseignante. L'élève pour sa part commence par faire un calcul mental (« *deux bandes ça fait vingt et on rajoute dix ça fait trente* »), poursuit par un surcomptage des boutons seuls à partir de trente (« *trente-et-un, trente-deux* ») et finit par un calcul mental (« trente-deux, trente-quatre »).	H : Inès c'est ton message et tu n'es pas d'accord ? Ça veut dire que c'est Romain qui l'a fait tout seul. Pourquoi tu n'es pas d'accord Inès ? Inès: Parce que tout à l'heure et ben Romain lui il avait fait dix et après lui il avait fait encore dix, onze, douze jusqu'en bas et après il a tout effacé et il a dit c'est moi qui le fais donc je l'ai fait et (inaudible) H : D'accord mais ce message-là, pourquoi il ne va pas ce message-là ? Mathis ? Mathis : Parce que il y a quarante-cinq, si on prend deux bandes, ça fait vingt H : Oui Mathis : Et on rajoute dix ?: Non, c'est pas ça ! H : Attends, attends, laisse le finir. Et on rajoute dix.. Mathis : Et ça fait trente, trente et un, trente-deux, trente-quatre H : Et alors ? Mathis : Il y a trente-quatre jetons ?: Trente-cinq H : Non, c'est quarante-cinq qu'il nous faut Mathis : Mais là j'ai compté trente-quatre H : Ah, oui là tu dis qu'il y en a trente-cinq. Oui, je suis d'accord avec toi, déjà là il y en a trente-cinq, et qu'est-ce qui ne va pas en plus de ça ? Déjà ici en tout on a trente-cinq (*elle écrit « 35 » au tableau avec une accolade désignant le message reproduit*) alors que nous on en voulait quarante-cinq, et Charlotte qu'est-ce que tu penses ? Charlotte : Il faudrait qu'il rajoute une bande de dix et que, parce que normalement il fallait pas qu'il dépasse neuf petits jetons tout seuls. H : Voilà ! Je suis tout à fait d'accord avec toi. Il pouvait pas dépasser neuf petits jetons tout seuls. Alors ça, il y en a dix de petits jetons, il aurait pu transformer ça en une bande (*elle entoure dix carrés seuls sur les quinze alignés*), et là on se serait bien aperçu que là est-ce qu'il y avait suffisamment ? Des élèves : Non H : Non. D'accord Romain ? (à Djibril) Tu as fini ? Tu veux corriger ton message ? Donc Romain vous pouvez corriger votre message.
	3.4	38'10

	<u>Descriptif épisode</u> : Etude du message 7. <u>Contenu</u> : Le message est une production graphique de type 2. Il est évalué positivement par l'enseignante (sans fournir d'arguments) et elle le place en premier dans la hiérarchie des messages valides (c'est-à-dire ici devant une production graphique de type 1): « *c'est un message très économique* ». Il est la traduction « mot à mot » des désignations demandées dans la séance 1 de type désignation orale des groupements, « ... bande et ... jetons ». Ces dernières étant auparavant des descriptions des productions graphiques de type 1. A noter que ni l'enseignante, ni les élèves ne font remarquer son lien possible avec l'écriture chiffrée. L'enseignante ne demande pas d'explication aux élèves sur leurs motivations et stratégies les ayant amenés à une telle production.	H : (En effaçant le tableau) Alors là j'ai un autre message, j'ai le message d'Alexandre et Chana : j'ai une bande comme ça.. (à ?) Tu écoutes s'il te plait ? Anaëlle, il y a marqué quatre et j'ai un petit jeton et il y a marqué cinq (*elle dessine le message 7 : une bande dessinée à la verticale sur laquelle les dix carrés sont représentés et à côté de laquelle est écrit le chiffre « 4 », un carré seul à côté duquel est écrit le chiffre « 5 »).* Alors est-ce que tout le monde comprend ce message ? Des élèves : Oui Des élèves : Non Romain: Je peux expliquer ? H : Attends, on va juste écouter Romain et après on explique, Nabil tu nous expliqueras, Charlotte tu as déjà parlé. Romain : Parce que là il a une bande et là il a un jeton. H : Oui mais qu'est-ce qui a marqué là ? Romain : Quatre Nabil : Quatre H : Alors on va écouter Nabil qui a compris le message. Nabil ? Nabil : Quatre bandes et cinq petits. H : Tu comprends là le message ? Et oui, ça c'est un message très économique, c'est pas mal ça, parce que là il écrit une bande, au lieu de dessiner les quatre bandes il aurait pu dessiner les quatre bandes, et bien là il dit « j'en veux quatre donc j'en mets quatre comme ça, et j'en veux cinq comme ça ». Très bien
	3.5 <u>Descriptif épisode</u> : Reprise de l'incident dans l'épisode 2.2. <u>Contenu</u> : Le message produit (production graphique de type 1) est exact. L'enseignante guide sa validation en	39'20 H : Maé ? Maé on t'écoute, qu'est-ce que tu devais faire Maé ? Maé : (*inaudible*) H : Alors, ta commande, combien il t'en faut en tout des jetons ? Alors, ah ben alors oui, je pense que c'est pas mal Maé. Maé il lui faut en tout trente-quatre jetons (*elle efface le tableau puis y écrit* « 34 »), vous allez vérifier vous-mêmes si Maé a bon (*elle dessine le message que Maé vient de produire le*

	utilisant une stratégie GraC vers OF via OG Comme dans l'épisode 1.2, il s'agit d'utiliser le comptage des bandes à l'aide de la comptine dix, vingt, trente, etc., puis de changer de comptine pour les carrés seuls, mettant en jeu une interprétation ordinale avec repérant de la numération parlée en France. L'élève poursuit la comptine des dizaines même quand l'enseignante désigne un carré seul (après trente) créant ainsi un **incident**. L'enseignante aide alors l'élève en lui donnant la réponse qui va l'orienter sur la comptine un, deux, trois. L'élève utilise de la même manière la comptine un, deux, etc., que dix, vingt, trente, etc.	*message 8, trois bandes dessinées en parallèle à la verticale sur lesquelles les dix carrés sont représentés et quatre carrés isolés*). Elle m'a fait une bande, deux bandes, trois bandes, et un, deux, trois, quatre jetons tout seuls. Est-ce qu'elle a bon ? Des élèves : Oui Oui, parce que si on compte ça fait… euh si je compte Clara ça fait quoi là ? Une bande j'en ai combien ? (*l'enseignante montre les bandes avec sa main au fur et à mesure que l'élève va compter*) Clara : Dix H : Dix Clara : Vingt H : Vingt Clara : Trente H : Trente Clara : Quarante H : Non ?: Trente H : Trente et un Des élèves : Trente-deux, trente-trois, trente-quatre. H : Très bien.
	3.6 <u>Descriptif épisode</u> : Reprise de l'épisode 3.4 : l'élève a fait un autre message pendant la phase de synthèse. <u>Contenu</u> : Le message est une production graphique de type 2 qui est évaluée à nouveau positivement par l'enseignante (toujours sans argumentation).	H : Ah ben tiens, Romain qui ne comprenait pas le message c'est marrant parce que pour quarante-cinq il m'a fait une bande et il a fait quatre avec un trait, un petit jeton et il a fait cinq (*elle dessine au tableau le message 9, identique au message 7*). ?: Inès elle a fait ça H : C'est bien Inès, c'est le même message qu'Alexandre. Qu'est-ce que vous m'avez donné au passage ?
	3.7	41'06

<table>
<tr><td></td><td><u>Descriptif épisode</u> :
Etude du message 10.
<u>Contenu</u> :
Le message produit peut s'interpréter comme une compréhension erronée de la tâche, les élèves ayant compris, comme pour certains de la séance 1, qu'il était possible (voire demandé) de tout commander sous forme de bandes. L'enseignante demande à l'élève qui la produit de se corriger, ce qui est fait à l'oral.</td><td>H : Alors Sabrina et Anita, tiens c'est intéressant ça, on va regarder celui de Sabrina et Anita et après on va s'arrêter là. Sabrina et Anita ont besoin de vingt huit (« 28 » est écrit au tableau) : j'ai une bande, deux bandes, et là j'ai ça (efface le tableau sauf « 28 » et dessine le message 10 : deux bandes dessinées en parallèle à la verticale sur lesquelles les dix carrés sont représentés et une bande dessinée en parallèle des deux premières à la verticale sur laquelle huit carrés sont représentés). Alors là, j'en ai dix, et là par contre j'en ai un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, et huit. Assieds-toi Anita. Alors, qu'est-ce qui se passe ? Est-ce que vous êtes d'accord avec ce message ?
Des élèves : Oui
D'autres : Non
H : Oui ?
?: Non
H : Pourquoi ?
?: (inaudible) ça fait dans la dizaine des trente
?: Oui dans la dizaine des trente parce que trois bandes ça fait trente
H : Et oui mais regarde : ce qu'elle a fait c'est que là elle a mis des bandes où il y avait dix, et là il y a une bande où il y a huit. Est-ce qu'on avait le droit de prendre une bande et de la couper pour en retirer deux ? (elle écrit « 10 » en dessous d'une des bandes de dix et « 8 » en dessous de la bande de huit)
Des élèves : Non, ça on a pas le droit.
H : Tu t'es trompée. Qu'est-ce qu'il fallait faire ? Huit jetons tout seuls.
D'accord Anita ? Ok ?
42'08</td></tr>
<tr><td colspan="3">4ème épisode : synthèse décontextualisée et à partir d'exemples sur le lien désignation parlée, message oral (... bandes et ...)</td></tr>
<tr><td></td><td>4.1 Rangement et bilan par Sabrina
<u>Descriptif épisode</u> :
Rangement de la classe puis bilan formulé par un élève
<u>Contenu</u> :
Un élève décrit à nouveau la tâche, et n'indique pas ce qui s'est passé dans la phase de mise en commun. L'enseignante récupère</td><td>42'08
H : Très bien. (à ?) Tiens tu ramasses les messages de tout le monde pour que je puisse les regarder à la maison.
?: Je peux ramasser ?
H : Non tu ne ramasses rien du tout.
(à Anita) Ramasse les Ziglotron et tu me les poses là.
Je voudrais que l'on fasse un petit bilan rapide, donc on s'assoit, chut, on s'assoit et on s'explique deux minutes.</td></tr>
</table>

	et enrichit ce que dit l'élève pour orienter la séance sur un enjeu cognitif : le passage d'une désignation parlée en France à une désignation de la quantité par une désignation orale des groupements : « ... bandes et ... jetons ».	Axel quand tu veux parce moi je t'attends. Allez vous asseoir vite. Anita dépêche toi ma grande, tu mets ça au fond je rangerai ça tout à l'heure. Va les mettre au fond et je les rangerai tout à l'heure. (à ?) Tiens non mets les là dans la boîte verte, dans la boîte, verte, merci mon grand. Tu mets dans la boîte verte Chana, Chana, la boîte verte ici. Anita, tu poses sur les Ziglotron là. Anita, dépêche-toi. Ok. Alexandre, tu veux nous expliquer ? 43'20 ?: Moi ! H : Un petit peu. Si on fait le bilan de ce qu'on a vu ce matin, qu'est-ce qu'on a vu, qu'est-ce qu'on a appris ? H : (à ?) Ta paire de ciseaux elle est rangée. H : Chut, Chut, on en est pas là, on est aux mathématiques alors sa pochette qui dépasse on s'en fiche totalement. Maé tu devrais écouter parce que tu vas… Sabrina est-ce que tu saurais expliquer toi ? Qu'est-ce qu'on a fait Sabrina ? Allez vous asseoir très vite. Non elle est en train de parler, on la laisse parler, vas-y Sabrina. On a fait quoi ? Evitez de faire du bruit. Sabrina : (*inaudible*). Le marchand y nous donne des jetons. H : Oui mais le marchand est-ce qu'il te donnait n'importe quoi comme jetons ? Sabrina : Non H : Alors qu'est-ce qu'il fallait faire pour lui demander des jetons ? Sabrina : (*inaudible*) H : Les bandes et les jetons. Ça c'est très bien expliqué. Maintenant, qui peut aider Sabrina en disant si par exemple j'ai besoin de douze jetons combien il me faut de bandes et combien il me faut de jetons tout seuls ?
	4.2 : <u>Contenu</u> : L'enseignante interroge les élèves en leur donnant oralement une désignation parlée en France et en leur demandant une désignation orale des groupements : « ...bande (de dix) et ... jetons ».	45'10 H : Maé ? Ecoute bien. Douze jetons il me faut combien de bandes ? (*silence*) Est-ce qu'il me faut une bande de dix déjà ? Pour douze ? Maé : Oui Oui Maé : Et après il faut des jetons tout seuls H : Combien de jetons tout seuls ?

	Contenu : Ce passage OF vers OG n'a cependant pas été en jeu explicitement dans la phase de conclusion. Il a pu l'être pour certains élèves dans la tâche effectuée, mais la synthèse a porté sur une vérification et non sur le processus d'élaboration des messages. Ici le passage OF vers OG est abordé en interrogeant les élèves sur des exemples à partir du contexte « ziglotron » précédent : la désignation parlée en France est donnée, les élèves doivent produire (à l'oral sans autre aide, en particulier sans milieu matériel) une désignation de type « ...bande (de dix) et ... jetons ». Aucune stratégie n'est demandée. Des incidents émaillent ce dernier épisode du fait des réponses erronées des élèves. **Incident sur « douze »** L'élève interrogé reste silencieux à la question concernant douze. Une étape est indiquée concernant l'existence ou non de bande de dix. Le professeur facilite la réponse à la question en donnant une aide (une étape est indiquée concernant l'existence ou non de bande de dix) puis change d'intervenant. Les données recueillies ne permettent pas d'analyser l'erreur de l'élève ni la gestion de l'incident par l'enseignante. **Incident sur « quinze »** L'élève donne une réponse erronée non	?: Un H : Un jeton tout seul ? Des élèves : Non, deux H : Deux ? Vous êtes d'accord ? Des élèves : Oui H : Qui est d'accord avec ça ? Pour douze il faut une bande et deux jetons tout seuls ? Ok. 45'45 H : Donc je vais demander à Axel, eh oui, obligée. Axel si j'en veux quinze jetons il faut combien de bandes et combien de jetons tout seuls ? Chut, on écoute. Ceux qui sont d'accord avec lui vous levez la main. Quinze, combien de jetons tout seuls et combien de bandes ? Axel : Dix bandes H : Dix bandes ? Tu crois ? Dix bandes ça fait dix paquets de dix hein. Dix bandes ça fait… Il y a dix jetons dans chaque bande. Axel : Cinq bandes H : Cinq bandes ? Ça veut dire.., cinq bandes ça lui fait combien de jetons ? ?: Ça lui fait quinze H : Non. Cinq bandes ça fait combien de jetons ? Des élèves : Cinquante H : Cinquante ?: Dix H : Cinquante on a dit. Cinquante ça fait combien de jetons ? Des élèves : Cinquante H : Cinquante. (à Axel) Est-ce que tu crois qu'il te faut cinq bandes ? Axel : Oui H : Non, qui peut l'aider ? ?: Il fallait dix bandes. H : Dix bandes ? ?: Non, une bande de dix H : Une bande de dix.

attendue par l'enseignante. Elle le relance puis donne une aide et enfin change d'intervenant. Il est difficile d'analyser les différentes formulations de l'élève, mais nous relevons ces difficultés, même pour des petits nombres. L'enseignante indique les erreurs et la bonne réponse mais aucune stratégie n'est donnée ni explication. **Incident sur les autres nombres : dix-huit, seize, quatorze, vingt-cinq, vingt-huit.** Des incidents similaires aux précédents et le même traitement par l'enseignante sont à relever. Ils sont difficilement analysables sans plus d'informations. Nous notons qu'un certain nombre d'élèves échoue dans la réalisation de la tâche demandée par l'enseignante, que ce soit pour des nombres de onze à seize ou de dix-sept à vingt-huit. Une erreur est récurrente, c'est le fait de dire dix bandes (de dix) quelle que soit la question posée. L'enseignante interroge les élèves sur des nombres inférieurs à vingt-sept et qui n'ont pas été en jeu dans la séance. Elle ne donne aucune stratégie et donne une évaluation positive quand est produite la bonne réponse.	?: Avec cinq petits H : Cinq petits jetons. D'accord. 46'47 H : Attention, encore un autre. Vous levez la main ceux qui savent. Si j'en veux dix-huit. Jihan, tu veux nous le dire ? Alors tu sais ? Tu dis je sais, tu lèves la main pour rien. Romain. Romain : Ça fait une bande de dix et huit petits jetons. H : D'accord. Alors si j'en veux seize, il faut combien ? Inès ? Combien de bandes de dix ? Inès : Une bande de dix et six petits jetons H : Et six tout seuls. Ok. Si j'en veux quatorze. Chana. Chana : Ça fait dix bandes de dix… H : Non, combien de bandes de dix ? Chana : Une bande de dix et quatre petits tout seuls. H : Pour quatorze. Très bien, si j'en veux vingt-cinq. Djibril. Djibril : Dix bandes … H : Hop, hop, hop. Mathis. Mathis: Deux bandes et cinq tout seuls. H : Très bien. Si j'en veux vingt-sept. ?: Dix bandes… H : Dix bandes ? Des élèves : Non ! Maé : Deux bandes de dix et cinq H : Deux bandes de dix et cinq pour vingt-sept ? Maé : Et sept. H : Très très bien. Très bien, on va arrêter là, la prochaine fois on retravaillera encore un peu. On va s'arrêter là c'est l'heure de manger, et on retravaillera avec le grand Ziglotron encore une prochaine fois. 48'51

<table>
<tr><th colspan="2">Lancement 0'- 5'35</th></tr>
<tr><th colspan="2">1er épisode : première formulation de la première tâche</th></tr>
<tr><td>
<u>Description</u> :
L'enseignante indique la première tâche de la séance en demandant en particulier aux élèves de se remémorer la séance précédente.
<u>Contenu</u> :
L'enseignante décide de reprendre un grand Ziglotron déjà étudié (la fiche 38 comportant 28 boutons) et non celui proposé par le manuel. Elle indique dans un entretien post-séance commencer par un nombre plus petit qu'elle considère plus facile pour réaliser la tâche. La sous-tâche de comptage est effectuée devant toute la classe par un élève (interprétation ordinale de la numération par comptage de un en un) qui se trompe dans l'énumération (l'enseignante lui indique son erreur). La désignation parlée obtenue « vingt-huit » est transcrite avec l'écriture chiffrée « 28 » : l'écriture chiffrée est donc présentée comme la forme écrite de la désignation parlée en France. Les autres variables de la situation sont rappelées (en particulier, un seul voyage, ce qui sous-entend un seul essai ici). A signaler que
</td><td>
00'
H : On va arrêter ça pour le moment et puis on va retravailler avec le grand Ziglotron d'accord ? Alors...
?: Est-ce qu'il faut des feutres ?
H : Ben tu vas voir, je vais t'expliquer. Alors, chut, chut, chut, Charlotte, veux-tu me laisser parler tranquillement ? Tu as entendu Charlotte ? Veux-tu me laisser parler tranquillement ?
(H. fixe un agrandissement A3 de la fiche 38 du grand Ziglotron qui comporte vingt-huit carrés/boutons) Nous allons retravailler avec le grand Ziglotron, mais aujourd'hui, le grand Ziglotron, vous n'allez pas l'avoir avec vous, eh non ! Parce que ce qui va se passer, c'est que je vais compter le nombre de jetons, tiens je vais même demander à Sabrina de compter le nombre de jetons qui manquent au grand Ziglotron pour qu'il ait tous ses boutons. (Sabrina vient compter au tableau)
Sabrina : (Comptant en indiquant un à un les carrés avec son doigt) Un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, dix, onze, douze, treize, quatorze, quinze, seize, dix-sept, dix-huit, dix-neuf, vingt, vingt et un, vingt-deux, vingt-trois, vingt-quatre, vingt-cinq, vingt-six, vingt-sept…
H : Non tu as oublié celui-là.
Sabrina : Vingt-huit.
H : Vingt-huit, d'accord ? (H. écrit « 28 » au tableau à côté du grand Ziglotron affiché) Donc, la dernière fois, on avait fait quoi ? Qui est-ce qui me rappelle ?
Anaïs-Ludivine tu arrêtes !
La dernière fois, Maé, qu'est-ce qu'il fallait faire ?
Maé : On pouvait en demander que neuf.
H : Très bien. Les jetons isolés on pouvait en demander que neuf.
Maé : Et si on en voulait plus que neuf on était obligé de prendre des barres, on devait trouver un moyen.
H : Voilà, trouver un moyen tu as tout à fait raison, d'accord ? On devait demander
</td></tr>
</table>

	l'enseignante continue à demander des messages dessinés et non les bons de commande proposés par le manuel. L'enseignante rappelle en outre le milieu matériel (les deux conditionnements différents, paquets de dix ou unité) en affichant au tableau une bande de dix carrés et un carré, celui-ci étant de même dimension que ceux de la bande. Les élèves auront toujours la possibilité de regarder cet affichage. En particulier les dix carrés sont dénombrables sur la bande de dix[iii].	en une seule fois, qu'est-ce qu'il y avait, autre chose ? Et qu'est-ce qu'on avait fait pour se souvenir ? Chut ! La main ! Inès ? Inès : On avait écrit un message. H : D'accord, on avait écrit un message donc on avait écrit sur une feuille, d'accord ? Eh bien on va faire pareil aujourd'hui donc là vous allez nous croire Sabrina et moi nous avons compté, donc Sabrina nous avons besoin de combien de jetons ? Combien de jetons ? Sabrina : Vingt-huit H : Vingt-huit. Eh bien moi je vais vous donner une feuille par groupes de deux, c'est pour ça que je vous ai demandé un feutre noir parce que vous allez (au feutre noir ou bleu), vous allez écrire la commande. Alors attention, comme la dernière fois, vous n'avez le droit… ?: Un seul voyage ? H : Ah oui ! On a le droit de demander qu'en une seule fois, d'accord ? Ça c'est tout à fait d'accord, et on ne peut pas demander plus de neuf jetons isolés, d'accord ? Donc pas plus de neuf jetons isolés, pas plus de neuf comme ça (*elle fixe un carré au tableau de même dimension que ceux sur le Ziglotron*), et vous avez le droit de demander autant de bandes de dix jetons que vous voulez *(elle fixe verticalement au tableau une bande de dix carrés, chaque carré étant de même dimension que ceux sur le Ziglotron)*. Par contre il faut commander juste ce que vous voulez, pas plus, pas moins, juste ce que vous voulez. Est-ce que tout le monde a bien compris ? Est-ce que tout le monde a compris ? La classe : Oui.
	2ème épisode : reformulation de la première tâche	
	<u>Description</u> : L'enseignante reformule la première tâche à l'aide d'un élève. <u>Contenu</u> : L'enseignante rappelle les variables principales : les deux conditionnements, le fait de ne pas pouvoir demander plus de neuf boutons isolés, le fait de commander exactement ce qu'il manque. Elle ne rappelle pas qu'il faut	3'28 H : Je vais redemander à Alexandre de nous répéter la consigne. On t'écoute. On t'écoute Alexandre. Non, non, tu sais quoi ? Comme on t'écoute on va tous prendre une position d'écoute. Et on écoute Alexandre. Alexandre : La maîtresse elle va nous donner une feuille et on va écrire sur la feuille. H : Tu vas écrire quoi sur la feuille ? Ce dont tu as ...? Alexandre : Besoin. H : Ce dont tu as besoin. Et alors tu vas devoir écrire quoi ? Le message que tu veux. Alexandre : On prend des bandes et *(inaudible)* on a pas droit d'en prendre plus que neuf. H : Plus que neuf. Est-ce qu'on doit commander plus que ce qu'on a besoin ou est-ce

	commander vingt-huit boutons (28 est cependant écrit au tableau sous la forme « 28 »).	qu'il faut commander juste ce dont on a besoin ? Des élèves : Juste ce dont on a besoin. H : Juste ce dont on a besoin. Alors ce qu'on va faire je vais vous laisser travailler, après je prendrai certains d'entre vous et on verra par rapport aux différents bons de commandes quels sont les bons ou quels sont ceux qui ont fait des erreurs. Ok ?
3ème épisode : installation matérielle		
	<u>Description</u> : L'enseignante compose les binômes. <u>Contenu</u> : L'enseignante n'a pas prévu de changer l'organisation de la classe. Les binômes sont donc principalement constitués d'élèves étant côte à côte habituellement.	4'50 Donc je vais vous mettre par deux. Maé, tu vas avec Jihan. Toi tu vas avec Sabrina. C'est bon, là c'est bon. Chut ! Toi, tu restes là. Toi tu laisses faire, et après tu regardes, d'accord ? 5'35

Réalisation de la première tâche des élèves 5'35- 11'08		
1[er] épisode : Rappel de certaines variables pendant le travail des élèves (intervention en direction de certains élèves, audible par tous)		
	Description : L'enseignante poursuit l'installation matérielle pendant le travail des élèves Contenu : Dans cet épisode l'enseignante doit rappeler à certains élèves la différence avec la séance précédente : il n'y a pas de marchand, la fiche Ziglotron n'est pas disponible (elle rappelle alors le nombre en jeu « vingt-huit). La tâche de comptage est prégnante chez certains élèves.	5'35 H : Allez c'est parti vous pouvez commencer. C'est un pour deux. Non c'est pas toi qui écris c'est chacun son tour. Chut ! Non il n'y a pas de marchand là. Là je vous les donne pas, on fait comme si. Chut ! Allez vous faites votre message. Non non tout seul, vous êtes à deux. (H passe parmi les groupes) Vous vous mettez d'accord, ok ? Il faut se mettre au travail là ! Mettez-vous au travail. Tu écris ton bon de commande. *(Inaudible, brouhaha)* H : Alors on discute ? (?) : On n'a pas de ziglotron ! H : Vingt-huit. Tu passes ta commande pour vingt-huit ? Oui ! On a tous vingt-huit aujourd'hui, comme ça on va pouvoir comparer les bons de commandes. Elle attendait son Ziglotron Mademoiselle ! Vingt-huit ! Chut ! Faites moins de bruit ! Alors, vous écrivez votre prénom, les deux hein ! Vous vous dépêchez vous avez dix secondes pour finir. Non c'est là ! Maintenant la commande elle est où ? Non, j'ai pas indiqué vingt-huit, j'ai dit combien de bandes et combien de... Tu n'as pas compris. Non, mettez les là que je sache qui c'est. Non c'est ici qu'on met les prénoms. Pourquoi tu copies sur le voisin ? Ben tiens c'est ça oui ! Kenza ! C'est bizarre hein ?! Ok, ceux qui ont terminé vous m'apportez, vous allez à vos places.
2[ème] épisode : consignes adressées à certains groupes d'élèves		
	Description : L'enseignante régule la séance. Contenu : L'enseignante ne donne pas d'aide mathématique ni ne prend d'information pendant cet épisode. Elle relance l'activité des élèves de façon neutre pour permettre à chacun de réaliser la tâche en veillant à ce que les « règles du jeu » soient respectées. Assez rapidement et à plusieurs reprises elle	9'05 H : (*H s'assoit sur une chaise devant le tableau et les élèves lui apportent leur message*) C'est toi qui expliques ? D'accord, va t'asseoir. Ah, tricheuse ! Viens ici toi ! Tu serais pas un petit peu coquine ?! Hein ? Tu aimes bien parler toi. Ben tu te feras corriger. Les prénoms c'est devant. D'accord, alors dépêchez-vous. Allez ça y est, terminé ! (*H se lève et reste devant le tableau*) Je veux les bons de commandes. Ah oui, oui, tu vas t'asseoir et croiser les bras. Chut ! Je demande le silence maintenant. Jihan, pose tes fesses, terminez, prénom, vite, prénom. Ça y est ? Vous devez écrire votre prénom. Assieds-toi. Un, deux, trois, stop ! Terminé ! Vous avez les bras croisés. J'ai dit quelque chose Jihan ! Mais oui mais si tu mets ton prénom derrière il faut que je retourne pour savoir qui c'est, d'accord ? J'ai dit : terminé ! A un moment donné, à un moment donné nous sommes obligés de nous arrêter, parce que si on ne s'arrête pas, on ne

rappelle publiquement à tous les élèves que la séance de travail est terminée, voulant ainsi les stimuler et ne pas étirer la séance en longueur (entretien post séance). L'enseignante a relevé les messages et les a classés.	peut plus faire. Vous croisez les bras je veux les…, alors elle c'est terminé. Les bras croisés, Charlotte, tu m'écoutes deux secondes ?! Les bras croisés je veux les stylos, les crayons, les feutres tout ça dans la rigole je ne veux plus vous entendre. Est-ce que c'est compris ? Vous me donnez votre travail. Marque ton prénom. Tu me donnes ton travail s'il te plait ? 11'08

Mise en commun première tâche 11'08 - 24'35

1er épisode : rappel de la tâche à l'aide d'un élève

Description : L'enseignante rappelle la tâche à l'aide d'un élève. Contenu : L'élève rappelle ce qu'il a fait, sans indiquer les variables (il retient qu'il a dû écrire un message comportant des bandes et des carrés seuls (le mot carré est employé au lieu de boutons ou jeton ou ...). L'enseignante récupère et enrichit l'intervention de l'élève en retenant le fait qu'ils avaient à faire un message et donc qu'ils vont les regarder.	11'08 H : Alors, j'affiche. Ça y est c'est bon maintenant ? Vous avez les bras croisés, je vais afficher ce qu'il s'est passé et vous allez me dire si ça vous convient ou pas, et pourquoi ça convient et pourquoi ça ne convient pas. Je vais demander à Charlotte de me répéter les consignes : qu'est-ce qu'il fallait faire ? (*H efface le tableau et déplace le ziglotron sur la gauche, le panneau central du tableau est vide*) Charlotte : La maîtresse elle va accrocher au tableau votre travail. H : Non mais avant, qu'est-ce qu'il fallait faire là ? Sur le papier qu'est-ce qu'il fallait faire ? Charlotte : Ben sur le papier il fallait que les bandes qu'on voulait pour faire vingt-huit et les petits carrés tout seuls et puis si, et ben après il fallait donner à la maîtresse. H : D'accord, donc là tu as écrit si j'ai bien compris ce que tu m'as dit tu as écrit un message. Charlotte : Oui. H : C'est ça ? H : Bon alors on va regarder pour commencer le message de Djibril

2ème épisode : validation des différents messages

L'enseignante se trouve au tableau avec les messages. Les élèves sont à leur place habituelle. Des messages erronés sont d'abord étudiés. Tous les messages sont passés en revue.
Le tableau a été organisé au fur et à mesure en deux parties : à gauche les productions graphiques validées, à droite celles considérées comme erronées. Dans la partie gauche, les productions graphiques de type 2 ont été distinguées dans une colonne et les productions graphiques de type 1 dans une autre.

2.1	12'00

Description : Etude du message 1. Deux bandes de onze et six carrés isolés. Contenu : Dans un premier temps le message est invalidé par l'enseignante, puisque l'élève dit avoir dessiné « *deux bandes de dix et six jetons* ». Elle ne compte pas les carrés dans les bandes, identifiant une désignation orale des groupements (OG) avec une production graphique (GraC) de type 1 qu'elle décrit. La validation se fait par une stratégie GraC vers OF consistant à utiliser la comptine des dizaines pour indiquer la quantité désignée par les deux bandes : « *une bande de dix ça fait dix, deux bandes de dix ça fait vingt* ». L'enseignante met en jeu *a priori* une interprétation arithmétique multiplicative, mais elle peut convoquer chez les élèves une interprétation additive (voire ordinale avec repérants), le « un » et le « deux » employés pouvant être des marqueurs des bandes pour aider leur énumération. Par la suite, l'élève indique avoir tracé deux bandes de dix, alors qu'il sait qu'il y en a onze par bande. Le mot « bande de dix » semble ainsi indiquer pour lui plus un conditionnement en bande (« égales ») qu'un groupement (de dix carrés). Ceci crée un **incident**, que l'enseignante gère en répondant à la place de l'élève. Le message est alors invalidé du fait que « *des bandes de onze ça n'existe pas* » (c'est une	H : (*H affiche le message - message1- à gauche du tableau*) Est-ce que tout le monde voit ? Des élèves : Oui. H : Ça va pour tout le monde ? Alors, Djibril, qu'est-ce qu'il nous a demandé ? On est d'accord qu'au total on en veut vingt-huit. C'est le nombre de jetons. Djibril, tu peux nous dire ce que tu as fait ? (*H écrit « 28 » en haut du tableau et l'entoure*) Djibril : J'ai fait deux bandes de dix et six jetons. H : D'accord. Alors est-ce que si on fait deux bandes de dix et six jetons, est-ce que vous êtes d'accord avec ce message ? Des élèves : Non. H : Hep, hep, hep ! On lève la main pour répondre. Inès, es-tu d'accord avec ce message ? Inès : Non. H : Pourquoi Inès ? Attends. Ici, deux bandes de dix : on est d'accord une bande de dix ça fait dix, deux bandes de dix ça fait vingt et six tous seuls ça fait vingt-six. Ici on a vingt-six … (*H écrit « 26 » au tableau*) Djibril : Je me suis trompé ! H : Ah ! Djibril : Parce que sans faire attention, j'ai fait onze. H : Ici tu as fait onze ? Djibril : Onze sans faire attention. H : Ah mais tu vois moi je n'ai pas compté : j'ai vu que tu avais fait une bande, pour moi tu avais fait dix, donc pour moi tu en as vingt-six. Et toi, alors si il y en a onze alors un, deux trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, dix, onze. Ah ! Si on a deux bandes de onze, et oui, effectivement, si on a deux bandes de onze et six, là on obtient vingt-huit mais on avait dit des bandes de dix. Des bandes de onze ça n'existe pas Djibril. Djibril : Je me suis trompé. H : Eh oui, donc ton message de toute façon, il n'est pas bon. D'accord ? Ok Djibril ? (*H déplace le message à droite du tableau*) Charlotte : *(Inaudible)*

	« règle du jeu » à respecter), alors que le dessin comporte le bon nombre de carrés.	H : Charlotte tes commentaires s'il te plait.
	2.2 Description : Etude du message 2. Une bande de neuf carrés solidaires Une bande composée de neuf carrés pointés suivis de dix carrés non pointés, qui peut être aussi analysée comme deux bandes juxtaposées. Contenu : L'enseignante se fie à la désignation orale (OG) « *trois bandes de dix* » donnée par l'élève sans relever l'ambigüité du dessin ni compter le nombre de carrés. La validation se fait par une stratégie GraC vers OF consistant à utiliser la comptine des dizaines pour indiquer la quantité désignée par les deux bandes. Les bandes sont énumérées l'une après l'autre en même temps qu'est énoncée la comptine des dizaines : une interprétation ordinale avec repérant est ainsi convoquée par l'enseignante, ce qui ne pose pas de problème à l'élève. Un **incident** survient quand à la question « *Tu as demandé quoi ?* », l'élève répond « *deux jetons et deux bandes* ». L'enseignante décide de répondre à la place de l'élève et évalue sa réponse « *trente* » comme fausse. La justification sous entendue est que « vingt-huit » est différent de « trente ». Cet argument est valable du fait que les nombres dans la numération décimale en France n'ont qu'une seule désignation (propriété de non redondance indiquée dans la première partie de	13'44 H : On va regarder le message de Sabrina et de Clara (*H affiche le message au centre du tableau : message 2*) : elles en voulaient vingt-huit, alors qu'est-ce que vous avez écrit ? Qui est-ce qui peut expliquer ? Sabrina ou Clara ? Clara ? Allez Clara explique-nous. Chut ! Romain, tu respectes le travail de tes camarades. Clara : On a fait trois bandes de… H : De dix ? Clara : De dix H : Trois bandes de dix, alors trois bandes de dix ça fait combien ? Ça fait combien trois bandes de dix ? Des élèves : Trente. H : Non, vous la laissez travailler. Clara : Dix. H : Oui. Clara : Vingt. H : Vingt. Clara : Trente. H : Trente. Donc tu as combien de jetons avec trois bandes de dix ? Djibril tiens-toi bien. Clara : Ben trente. H : Trente. Et moi j'en voulais combien ? Clara : Vingt-huit. H : Alors est-ce que ton message il est bon ? Clara : Non. H : Pourquoi il n'est pas bon ? Djibril tiens-toi bien deux fois. Clara : *(Inaudible)* H : Toi tu as demandé trois bandes, tu as demandé trente jetons. Est-ce que là, j'avais dit quoi moi ? Qu'est-ce que j'avais dit ? Qu'il fallait en une fois demander... ?: Vingt-huit.

	la thèse). L'enseignante estime donc que cette connaissance est acquise par les élèves.	H : Juste ce qu'il faut. Est-ce que tu as demandé juste ce qu'il faut ? Tu as demandé plus, moins, pas assez, trop ? Tu as demandé quoi ? Clara : Deux jetons et deux bandes. H : Deux jetons et deux bandes, tu crois ? Est-ce que vous êtes d'accord avec ça ? Des élèves : Non. H : Non. Là tu en as demandé trente. Sabrina ! C'est ton travail aussi. Tu en as demandé trente, et nous il nous en fallait ? Des élèves : Vingt-huit. H : Vingt-huit. Donc ce message-là, comme celui de Djibril, il n'est pas correct. (*H déplace le message à droite du tableau).*
	<u>2.3</u> <u>Description</u> : Etude du message 3. Une bande de dix à laquelle est accolé « 2 » Une autre bande de dix à laquelle est accolé « 8 » <u>Contenu</u> : L'enseignante se fie à la désignation orale (OG) « *deux bandes de dix* » donnée par l'élève sans relever l'ambigüité du dessin (entre production graphique de type 1 et 2) ni compter le nombre de carrés. L'élève invalide lui-même son message en indiquant directement que « (*deux bandes de dix), ça fait vingt* ». L'enseignante relance le travail de l'élève en demandant de compléter sa réponse.	15'50 H : On va regarder d'autres messages. Le message de Anais et Mathis. Anais et Mathis, qui est-ce qui prend la parole ? Anais ou Mathis ? Mathis ? (*H affiche le message - message 3 - à gauche du tableau).* Alors vas-y, qu'est-ce que tu as demandé sur ton message ? Tout le monde le voit le message ? Des élèves : Oui. Mathis : J'ai marqué deux bandes de dix. H : Deux bandes de dix. Est-ce que deux bandes de dix tu penses que c'est suffisamment ? Mathis : Non, mais j'allais mettre huit petits jetons tout seuls. H : Ah oui, mais là c'est pas ce que tu m'as fait. Là tu m'as fait deux bandes de dix ?: Ça fait vingt. H : Eh oui deux bandes de dix ça fait vingt, donc je te demande de poursuivre ton message si tu n'avais pas terminé.
	<u>2.4</u> <u>Description</u> : Etude de deux messages <u>Contenu</u> : Les messages sont des productions graphiques	16'30 *Interruption de la vidéo pendant deux minutes pendant lesquelles deux messages constitués de deux bandes et huit carrés ont été affichés et placés à gauche du tableau.*

	de type 1. Ils ont été validés et donc placés à gauche du tableau.	
	2.5 Description : Etude du message 4. Trois bandes de neuf carrés accolés (les carrés ont été visiblement tracés les uns après les autres). Contenu : L'enseignante se fie à la désignation orale (OG) « *trois bandes de dix* » donnée par l'élève sans compter le nombre de carrés. L'enseignante veut invalider la réponse à l'aide d'une stratégie OG vers OF (avec une désignation GraC affichée au tableau qui ne sera pas utilisée). Elle demande aux élèves de traduire directement la désignation OG « *trois bandes de dix* » en sa désignation parlée en France (OF). Un **premier incident** survient alors suite à la réponse erronée « vingt-huit » d'un des élèves qui a produit le message : il est difficile de savoir s'il pense avoir effectivement commandé vingt-huit boutons avec trois bandes de neuf – ou de dix - ou s'il indique ce qu'il aurait dû commander. L'enseignante relance l'élève qui donne alors la réponse attendue « *trente* ». L'enseignante tente d'invalider alors le message en comparant les deux désignations parlées en France « vingt-huit » et « trente », et pose en outre la question « *tu en as commandé combien en trop ?* ». Cette question n'est pas nécessaire pour invalider la réponse, mais elle permet de	18'30 H : (A ?) Non, toi tu n'as pas fait ça mademoiselle. J'ai un autre message (*H affiche le message – message 4 – au centre du tableau*). Alors là j'aimerais bien qu'on me le décrypte, c'est Axelle et Riyad. Axelle et Riyad, dites-moi un peu ce que vous avez fait. Chut ! On écoute. Axelle : Trois bandes de dix. H : Trois bandes de dix. Est-ce que tu penses que le message est correct ? C'est le même message que qui ? Tu as fait la même chose que qui ? (*Montrant*) Que là ou là ? Riyad ? Que Sabrina, c'est le même message que Sabrina et Clara, donc on va les mettre ensemble (*H déplace le message à droite du tableau*). Qu'est-ce qui s'est passé donc trois bandes de dix, ça veut dire que tu en as demandé combien ? Riyad : Vingt-huit. Un élève : Trente. H : Non ! Trois bandes de dix tu en as commandé vingt-huit ?! Des élèves : Non. H : Tu en as commandé combien ? Riyad : Trente. H : Et il en fallait combien ? Riyad : Vingt-huit. H : Donc ça veut dire quoi ? Que tu en as commandé trop ou pas assez ? Riyad : Trop. H : Trop. Tu en as commandé combien en trop ? Riyad : Trente H : Combien il en a commandé en trop ? Des élèves : Trente. Dix. Trois. H : Pardon ? Des élèves : Trois. H : Il a commandé trois bandes de dix, ça fait trente, et il fallait qu'il en commande vingt-huit. Il a commandé combien de jetons en trop ? Johanna ? Johanna : Une bande de dix.

travailler une connaissance que l'enseignante pense au moins acquise pour la plupart, si on se fie à sa réaction finale. Les réponses erronées des élèves provoquent alors un **deuxième incident**. L'enseignante change d'intervenant pour avoir la bonne réponse puis décide de guider les élèves pour valider cette réponse. Elle surcompte alors à partir de vingt-huit, utilisant ainsi une interprétation ordinale avec repérant.	H : Eh oui mais il fallait qu'il remplace quoi ? La bande de dix par quoi ? Johanna : Par huit jetons. H : Donc il a commandé combien de jetons en trop ? ?: Bah, deux. ?: Trente. Johanna : Demander encore plus. H : Oui mais combien en plus ? Inès ? Inès : Trente. H : N'importe quoi ! ?: Trois. H : Ah ! Ben je ne sais pas, Romain ? Romain : Deux. H : Explique Romain parce je crois qu'il y en a qui n'ont pas tout compris. Romain : Parce que… H : Il en fallait vingt-huit, d'ailleurs ils sont bien marqués là (*montrant « 28 » au tableau*), et ils en commandent trente. De vingt-huit pour aller à trente je fais combien ? Vingt-huit ... Des élèves : Moins. H : Vingt-neuf, trente. Combien il m'en manque ? Des élèves : Deux. H : Deux pour aller à trente. Ça veut dire que tu en as commandé deux en plus. D'accord ? De trente, pour redescendre à vingt-huit, je dois en retirer deux, d'accord ? Ben dites donc ça a été long à venir, je ne vous félicite pas.
2.6 Description : Etude des messages 5. Une bande (comportant neuf carrés) à laquelle est accolé « 2 » et un carré seul auquel est accolé « 8 ». Contenu :	20'52 H : Et alors là on a trois messages qui sont identiques : on a les messages de Charlotte et Nabil, le message de Chana/Alexandre, et le message d'Anaelle et d'Alexis. (*H affiche les trois messages – messages 5 - à gauche du tableau*). Donc on a ici ces deux messages-là identiques et ces deux-là identiques. Alors, une personne des groupes prend la parole, Chana a très envie de parler donc on va laisser parler Chana. Chana, qu'est-ce que tu as commandé ? Chana : On a commandé deux bandes de dix avec huit petits jetons tout seuls.

L'enseignante se fie à la désignation orale (OG) « *deux bandes de dix* avec *huit petits jetons tout seuls* » donnée par l'élève sans compter le nombre de carrés. Cette désignation orale, la même que précédente est cette fois-ci une traduction orale « signe à signe » de ce qui est écrit et non une description du dessin. Ces messages sont évalués positivement par l'enseignante qui les place d'emblée à gauche (évaluation).	H : Deux bandes de dix, d'accord. Alors, au lieu de dessiner les deux bandes vous avez vu, ils ont fait deux bandes avec une petite flèche en disant deux : deux bandes comme ça et huit jetons tout seuls. Pareil pour ceux-là. (A ?) Toi non tu n'as pas fait pareil, je te rappelle que toi oui tu as mis pareil pour dire la quantité, sauf que regarde tu les as dessinées les deux bandes, tu n'as pas fait pareil, d'accord ?
2.7 Description : Etude du message 6. Deux bandes de dix carrés et huit carrés isolés. Contenu : Le tableau a été organisé au fur et à mesure en deux parties : à gauche les productions graphiques validées, à droite les erronées. Dans la partie gauche, les productions graphiques de type 2 ont été distinguées dans une colonne et les productions graphiques de type 1 dans une autre. L'enseignante classe le message 6 (en prenant l'avis des élèves) à gauche du tableau, dans les productions graphiques de type 1, l'évaluant positivement par ce fait. L'argumentation semble en effet inutile car l'enseignante peut estimer que ce message peut être facilement identifiable aux autres. A noter cependant que l'enseignante ne reviendra pas sur ce classement qui aurait pu être un objet d'institutionnalisation.	22'05 H : Le message de Gabriel et Anita (*H affiche le message – message 6 - au centre du tableau*). Alors on l'apparente à quel message ? (A ?) : tu veux casser la table ? ?: C'est comme Axelle. H : Comme Axelle ? Tu crois que c'est comme Axelle et Riyad ? Des élèves : Non. H : Alors explique-nous Gabriel. Gabriel : J'ai fait deux bandes de dix, et après j'ai fait huit petits tout seuls. H : D'accord. Alors on le met avec le message de qui ? Est-ce qu'il est bon ce message ? Des élèves : Oui. H : Il est bon. Là c'est les messages qui ne conviennent pas, donc lui il est bon son message, et je le mets où ? (*montrant deux colonnes de messages à gauche : la première étant constituée de message composés de bande à laquelle est accolée « 2 » et d'un carré auquel est accolé « 8 », la deuxième étant constituée de messages composés de deux bandes de dix et 8 carrés isolés*) Avec ceux-là ou avec ceux-là ? Des élèves : Avec ceux-là. H : Avec ceux-là on est d'accord. C'est la même chose que ces messages-là (*montrant la colonne des productions graphiques de type 1*).
2.8	22'55

	Description : Etude du message 7. Trois bandes de dix et trois carrés isolés Contenu : L'enseignante fait oraliser partiellement le message par l'élève « *trois bandes de dix et des petits jetons* » puis évalue le message comme faux sans argumenter. Les productions correctes étant été données auparavant, l'enseignante peut en effet estimer pouvoir s'appuyer sur ces dernières pour invalider les productions fausses sans plus d'explication. Ce qui sous-entend que deux seules formes de productions sont correctes, une de type 1 et une autre de type 2.	H : Alors là, est-ce qu'on pourrait regarder quand même le message de Jihan et de Maé ? Des élèves : Oui H : (*H affiche le message – message 7- au centre du tableau*). Jihan et Maé, alors là ça veut dire quoi, ça ? ?: Trois. H : Non, non, c'est elles qui l'ont dessiné c'est elles qui vont parler. Maé. Maé : C'est… H : Enlève tes mains de la bouche sinon on ne va pas t'entendre Maé. Maé : C'est trois bandes de dix. H : Trois bandes de dix ? Et puis ça? Maé : Des petits jetons H : Alors est-ce que tu penses que c'est bien ton message ? Tu penses qu'il est bon ou pas ? Non hein ? D'accord donc on le met...on le met (*H déplace le message à droite du tableau*). Il n'est pas fini ? Est-ce que tu crois que il n'y en pas un peu trop ?
	2.9 Description : Etude du message 8. Une bande de dix à laquelle est accolée « 10 » et une deuxième bande de huit carrés. Contenu : L'enseignante donne une évaluation négative du message, l'argument donné est hors de la portée des élèves puisqu'elle indique sans explication que la quantité demandée est cent-huit.	23'40 Alors on a un autre message là (*H affiche le message – message 8 - au centre du tableau*) : on a je ne sais pas quoi, on a un « T » là, on ne sait pas ce que c'est. Alors, on y va : ici on a dix bandes de dix ? C'est bien ça ? Dix bandes de dix tu veux ? Je vois dix bandes de dix et là je vois cent-huit. ?: Cent-huit ! Cent huit ! H : Alors on va la laisser s'expliquer parce que son message n'est pas clair, elle va nous expliquer. Johanna, alors ? Alexis s'il te plait, comme Romain, tu t'assois et tu croises les bras, pareil pour Djibril. Alors tu as écrit dix pour dire qu'il y en avait dix dans la bande mais tu ne m'as pas dit combien tu voulais de bandes, eh non ! Oui, maintenant tu sais, mais alors puisque ce message-là on ne le comprend pas très bien, on va le mettre ici (*H déplace le message à droite du tableau*). 24'35
	Notes :	

Finalement ont été affichés et classés au tableau cinq messages erronés et huit non erronés : dans ces derniers, quatre sont des productions de type 1 et quatre de type 2.	

Lancement de la 2ème tâche 24'35 - 25'28	
Unique épisode : formulation de la deuxième tâche	
<u>Description</u> : L'enseignante, placée devant le tableau, indique la deuxième tâche. <u>Contenu</u> : L'enseignante reprend la fiche 40 de la séance précédente, sur laquelle il y a quarante-cinq carrés. Aucune précision supplémentaire n'est donnée. Le fait de remplacer au tableau la fiche 38 par la fiche 40 indique que la nouvelle tâche est identique à la première. Le changement de variable, quarante-cinq (au lieu de vingt-huit) est souligné par l'enseignante.	24'35 H : Et maintenant je vais vous re-proposer de me refaire un autre message et cette fois-ci je vais changer Monsieur Ziglotron et je vais en mettre un autre. (H *remplace la fiche 38 par la fiche 40 format A3 qui comporte quarante-cinq carrés/boutons).* Alors, hep, hep, non, on a les bras croisés, j'attends. Inès, puis-je donner ma consigne ? Alors j'attends que tu me fasses le silence. Cette fois-ci, ce n'est pas vingt-huit mais quarante-cinq. Quarante-cinq. (*H écrit « 45 » en haut du tableau*). Attention, c'est parti pour tout le monde ! 25'28

Réalisation de la deuxième tâche des élèves 25'28 – 31'10	
1er épisode : poursuite de l'installation matérielle pendant le travail des élèves	
<u>Description</u> : L'enseignante poursuit l'installation matérielle pendant le travail des élèves <u>Contenu</u> : L'enseignante n'apporte pas d'aides supplémentaires.	25'28 H : Chut, chut ! *(Brouhaha)* Alors toi, tu vas te mettre toute seule, et toi, tu vas là-bas toute seule. Vous n'êtes pas capables de travailler à deux mais séparées. Tu viens devant. Chut, chut ! (*H se déplace à son bureau*). Maé, tu vas à ta place. Lisa Joyce, tu veux que je t'aide ? *(Brouhaha)* Essayez de travailler en silence. Alors si tu as terminé tu me mets en gros ici la quantité et tu mets tes prénoms. Mettez-vous d'accord. Vous faites chacune un message ? Je vous donne chacune une feuille. Tiens. Si vous faites chacune un message, vous vous êtes mis d'accord ou pas ? C'est bon ? Mais ne dessinez pas chacune de votre côté. Alors faites-moi chacune un message.
2ème épisode : interaction entre l'enseignante et certains groupes d'élèves	

<table>
<tr><td></td><td><u>Description</u> :
L'enseignante se dirige vers un groupe et les questionne sur leur tâche.
<u>Contenu</u> :
L'enseignante valide une réponse donnée par un des deux élèves : son argumentation est en direction de l'autre élève. Elle intervient ainsi dans la situation de communication, s'assurant que celle-ci aboutisse pour ce groupe (elle n'a pas le temps matériel d'aller voir tous les groupes, les élèves ayant pour la plupart fini leur tâche). La validation consiste ici en une stratégie OG vers OF en utilisant la désignation GraC. Ceci lui permet d'utiliser la comptine des dizaines en énumérant les bandes représentées sur le message (interprétation ordinale avec repérant) puis d'obtenir la désignation parlée en France de la quantité grâce à une interprétation additive « on a déjà quarante, et il m'a dit cinq tout seuls, ça fera quarante plus cinq, ça fait ... ».</td><td>27'02
H : Alors on discute ?
H : (H va vers un groupe et s'accroupit) Alors, vous vous en sortez ou pas ? Dites-moi les garçons. D'après toi il va falloir combien de bandes ? Pour vingt-huit, il fallait deux bandes de dix et huit jetons. Là quarante-cinq il faut ?
H : (A une élève qui passe près d'elle) Tu vas travailler toute seule. Attends, Jihan, on va faire quelque chose : tu prends ta feuille, et tu vas aller travailler toute seule au fond. Toute seule au fond, parce que toi tu as de très bons yeux et tu regardes tes petits camarades.
Un élève : Tenez maîtresse.
H : Non tu le gardes pour le moment. Tu retournes, vous le gardez je vais le prendre après.
H : (parlant à nouveau au groupe auprès duquel elle s'était accroupie) Est-ce que tu es d'accord avec ça ? Quatre bandes de dix (inaudible). Regarde : quatre bandes de dix : dix, vingt, trente, quarante, on a déjà quarante, et il m'a dit cinq tout seuls, ça fera quarante plus cinq, ça fait ?
?: (Inaudible)
H : Il a raison.</td></tr>
<tr><td colspan="3">3ème épisode : l'enseignante récupère les productions des élèves pendant que ces derniers finissent leur tâche</td></tr>
<tr><td></td><td><u>Description</u> :
L'enseignante récupère les productions des élèves pendant que ces derniers finissent leur tâche
<u>Contenu</u> :
L'enseignante récupère les messages et les classe selon qu'ils sont erronés ou non, préparant ainsi la phase suivante. Elle va décider, comme dans le moment de</td><td>28'36
H : (se levant) Alors, vous écrivez vos prénoms. Sabrina euh Clara tu écris ton prénom, Sabrina tu fais toute seule. Alors je vais vous donner. C'est toi qui expliques c'est toi qui as fait. Alors je ramasse maintenant (H ramasse les messages). Tu t'assois correctement, ça y est Djibril ? Tu n'as pas mis ton prénom Djibril. J'ai dit combien ? Un deux trois quatre cinq six, et là tu en veux une bande toute seule ? Ah oui ? Et c'est quarante-cinq, on est d'accord. (Brouhaha)
Alors je vais défaire ceci. Attends, tu vas à ta place, tu vas t'asseoir (H enlève les messages du tableau). Tu déposes ici et tu vas à ta place. Ça y est on m'a apporté les messages, chut, chut !! Charlotte ! Tu nous fatigues tu nous déranges. (Brouhaha)
Ok ! Ça y est, vous avez tous les bras croisés, position d'écoute parce que j'ai besoin de vous pour analyser ce qui se passe au tableau. Mademoiselle tu poses tes fesses, les feutres sont dans les rigoles, je ne veux plus qu'on y touche. Seule Sabrina a le droit de continuer à faire son travail parce qu'elle n'a pas</td></tr>
</table>

	synthèse précédent, de traiter exhaustivement les messages des élèves en commençant par ceux erronés.	tout à fait terminé son message, d'accord ? (*H classe les messages qu'elle a récupérés*) H : (A ?) Je t'ai dit de ne plus toucher à tes feutres, tu croises tes bras et tu écoutes maintenant. 31'10

Mise en commun à propos de la deuxième tâche 31'10 – 43'20		
1[er] épisode : validation des messages des élèves Dans cet épisode l'enseignante va systématiquement afficher au format A3 les messages issus de productions graphiques de type 1 et qui ont été auparavant reformulés à l'oral par les élèves (voir la note de fin de document à ce sujet). L'affichage consiste en des bandes contenant dix carrés et des carrés seuls de même dimension que les carrés sur les bandes. Les productions graphiques de type 2 sont affichées à droite du tableau mais n'y sont pas reproduites.		
	1 .1 Description : Traitement du message A. Une bande de sept, une bande de six, une bande de quatre. Contenu : Le message est une production graphique de type 1 erronée et dont les bandes ne comportent pas dix carrés/boutons. L'enseignante se fie à la désignation orale (OG) « *trois bandes de dix* » donnée par l'élève sans compter le nombre de carrés. Elle traduit la désignation orale en affichant au tableau trois bandes de dix carrés (les dix carrés sont visibles sur chaque bande). L'enseignante veut invalider la réponse à l'aide d'une stratégie OG vers OF en utilisant cette désignation GraC affichée au tableau. Le passage OG vers OF se fait oralement : les bandes sont énumérées par l'enseignante et l'élève prononce la comptine des dizaines au fur et à mesure. Une interprétation ordinale est convoquée ici, sans que l'interprétation arithmétique multiplicative soit	31'10 H : Alors, on y va pour un premier message (*qu'elle a choisi dans une des piles, celle des messages qu'elle estime erronés*) : on va demander à Clara de nous expliquer ce qu'elle a fait. (*H affiche le message – message A - au tableau*). Clara on avait besoin de quarante-cinq jetons, alors tu m'as dit quoi ? On écoute bien Clara, si quelqu'un a quelque chose à dire il lèvera sa main après, une fois qu'elle aura parlé. Vas-y ma grande je t'écoute. Clara : Trois bandes. H : Trois bandes ? Trois bandes de combien ? Clara : Trois bandes de dix. H : Trois bandes de dix. Alors je vais les mettre en plus grand pour voir (*H reproduit le message au tableau à l'aide du matériel qu'elle a présenté en début de séance, ici elle affiche trois bandes de dix carrés solidaires*). Clara elle a demandé trois bandes de dix. Chut, chut ! Tu n'as pas la parole. C'est ça que tu veux Clara ? Trois bandes de dix ? C'est ce que tu as demandé, trois bandes de dix ? D'accord ? Alors, une bande de dix ça fait combien ? Clara: Une bande de dix, dix

explicitement en jeu[iv]. Le fait que « trente » et « quarante-cinq » soient des mots différents suffit à invalider la réponse. L'enseignante demande cependant « *Tu en as commandé plus, moins, tu as fait quoi ? Tu en as commandé suffisamment* ». Comme pour l'épisode 2.5 de la première phase de synthèse, cette question n'est pas nécessaire pour invalider la réponse, mais elle permet de travailler une connaissance que l'enseignante pense au moins acquise pour la plupart. La réponse erronée de l'élève provoque alors un **incident**. L'enseignante décide de guider les élèves pour invalider cette réponse. Elle va donner deux arguments. Elle utilise tout d'abord un tableau comportant les écritures chiffrées des nombres de 0 à 99 qui est affiché : la première ligne est composé des nombres de 0 à 9, la deuxième de 10 à 19, etc. (voir p. 61 du matériel photocopiable de « Cap Maths »). Elle utilise alors une stratégie de comparaison OF/OF (non présence de signifié) à l'aide d'une interprétation ordinale de la numération parlée en France dont les désignations sont associées aux écritures chiffrées correspondantes. Le nombre prononcé en dernier (associé au fait qu'il est écrit après dans la file numérique) désignant un nombre plus grand : « *quarante-cinq il vient après sur la file numérique* ». Ensuite l'enseignante donne un deuxième argument, en constituant des collections (de doigts) à partir des deux désignations. La stratégie n'est pas clairement indiquée par l'enseignante mais les appuis/repérant dix, vingt, trente, quarante sont prononcés et mis en parallèle de la monstration de dix doigts par des élèves (les élèves semblent habitués à cette pratique). Le fait que « *quarante-cinq c'est plus grand que trente* » est alors rendu visible par une comparaison du cardinal de deux collections (de doigts) par perception visuelle globale, sans association terme à terme. A	H : Une bande de dix, dix. Deux bandes de dix ? Clara : Vingt. H : Laissez-la faire. Deux bandes de dix, vingt. Trois bandes de dix ? Clara : Trente. H : Trente. Donc combien as-tu de jetons ici Clara ? (*montrant les trois bandes reproduites*). Clara : Trente. H : Combien en as-tu besoin ? ?: Trente-cinq. H : Non. Qui est-ce qui vient de dire trente-cinq ? Ok, Alexis, viens te mettre devant ici, d'accord, tu t'assois. Tu n'as pas la parole et en plus tu la déranges. Elle était en train de faire son analyse, tu la laisses. Clara : Quarante-cinq. H : Non, tu en as combien en tout ici Clara ? On recommence. Clara : Trente. H : Trente. Et tu en as besoin de combien ? Clara : Quarante-cinq. H : Quarante-cinq. Est-ce que tu penses que tu as commandé ce que tu avais besoin ? Clara: Non. H : Tu en as commandé plus, moins, tu as fait quoi ? Tu en as commandé suffisamment ? Clara: Plus H : Tu as commandé plus que ce que tu avais besoin ? Ah bon ? Regarde bien Clara : toi tu as commandé trente, tu le vois le trente (*montrant « 30 » dans un tableau d'écritures chiffrées de 0 à 99*) ? Et nous on a besoin de quarante-cinq. (Désignant successivement les écritures chiffrées), donc trente et un, trente-deux, trente-trois, trente-quatre, trente-cinq, trente-six, trente-sept, trente-huit, trente-neuf, quarante, quarante et un, quarante-deux, quarante-deux, quarante-trois, quarante-quatre, quarante-cinq. Tu as besoin de ça : quarante-cinq il vient après sur la file

	noter cependant qu'initialement, l'enseignante compare le nombre d'enfants (c'est-à-dire les groupements de dix) mais qu'elle abandonne cette stratégie.	numérique, on est d'accord, donc toi tu penses que trente c'est plus grand ou plus petit que quarante-cinq ? Clara : Plus grand. H : Trente c'est plus grand ? Clara: Non c'est plus petit. H : Alors. Arrête de dire, et après on ne sait plus ce que tu penses, Clara, d'accord. Je veux des mains. Riyad ! Toi, viens-là, et Dounia. Vous me faites trente avec vos doigts. Allez-y ! (*Trois élèves sont venus à droite du tableau montrer leur deux mains)*. Dix, vingt, trente, tu es d'accord ? (A ?) Tu restes là, ici. Ah ben tiens on va aller faire au fond, venez ici les garçons, les quatre du fond et Jihan, vous vous mettez là, de l'autre côté de moi. On y va ? Dix ? Vingt ? Trente ? Quarante ? Je veux quarante-cinq. D'accord. (à ?) Montre bien tes doigts (*Cinq autres élèves sont venus à gauche du tableau : quatre ont montré leur deux mains et le dernier une seule main)*. On est d'accord ? Où est-ce qu'il y a le plus d'enfants ? Ici, ou là ? (*montrant le groupe de cinq élèves puis celui de trois*). ?: Ici. H : Non, non, on laisse parler Clara. Où est-ce qu'il y a le plus d'enfants ? Ici ? Où est-ce qu'il y a le plus de doigts levés ? Là, ou là ? Et ho, Sabrina, elle a pas besoin de toi. Clara ? Donc là j'ai trente doigts levés, levez bien vos doigts les trente, et là j'en ai quarante-cinq de doigts. Quarante-cinq c'est plus grand que trente. Clara : Ça c'est plus grand, ça c'est *(inaudible)*. H : D'accord. Donc toi tu as demandé ça, est-ce que tu auras assez de jetons pour remplir ton Ziglotron qui en a besoin, eh ben non ! Allez vous asseoir, donc Clara tu as compris que tu t'étais trompée ? Clara : Oui. H : Alors Clara, elle s'est trompée, mais la prochaine fois Clara elle va réussir, d'accord Clara ? Alors tu écoutes bien parce que je veux que tu apprennes
	1.2	35'30

<u>Description</u> : Traitement du message B. Six bandes de dix, et un carré seul. <u>Contenu</u> : Le message est une production graphique de type 1 erronée. L'enseignante se fie à la désignation orale (OG) « *six bandes de dix, et un* » donnée par l'élève sans compter le nombre de carrés. Un élève donne directement la traduction OG vers OF, et l'enseignante ne demande pas de justification, procédant ainsi à une évaluation positive de la réponse « *soixante-et-un* ». De même le message est invalidé (et placé ostensiblement à droite du tableau) sans justification. A noter cependant que pour la première fois l'enseignante a demandé pourquoi (et non comment) un tel message a été produit, ce qui aurait pu amener à une explication de la stratégie OF vers GraC (voire EC vers GraC), enjeu de la séance prescrit par le manuel, mais elle n'a pas demandé d'approfondissement à la réponse de l'élève « *parce qu'il croyait que c'était bon* ».	H : Bon attention : on va regarder le message de Djibril (*H affiche le message – message B - au tableau*). Djibril, chut, chut, chut ! Baissez les mains, asseyez-vous, on écoute bien. Djibril : J'ai pris six bandes de dix, et un. H : Six bandes de dix. Djibril : Et un jeton tout seul. H : D'accord. D'après vous est-ce qu'il est bon ce message ? Des élèves : Non. Romain: Ça fait soixante-et-un. ?: Ça fait soixante. H : Alors, Romain dit « ça fait soixante-et-un », est-ce que tu penses qu'il est bon ton message ? Pourquoi tu as demandé ce message-là ? Tu t'es trompé ? ?: Parce qu'il croyait que c'était bon. H : Il croyait que c'était bon oui. Allez hop, le message il va là.
<u>1.3</u> <u>Description</u> : Traitement du message C. Trois bandes de dix <u>Contenu</u> : Le message est une production graphique de type 1 erronée. L'enseignante se fie à la désignation orale (OG) « *trois bandes de dix* » donnée par l'élève sans compter le nombre de carrés (il y en a effectivement le bon compte ici). Elle traduit la désignation orale en affichant au tableau trois bandes de dix carrés (les dix carrés sont visibles sur chaque bande). L'enseignante va invalider la réponse à l'aide d'une stratégie OG vers OF en utilisant ensuite le fait que le cas a	36'01 H : On va regarder maintenant le message…je ne sais pas qui c'est ça. A qui c'est celui-là ? Jihan. Jihan, tu peux nous expliquer ? (*H affiche le message – message C - au tableau*). Alors Jihan. Jihan : J'ai mis dix trois bandes. H : Non, dix trois bandes ça veut dire quoi ? Je ne comprends pas moi. Là déjà elle va s'asseoir, merci, après ? Jihan : Dix bandes de dix. H : Dix bandes de dix ? Tu es sûre ? ?: Non. ? : Non, trois bandes. H : Moi je vois trois bandes de dix. Combien tu as demandé de

déjà été traité (message A). Elle aurait pu d'ailleurs ne pas faire exprimer la quantité dans la désignation parlée en France, en identifiant simplement les messages. Un **incident** survient dans le passage par l'élève GraC vers OG : l'élève dit successivement « *dix trois bandes* » et « *dix bandes de dix* ». L'enseignante gère cet incident en changeant d'intervenant et en évaluant positivement la réponse donnée alors « *moi je vois trois bandes de dix* ». A noter ici que l'enseignante indique par « *je vois* » le lien spécifique entre la production graphique de type 1 et la désignation orale des groupements employés.	bandes ? Jihan : Quarante-cinq. H : Non. Quarante-cinq c'est ce dont tu avais besoin. Mathis et Inès ! Quarante-cinq jetons c'est ce dont tu avais besoin. Est-ce que toi tu as demandé quarante-cinq ? Jihan : Non. H : Non, tu as demandé trois bandes. Trois bandes : on a dit qu'une bande ça faisait dix, deux bandes ça fait ? Jihan: Vingt. H : Vingt. Trois bandes ça fait ? Jihan : Trente. H : Donc tu as demandé le même message que Clara, tu n'as pas demandé suffisamment de jetons. Moi ça ne me fait pas rire.
<u>1.4</u> <u>Description</u> : Traitement du message D. Une bande de dix à laquelle est accolé « 2 » et un carré auquel est accolé « 8 ». <u>Contenu</u> : Le message est une production graphique de type 2. La désignation orale (OG) « *une bande de dix* » donnée initialement par l'élève correspond à une description de ce qui est vu (comme pour une production graphique de type 1). La désignation orale correspondante devrait donc être une traduction de « signe à signe ». Ceci crée un **incident** que l'enseignante gère en donnant la réponse exacte. La désignation orale n'est pas traduite par un affichage ni écrite au tableau. L'enseignante va invalider la réponse à l'aide d'une stratégie OG vers OF. Un élève donne directement la traduction parlée en France « vingt-huit » qui est évaluée	37'10 H : On va demander, c'est Anaelle ça ? C'est celui de tout à l'heure ou celui de maintenant ? (*H affiche le message – message D - au tableau*). Anaelle : C'est celui de maintenant. H : C'est celui de maintenant. Alors combien il fallait, Anaelle ? Anaelle : Quarante-cinq. H : Quarante-cinq. Et tu as demandé combien ? Anaelle : J'ai demandé une bande de dix. H : Non, je vois un « deux » moi. Anaelle : Deux bandes de dix, et… H : Et huit petits jetons. Ça fait combien ça ? Deux bandes de huit, euh deux bandes de dix et huit petits jetons ? Maé ? Maé : Vingt-huit. H : Ça fait vingt-huit. Alexis est-ce que tu penses que votre message est correct ?

négativement par l'enseignante avec l'accord des élèves : l'argument sous-jacent est que « vingt-huit » ne désigne pas la même quantité que « quarante-cinq ».	Alexis : Non H : Alors ? Pourquoi vous n'avez pas demandé quarante-cinq ? On dirait que vous êtes restés au message de vingt-huit de tout à l'heure, hein ? Alors, qu'est-ce qu'on fait ? Ce message on le met là-bas.
1.5 Description : Traitement du message E. Une bande de dix et cinq carrés isolés. Contenu : Le message de l'élève est *a priori* une production graphique de type 1. Au vu des connaissances de l'élève visibles par la suite dans les échanges, il n'est pas exclu que cette dernière sache qu'il faut bien un nombre supérieur de bandes de dix (elle n'en indique qu'une seule) mais qu'elle ne sache pas comment les obtenir (aucune stratégie OF vers GraC ou OG n'a été en effet indiquée pour l'instant). L'enseignante se fie à la désignation orale (OG) « *une bande de dix et cinq* » donnée par l'élève. Elle traduit la désignation orale en affichant au tableau une bande de dix carrés (les dix carrés sont visibles) et cinq carrés isolés. L'élève aidée de l'enseignante va invalider sa réponse à l'aide d'une stratégie OG vers OF en utilisant cette désignation GraC affichée au tableau. Le passage OG vers OF n'est pas explicite par l'élève et l'enseignante ne demande pas d'explication. La non validation provient du fait que « quinze » est une désignation différente de « quarante-cinq ». Un **incident** survient quand l'élève déclare ne pas savoir modifier son message. L'enseignante va relancer de manière neutre l'élève pour qu'elle arrive à obtenir le bon nombre de bandes de dix. L'élève va ainsi travailler durant le reste de la phase de synthèse. L'enseignante ne s'informera pas de celle-ci : les	38'02 H : On va regarder le message de Sabrina (*H affiche le message – message E - au tableau*). Alors Sabrina c'est un petit peu confus j'aimerais bien que tu m'expliques. Alors je t'écoute Sabrina. Sabrina : En fait j'ai demandé… ?: *(Inaudible)* H : On ne coupe pas la parole de ses camarades. Combien de bandes de dix tu veux ? Sabrina : Il y a dix, euh, dix… H : Il y a dix jetons dans la bande, d'accord ? Combien veux-tu de bandes de dix? Sabrina : Une. H : Une seule ? Alors elle veut une bande de dix. Alors une bande de dix, la voilà. Et après tu en veux combien tout seuls ? Sabrina : Cinq. H : Cinq petits jetons tous seuls. ?: Ça fait… H : Chut ! Laisse-la, on va la faire réfléchir elle-même. (*H reproduit le message au tableau à l'aide du matériel qu'elle a présenté en début de séance, ici elle affiche une bande de dix carrés solidaires et cinq carrés isolés*). Alors un, deux, trois… ? ?: Quatre, cinq, six. H : Chut ! Quatre.., mais arrêtez de vous *(inaudible)*. Cinq. Sabrina c'est bien ce que tu as demandé ? Une bande de dix et cinq tout seuls ? C'est bien ce que tu as demandé ? Sabrina : Non. H : Non. Est-ce que j'ai refait là ce que toi tu avais demandé ? Oui, mais explique-moi.

réponses correctes vont cependant être données par la suite (sans pour autant que soient indiquées des stratégies).	Sabrina : Ça fait quinze. H : Ça fait quinze, d'accord. Et toi tu voulais combien ? Sabrina : Quarante-cinq. H : Quarante-cinq. Donc qu'est-ce qu'il faudra que tu fasses pour modifier ton message ? Est-ce que tu sauras le modifier ton message ? Croisez vos bras s'il vous plait, écoutez Sabrina qui réfléchit. Sabrina, qu'est-ce qu'il faudrait que tu fasses pour modifier ton message ? Est-ce que tu saurais le modifier ? Pas trop ? Sabrina : Non. H : Pas trop ? Alors on va laisser. Sabrina le message il en manque, on est d'accord ? Quinze, il t'en manque ou tu en as demandé trop ? Sabrina : Il en manque. H : Il t'en manque.
<u>1.6</u> <u>Description</u> : Traitement du message F. Quatre bandes de dix, et cinq carrés isolés. <u>Contenu</u> : Le message est une production graphique de type 1 correcte. L'enseignante se fie à la désignation orale (OG) « *quatre bandes de dix* et *cinq tout seuls* » donnée par l'élève, désignation qui est correcte. Elle traduit la désignation orale en affichant au tableau quatre bandes de dix carrés (les dix carrés sont visibles) et cinq carrés isolés. Cet affichage restera tel quel jusqu'à la fin de la synthèse, indiquant ainsi que c'est une des réponses attendues. L'enseignante évalue positivement le message avec l'accord des élèves. Aucune explication n'est donnée, en particulier il n'y a pas de traduction de OG ou GraC vers OF. Certains élèves disent	40'10 Bon on va regarder maintenant le message de Charlotte et David (*H affiche le message – message F - au tableau*).. Alors Charlotte et David vous avez demandé quoi ? Charlotte : Quatre bandes de dix. H : Quatre bandes de dix. Charlotte : Et quatre tout seuls. H : Et combien tout seuls ? Charlotte : Cinq. H : Et cinq tout seuls (*H reproduit le message au tableau à l'aide du matériel qu'elle a présenté en début de séance, ici elle affiche quatre bandes de dix carrés solidaires et cinq carrés isolés*). Est-ce que vous êtes d'accord avec ce message-là ? Des élèves : Oui. D'autres : Non il y a quatre petits jetons tout seuls. H : Non il y a un, deux, trois, quatre, cinq c'est parce que là elle a fait un rond double, parce que de loin tu ne vois pas bien. Mais elle a

« non » quand elle demande leur accord, ce qui crée un **incident** : la réponse « non » est ignorée par l'enseignante.	raison c'est pas très très bien fait. Alors est-ce que tout le monde est d'accord avec ce message ? Des élèves : Oui. D'autres : Non.
1.7 Description : Traitement du message G. Quatre bandes (qui comportent entre six et neuf carrés suivant la bande) accompagnées chacune de « 10 », et cinq carrés isolés. Contenu : Le message est une production graphique de type 1, comportant en plus une information sur le nombre de carrés par bande donnée à l'aide de l'écriture chiffrée : les bandes elles ne comportent pas dix carrés. L'enseignante indique elle-même la désignation orale des groupements (OG) « *quatre bandes* » en les comptant. L'enseignante évalue positivement le message avec l'accord des élèves. Aucune explication n'est donnée. En particulier il n'y a pas de traduction de OG ou GraC vers OF. Seule une indication sur le fait que le « 10 » porte à confusion, ce qui est le cas par rapport aux productions graphiques de type 2 déjà utilisées par les élèves. Ceci met l'accent sur le fait que ces productions graphiques comportent des conventions que le lecteur doit connaître. Ici les élèves ont voulu mettre l'accent sur le fait que la bande comportait dix carrés (noté par l'écriture chiffrée « 10 »), ce qui ne va pas dans le sens du parallèle à faire entre l'écriture chiffrée et le nombre de groupements.	40'57 H : Le message de Romain et Inès (*H affiche le message – message G - au tableau*). : alors on des bandes, on a un, deux, trois, quatre bandes, et alors la petite flèche avec dix, c'est pour montrer qu'il y a dix jetons, mais on va peut-être plus le faire ça, parce là on a l'impression que tu demandes dix bandes, d'accord ? Donc on a quatre bandes de dix et cinq tout seuls. Le même message pour Gabriel et Anita, alors là on s'est un peu trompé, mais on a la même chose pour Maé, et on a la même chose pour Dounia et Lisa-Joyce. D'accord ? Tout le monde est ok avec ce message-là ? Des élèves : Oui .
1.8 Description : Traitement du message H Une bande de dix carrés accompagnée de « 4 »,	41'40 H : On va regarder maintenant les messages des autres. Johanna, est-ce que tu te souviens de ce que tu as fait comme message ? Qu'est-ce que tu avais fait comme message ? (*H affiche le message H au*

et cinq carrés isolés du message I, Une bande de dix carrés accompagnée de « 4 », un carré isolé auquel est accolé « 5 ». du message J, Une bande (composée de quatre carrés) accompagnée de « 4 », un carré isolé auquel est accolé « 5 ». du message K, Une bande (sans carrés) accompagnée de « 4 », un carré isolé auquel est accolé « 5 ». Et traitement de messages oraux qui sont des productions graphiques de type 2 exactes. Contenu : Un premier message (message H) est une production graphique hybride qui sera évaluée positivement sans relever son caractère particulier (il sera placé dans les productions graphiques de type 2). Ceci souligne à nouveau les différentes possibilités que les élèves emploient. Tous les autres messages sont des productions graphiques de type 2, deux étant affichés, mais aucun reproduit au tableau (c'est la reproduction d'une production graphique de type 1 correcte qui est restée affichée). Les productions graphiques de type 2 sont exprimées à l'oral par l'enseignante, cette expression étant la même que pour les productions graphiques de type 1, les élèves ne peuvent percevoir la différence. L'enseignante évalue positivement les messages des élèves sans argumenter (ils sont placés à gauche du	*tableau*). Johanna : J'ai fait une bande de dix, j'ai fait un petit trait pour montrer que j'en voulais quatre, et j'ai fait cinq tout seuls. H : D'accord. Alors comme…, qui a fait ce message-là ? (*H affiche le message I au tableau, puis d'autres*).Vous deux, très bien. Alors c'est plutôt Axel qui a fait le message parce qu'on a vu ensemble que Riyad n'avait pas encore trop bien compris. Tu commences à comprendre Riyad ? Ça va mieux ? Non, toujours pas ? Alors on verra après. 42'05 H : Donc Johanna, Baptiste, le groupe Alexandre, Mathis et Axel nous ont fait une bande de dix et ils ont marqué quatre, et on a un petit jeton isolé, et on a marqué cinq ? (*H désigne le message J au tableau*). Alors ici, Mathis et Anais-Ludivine, c'est pour faire quoi ? C'est pour symboliser la bande ? C'est ça ? (*H désigne le message K au tableau*). Mathis : C'est pour faire la bande H : D'accord, ok, pas de souci, c'est bon.

	tableau), en particulier sans l'aide d'une stratégie OG ou GraC vers OF.	
2ème épisode : éléments d'institutionnalisation		
	<u>Description</u> : L'enseignante met en relief certains points. <u>Contenu</u> : L'enseignante donne à nouveau aux élèves une information sur la validité de leur réponse. La production graphique de type 1 est restée au centre du tableau, mais ce sont les productions graphiques de type 2 qui sont mises en avant. Nous notons qu'elles peuvent permettre ultérieurement de faire un lien avec l'écriture chiffrée.	43' H : On avait vu qu'on pouvait symboliser au maximum et on pouvait même faire un trait éventuellement, quand on avait travaillé sur les problèmes. (*H montre les messages qui ont été au fur et à mesure affichés à gauche du tableau : les messages F, G, H, I. Sur ce côté de tableau est resté aussi le dernier message reproduit au tableau à l'aide du matériel : quatre bandes de dix carrés solidaires et cinq carrés isolés*) Ok, donc tous ceux-là semblent avoir bien compris comment on pouvait faire son message, établir son message. Maintenant, est-ce que vous avez des choses à rajouter ? 43'20

Troisième tâche : lancement, réalisation et mise en commun 43'20 – 46'07

1er épisode : lancement		
	<u>Description</u> : L'enseignante continue la séance en donnant une nouvelle tâche. <u>Contenu</u> : L'enseignante ne suit pas les prescriptions du manuel (une fiche Ziglotron comportant 42 carrés, puis 50, 83, et 38 boutons) avec un message écrit (et non dessiné) afin de relier les chiffres de l'écriture chiffrée et les nombres en jeu dans le message. Elle donne pour tâche d'obtenir une désignation orale des groupements (groupements de dix) à partir d'une désignation parlée en France, le contexte « Ziglotron » étant évoqué. La réponse attendue est sous la forme « ... bande (de dix) et ... jetons/boutons seuls », mais cette formulation n'est pas indiquée, elle est implicitement donnée par la	43'20 H : Moi je vais vous redemander, on ne va pas travailler sur les fichiers aujourd'hui, mais je vais vous redemander maintenant tout seuls de me dire…on va travailler comme ça, alors là j'ai quarante-cinq, attention il va falloir travailler très vite dans sa tête, je veux trente-trois (*H écrit « 33 » au tableau*). Réfléchissez tout seuls et lorsque vous avez le message dans votre tête vous levez la main.

phrase « *le message dans votre tête* ». La tâche fait donc travailler l'un des passages d'une des stratégies possibles pour résoudre la tâche précédente. Ceci peut indiquer que l'enseignante attendait un type de stratégie OF vers OG dès la phase précédente. A noter que le choix de « trente-trois » ne permet pas de distinguer le nombre de bandes et le nombre de « jetons » seuls dans la formulation.	
2ème épisode : réalisation de la tâche par les élèves	
<u>Description</u> : Les élèves réalisent la tâche mentalement. <u>Contenu</u> : L'enseignante laisse une vingtaine de secondes de réflexion.	43'50 H : Tout seul ! C'est marrant, moi quand je réfléchis je n'ai pas la bouche qui parle.
3ème épisode : mise en commun	
<u>Description :</u> L'enseignante interroge un élève et va donner la réponse qu'elle attend à partir de ce que dit l'élève <u>Contenu</u> : Les élèves qui répondent ont compris que dans la formulation orale du message il s'agit d'employer le mot bande. L'enseignante découpe la réponse en deux parties. Elle demande tout d'abord le nombre de bandes, validant la réponse correcte de l'élève en utilisant la comptine des dizaines énumérée grâce aux bandes de dix qu'elle affiche. Elle facilite ainsi la tâche pour la suite, le « trente » ayant été obtenu, elle insiste sur « trente-trois » qui permet d'entendre le trois (interprétation ordinale	44'10 H : Alors, qui est-ce qui pense avoir le message dans sa tête ? Alexis, non ? Trente-trois. Sabrina ? Je veux trente-trois jetons je vais demander combien de bandes de dix ? Clara tu sais ? Combien ? Clara : Il faut mettre trois bandes de dix. H : Sabrina est-ce que tu es d'accord avec trois bandes de dix ? Sabrina : Oui. H : Oui. Alors, trois bandes de dix : les voilà (*H reproduit ce que vient de dire l'élève au tableau à l'aide du matériel qu'elle a présenté en début de séance, ici elle affiche trois bandes de dix carrés solidaires et cinq carrés isolés*), attention ici je compte ça fait dix. Des élèves : Vingt, trente. H : Attention je veux trente-trois. ?: Trois petits jetons tout seuls. H : Trois petits jetons tout seuls. (*Elle affiche trois carrés isolés*) Chut ! Jihan, ici j'en ai combien ? (*entourant les trois bandes*) Jihan : Trente.

	avec repérant). Cependant dans la vérification qu'elle veut entreprendre (toujours OG vers OF en utilisant une GraC comportant des groupements de dix), les élèves énoncent dix, vingt, trente au fur et à mesure que l'enseignante désigne une à une les bandes et continuent par quarante quand elle pointe un carré, ce qui créé un **incident**. L'enseignante guide l'élève en lui indiquant le changement d'objet *« là il y en a dix là-dedans ? (montrant un carré) »* et en l'incitant à reprendre le comptage à partir du repérant « trente ». Elle indique ensuite ce qu'il doit comprendre : « *tu as compris quand il est tout seul on ne dit pas dix. On ne continue pas à compter comme ça quand on s'entraîne à compter de dix en dix* ». A noter en outre que cette élève n'a pas été la seule à faire cette erreur.	H : Et là j'en ai ? (*montrant les trois carrés isolés*) ?: Quarante. ?: Trois H : Trois. Donc ça fait dix. Des élèves : Vingt, trente, quarante. (*H indique successivement les trois bandes de dix puis un premier carré isolé*). H : Non ! N'importe quoi, vous vous mettez tous à la place pour la bouche, parce que vous induisez Jihan en erreur. Jihan on y va. Jihan : Dix, vingt, trente, quarante. (*H indique à nouveau successivement les trois bandes de dix puis un premier carré isolé*). H : Là il y en a dix là-dedans ? (*montrant un carré*) Non mais c'est pas possible, tu la laisses réfléchir, si je l'ai interrogée elle, c'est pas pour rien. Dix, vingt, trente. Jihan : Trente et un, trente-deux, trente-trois (*H indique à nouveau successivement les trois bandes de dix puis les trois carrés isolés*) H : Est-ce qu'il y a bien le message pour avoir trente-trois ? Des élèves : Oui ; H : Tu as compris quand il est tout seul on ne dit pas dix. On ne continue pas à compter comme ça quand on s'entraîne à compter de dix en dix, D'accord ? Chana tu as compris ? 46'07

Quatrième tâche : lancement, réalisation et mise en commun 46’07 – 51’15	
1[er] épisode : lancement	
<u>Description</u> : L’enseignante indique une nouvelle tâche. <u>Contenu</u> : En proposant directement une nouvelle désignation parlée en France, sans autre précision, l’enseignante indique de manière implicite la même tâche que celle qui précède. Le nombre en jeu est ici plus petit mais proche d’un de ceux déjà traités (vingt-huit). Ici le chiffre des dizaines est différent de celui des unités.	46’07 H : Attention un autre message : réfléchissez bien parce que je vais interroger une personne différente. (*H efface « 33 » et écrit « 21 »*). ?: Vingt et un.
2[ème] épisode : réalisation de la tâche par les élèves	
<u>Description</u> : Les élèves réalisent la tâche mentalement. <u>Contenu</u> : L’enseignante laisse une vingtaine de secondes de réflexion comme précédemment.	46’22 H : Chut ! Réfléchissez les filles, vite. Anaelle, réfléchis aussi.
3ème épisode : mise en commun	
<u>3.1</u> <u>Description</u> : L’enseignante interroge un élève et va donner la réponse qu’elle attend à partir de ce que dit l’élève <u>Contenu</u> : L’enseignante procède de la même façon que précédemment en demandant d’abord le nombre de bandes de dix puis l’élève dit spontanément le nombre de « tout seuls ». La vérification se fait à nouveau par une stratégie OG vers OF en utilisant une GraC comportant des groupements de dix, les élèves énoncent dix, vingt, au fur et à	46’35 H : Je vais interroger…, je sens que ça fume chez Riyad. Allez Riyad, à toi Riyad : Vingt et un. H : Vingt et un. Je vais demander combien de bandes de dix ? Riyad : Deux. H : Deux bandes de dix. Vous laissez faire, on voit après si on est d’accord ou pas. Deux bandes de dix. Riyad : Et un tout seul. (*H affiche enlève l’affichage précédent et affiche deux bandes de dix et un carré*) H : Et un tout seul. Est-ce que vous êtes d’accord avec ça ? (*montrant ce qu’elle vient d’afficher*) Des élèves : Non. D’autres : Oui. H : Oh ! On n’est pas à la foire ici. Toi, mais qu’est-ce qu’elle fait debout ?

	mesure que l'enseignante dit « *une bande* » puis « *deux bandes* » et demande à chaque fois « *combien* ». Cette fois-ci, l'enseignante marque l'arrêt à vingt (il n'y a pas de troisième bande) et indique la spécificité du dernier objet « *et là, tout seul, ça fait ?* ». Elle obtient ainsi la désignation correcte. En facilitant la tâche, elle n'a pu vérifier si le savoir qu'elle avait indiqué précédemment a été réinvesti. Elle valide ensuite par « *d'accord. Dix, vingt et un* » qui met en jeu une interprétation ordinale avec repérant (du fait qu'il n'y a pas de problème de la structure additive explicitement en jeu).	Djibril es-tu d'accord avec ce message ? Djibril : Oui. H : Alors je compte. Ici, dans une bande ça m'en fait combien ? Djibril : Dix. H : Deux bandes ça fait combien ? Djibril : Vingt. H : Et là, tout seul, ça fait? Djibril : Vingt et un. H : D'accord. Dix, vingt et un.
	3.2 Introduction d'un savoir nouveau <u>Description</u> : L'enseignante demande aux élèves d'écrire d'une autre façon, attendant une égalité du type 10+10+1 =21 <u>Contenu</u> : Cette égalité est indiquée par le manuel pour la séance 3, et l'enseignante s'y réfère. Elle tente de l'obtenir du fait que les élèves ne l'ont pas produite. C'est en effet à partir de cette écriture que l'enseignante avait le projet de rendre visible le nombre de « dix », afin de faciliter le passage OF vers OG. Par manque de temps, elle ne va pas aller au bout de ce projet. La demande de l'enseignante n'est pas immédiatement comprise par les élèves.	47'25 H : Est-ce que quelqu'un pourrait me donner une façon d'écrire ? Dounia ? Non, non là j'ai fait le message. Si je veux écrire ? Dounia: Il faut une autre façon. H : Oui, dis-moi. Dounia: Un jeton et vingt. H : Non, c'est pas ça que je veux. Ça je peux l'écrire comment ? (*montrant les deux bandes et le carré au tableau*) Est-ce qu'à chaque fois que je vais vouloir dix, je vais dessiner une bande ? Dounia: Non on peut écrire dix. H : Ok, je peux écrire dix (*écrivant « 10 » au tableau*) 48'15 ?: Oui mais après comment on sait que c'est une grande bande ? H : Est-ce que tu as besoin de savoir que c'est une grande bande ? Tu as dix (A ?) Tu vas te calmer ? Tu vas à ta place. Jihan, je vais t'attacher ! Alors là, si j'écris dix, je sais que c'est un paquet de dix. Eh bien tout de même je vais mettre…, allez si, allez je le fais. Est-ce que vous voulez que je vous apprenne un mot ? Un

Alors qu'elle écrit « 10 », une remarque d'un élève va créer un **incident** : « *Oui mais après comment on sait que c'est une grande bande* ». En effet dix indique une quantité qui n'est pas *a priori* en bande. Il est possible que dans l'objet « bande » des élèves retiennent (aussi, surtout ?) autre chose que le nombre de jetons qu'il contient. En effet ce sont toujours des bandes de dix qui sont en jeu. Le cardinal d'une bande est donc nécessairement fixé, alors que dans la situation de communication de la tâche « Ziglotron », c'est le type de conditionnement que les élèves doivent avant tout indiquer (« bande » ou « jeton »). L'enseignante va donner une réponse à l'élève qui permet de décontextualiser les « bandes de dix » en introduisant le mot dizaine qui a l'avantage d'avoir un nom qui fait référence à la fois à l'idée de groupement, de conditionnement, d'objet unitaire (<u>une</u> dizaine) et à la quantité qu'il contient, « dix ». Ceci permet de concilier alors les préoccupations de l'élève (le type de conditionnement) et de l'enseignante (le nombre dans un paquet/bande).
A noter que l'égalité validée 10+10+10+1=21, est erronée, ce qui peut indiquer que l'objectif de l'enseignante est tout d'abord d'obtenir une telle écriture et non ici de compter les « 10 ». En outre,

mot compliqué ?
Les élèves : Oui.
H : Vous aimez bien les mots compliqués.
Les élèves : Oui.
H : Alors, quand on a un paquet de dix comme ça (*montrant une bande de dix affichée*), on dit aussi que ça s'appelle une ? Je vous l'ai déjà dit une fois, une dizz… ?
Les élèves : Zaine !
H : Une dizaine. Qui est-ce qui s'en souvient ?
Des élèves : Moi.
H : Une dizaine. Alors vous me rappelez ça ? Une ?
Les élèves : Une dizaine.
H : Encore !
Les élèves : Une dizaine ! Une dizaine ! Une dizaine.
H : Stop, stop ! Arrêtez !
Ok Charlotte, une dizaine, là-bas (*montrant une place*). D'accord ? Je t'ai déjà dit qu'on n'était pas à la foire ici, donc tu te mets là-bas, et quand tu seras calmée tu retourneras à ta place en demandant l'autorisation. Tu te mets dans l'autre sens, je n'ai pas dit le piquet ! Une dizaine. Une dizaine c'est quoi Alexandre ?
Alexandre : C'est un paquet de dix.
H : Un paquet de dix. Est-ce que tout le monde est d'accord ?
Des élèves : Oui
H : Alors, ou on peut dire une dizaine, on peut dire un paquet de dix, un groupe de dix, une bande de dix. Mais quand on est grand, et vous vous allez devenir grands, vous grandissez. Et bien au lieu de dire un paquet de dix, on dira une… ?
Des élèves : Dizaine.
H : D'accord ? Ce n'est pas compliqué ?
49'50
H : Alors, une dizaine je l'écris comment ? Je l'écris ?
?: Dix
H : Je l'écris dix (*montrant « 10 » écrit au tableau*).
Alors Sabrina, je voudrais écrire ça (*montrant le tableau*) avec des nombres, on écrit quoi ?
Sabrina : Dix.

	l'égalité n'est pas reliée à un problème de la structure additive. La première partie 10+10+10+1 symbolise une production graphique de type 1 (ou/et une désignation orale des groupements de dix), les bandes (de dix) étant traduites par la désignation parlée en France de leur cardinaux (sous sa forme écrite « 10 »). La deuxième partie « 21 » est la forme écrite chiffrée de la désignation parlée en France du nombre de boutons manquants. Cette égalité permet ainsi de relier la question « vingt et un » et la réponse « deux bandes de dix et un », la justification ayant été obtenue par un comptage (numération ordinale avec repérant) effectué sur une production graphique de type 1, symbolisée par le nombre de dix (« 10 »). L'écriture permet de mettre en relief le cardinal des paquets/bandes.	H : Dix, après ça j'écris comment ? Sabrina : Plus. H : Plus *(écrivant « + » à droite du « 10 »)* ? Sabrina : Un. H : Plus un *(écrivant « 1 » à droite du « + »)* Sabrina : Egal. H : Egal *(écrivant « = » à droite du « 1 »)* ? (*Des élèves lèvent le doigt*) On la laisse faire, on corrigera après s'il y a besoin. Chut, chut ! Sabrina : Onze. H : Egale onze *(écrivant « 11 » à droite du « = »)*. Ah, mais moi, je ne veux pas onze. Là est-ce que j'ai onze Sabrina là ? Tout ça, est-ce que j'ai onze ? Est-ce que j'ai onze ? Sabrina : Non. H : Non. Alors, Chana, tu peux me le faire le message écrit avec des nombres ? Chana : Deux bandes de dix. H : Alors deux bandes de dix je vais écrire comment ? Chana : Dix petits…, dix bandes. H : Non. Johanna ? Johanna : Dix plus dix plus dix plus un. H : Dix plus dix plus dix plus un égale vingt et un (*est écrit 10+10+10+1=21*), d'accord ? Tout le monde est d'accord avec ça ? Romain tu n'es pas d'accord on dirait ? Romain : Si. H : Tu es d'accord ? 51'15

Cinquième tâche : lancement, réalisation et mise en commun 51'15 – 55'18

1er épisode : lancement

	<u>Description</u> : L'enseignante indique une nouvelle tâche. <u>Contenu</u> :	51'15 H : Ok, attention je vous redonne un message c'est le dernier, après ce sera l'heure d'aller manger. Charlotte, à ta place. Attention à toi (*elle efface le tableau*)

Comme précédemment, en proposant directement une nouvelle désignation parlée en France, sans autre information, l’enseignante indique de manière implicite la même tâche que celle qui précède. Le nombre en jeu « quarante-trois » est ici plus grand, mais proche d’un de ceux déjà traités (quarante-cinq) et le chiffre des dizaines est différent de celui des unités.	Attention, Sabrina, quelque chose d’important à me dire ? Sabrina : Des fois on est dans les dizaines, dans les trentaines, dans les… H : Oui, oui. ?: Des centièmes, des millièmes mêmes ! H : Oui. Chut, chut ! Attention, tout le monde est prêt pour le message ? Les élèves : Oui. H : Euh…. ?: Trente-six ? ?: Quatre-vingt-quinze ? H : Non. Quarante… (*en écrivant « 4 »*) ?: Quarante-sept ! Des élèves : Trois. (*H a écrit « 3 » à droite du « 4*). H : Quarante-trois. Allez c’est parti.
2ème épisode : réalisation de la tâche par les élèves	
Description : Les élèves réalisent la tâche mentalement. Contenu : L’enseignante laisse une vingtaine de secondes de réflexion comme précédemment.	51’50 H : : vous cherchez le message dans votre tête, je ferme les yeux, chut ! (*Plusieurs élèves lèvent le doigt*) ?: Je l’ai déjà ! H : Tu l’as déjà ? Dis-le moi dans l’oreille (*l’élève lui dit à l’oreille*). Oui. (*H écoute à l’oreille la réponse d’un autre élève, pendant que d’autres lèvent le doigt*).
3ème épisode : mise en commun	
3.1 Description : L’enseignante interroge un élève et va indiquer la réponse qu’elle attend à partir de ce que dit l’élève. Contenu : L’élève donne une réponse erronée « *trois paquets de dix et trois* », ce qui crée un **incident**. L’enseignante va guider l’élève pour invalider sa réponse. Elle utilise à nouveau une stratégie OG	52’10 H : Je vais demander à Djibril (*ce n’est pas un des élèves précédents*) Djibril : Trois paquets de dix. H : Combien ? Djibril : Trois paquets de dix avec ... H : Trois paquets de dix ? ?: Non, c’est faux. ?: C’est trois. Chut, on écoute, Jihan s’il te plait. Il m’a dit trois paquets de dix (*affichant trois bandes de dix au tableau*). On a dit trois bandes de dix.

	vers OF en utilisant une GraC comportant des groupements de dix. Elle commence par valider le « trois » en montrant les trois carrés seuls. De ce fait elle utilise une interprétation ordinale avec repérant (il n'y a toujours pas de problème de la structure additive) qui identifie ce qui suit après le repérant à la désignation parlée en France du nombre d'objets non groupés : cette identification n'est pas rendue explicite. Les élèves énoncent dix, vingt, au fur et à mesure que l'enseignante énumère les bandes. Au moment de passer au carré, un élève dit « quarante » au lieu de « trente et un » ce qui provoque un type d'**incident** déjà rencontré dans cette séance. L'enseignante ignore l'erreur de l'élève et guide la classe vers la réponse correcte « *Trente et… ?*». La désignation donnée par l'élève ayant été traduite par sa désignation parlée en France, l'enseignante demande à l'élève d'émettre un jugement de validité sur sa réponse, ce qu'il fait en l'invalidant (aucune argumentation n'est donnée). Via la proposition « *Quatre bande de dix, et trois tout seuls* » d'un élève qu'elle évalue positivement, l'enseignante permet à chaque élève d'avoir une évaluation de la validité de sa réponse.	Djibril : Et trois. H : Trois dizaines, et combien tout seuls ? Combien tout seuls, Djibril ? Djibril : Trois. H : Et trois (*affichant trois carrés au tableau)*. Alors, est-ce que j'ai bien les trois tout seuls qui sont là ? Des élèves : Oui. H : Est-ce que tout le monde est d'accord pour le trois? Des élèves : Oui. H : Pour le trois on est d'accord. Mais là on compte, Djibril : une bande dix ça fait ? Djibril : Vingt. ?: Dix. H : Une bande de dix ça fait dix. (*H montre une première bande*) Les filles là vous arrêtez un peu ? Djibril: (*H montre une deuxième bande*) Vingt. H : Dix, vingt. Djibril : (*H montre une troisième bande*) Trente. ?: (*H montre un premier carré*) Quarante. H : Trente et… ? ?: Un. Des élèves : Trente-deux, trente-trois. H : Alors, est-ce que tu penses que tu as délivré le bon message ? Djibril : Non. H : Non. Alors, je vais demander à Anita. Anita ? Anita : Quatre bande de dix, et trois tout seuls. H : Quatre bandes de dix et trois tout seuls (*H rajoute une quatrième bande au tableau*). Est-ce que tout le monde est d'accord avec ce message-là ? Les élèves : Oui. H : Oui ?
	<u>3.2</u>	53'55

	<u>Description</u> : L'enseignante demande (à nouveau) à un élève de fournir une égalité de type 10+10+10+10+3 = 43. <u>Contenu</u> : C'est l'enseignante qui écrit l'égalité voulue sous la dictée d'un élève. En ce qui concerne le statut d'une telle égalité, les mêmes remarques que pour l'épisode 3.2 de la quatrième tâche sont valables. La validation de la réponse se fait comme précédemment dans la séance, OG vers OF via cette fois-ci la symbolisation des paquets de dix par « 10 », remplaçant ainsi le rôle joué par une production graphique de type 1 (GraC). Le mot « dizaine » introduit précédemment est réemployé par l'enseignante. Cette fois-ci les dizaines sont énumérées par des adjectifs ordinaux : deuxième, troisième, quatrième (voir note de fin de document à ce sujet). L'enseignante n'indique pas qu'il y a quatre dizaines, son projet n'est donc pas de relier dans cette séance le nombre de dizaines à l'écriture chiffrée. A la fin de cet épisode l'enseignante indique d'ailleurs aux élèves que la séquence d'apprentissage n'est pas terminée.	H : Alors, Anita tu peux me l'écrire en utilisant des nombres ? Non, non dis-le moi, dis-le moi Anita : Dix. H : Je t'écoute. Dix. Anita : Plus dix plus dix plus dix plus trois est égal à… (*H écrit en même temps au tableau « 10+10+10+10+3 = 43 »*). Mathis : Non. H : Mathis laisse-la, tu diras après si tu as besoin de dire quelque chose. Anita : Est égal à quarante-trois. H : Est-ce que vous êtes d'accord avec ça ? Des élèves : Oui. H : (*Enonçant les dizaines au fur et à mesure qu'elles sont énumérées une à une par un geste dans la collection des bandes affichées*) Alors j'ai dix, et là j'ai bien une dizaine. Encore dix ma deuxième dizaine, encore dix ma troisième dizaine, et dix ma quatrième dizaine. Dix plus dix plus dix plus dix plus trois quarante-trois. Je suis d'accord avec toi. Qui n'est pas d'accord avec elle ? ?: Maîtresse ? J'avais le même message H : Tu avais le même message ? Qui avait ce message-là encore ? (*Des élèves lèvent le doigt*) C'est tout ? Tu avais ce message-là tu me l'as dit, alors lève la main ! Qui avait le bon message ? Mais oui, tu me l'as dit. 54'58 H : Alors, on croise les bras. Donc nous continuerons à travailler la semaine prochaine sur des messages, d'accord ? Mathis, tu me déranges. Là on va s'arrêter, c'est l'heure de manger, donc je vais vous demander de croiser les bras. (*Les élèves croisent les bras puis sortent par rang*). 55'18

Lancement 0'- 4'28

1er épisode : lancement de l'exercice 2 p. 70, en classe entière, l'enseignante est devant le tableau et dirige la phase.

11

Description :
Lecture du bon de commande de Zoé et résolution collective.

Contenu :
Tout le bon de commande est lu avec les élèves avant d'être complété. En particulier l'écriture chiffrée « 36 » est lue « trente-six ». La résolution se fait en interrogeant un élève auquel il est rappelé expressément qu'il faut *« trente-six boutons* », engageant ainsi sur une stratégie OF vers OG[342] (contextualisée) : « trente-six » vers « ... paquets de dix boutons et ... boutons (tout seuls) ». L'élève interrogé est considéré comme « plutôt bon élève» par l'enseignante (entretien post-séance). Sa réponse (correcte) est évaluée positivement par cette dernière (donc sans argumentation ni vérification). La stratégie n'est donc pas explicitée.

1. OG est ici la transcription écrite « mot à mot » de OG. Cependant ici elle n'est que partielle, puisqu'il faut compléter des phrases, uniquement

00'

H : Très bien. Attention on s'attaque à l'exercice et là il va falloir lire les consignes. Exercice numéro deux j'attends qu'il y ait le calme. Je veux Dounia.
Non, non, je n'ai pas le silence. Dounia on t'écoute.

Dounia : *(Inaudible)*

H : Non, les bons de commandes, pas les bonbons de commande ! Ça ne veut rien dire ! Les bons de commande. Nous tout à l'heure on a fait les bons de commande. Et bien, qu'est-ce que l'on voit ? C'est qui la petite fille déjà ?

Des élèves : Zoé.

H : Bon alors Zoé, tu peux lire ce qu'il lui faut ?

Dounia : *(Lisant)* Il faut trente-six boutons. Ma commande.

H : Alors Zoé, elle veut trente-six boutons, il y a marqué *(H écrit au tableau « Il faut trente-six boutons* ») : il me faut trente-six…

?: Bonbons.

H : Non, des bonbons ? Des boutons. N'importe quoi, lisez. Alors, et après il y a marqué : ma commande (*elle écrit « Ma commande* »). Attends il y a des petits points et il y a marqué : paquets de dix boutons (*elle écrit « ... paquets de dix boutons* »), et il y encore des petits points et il y a marqué des boutons, des boutons tout seuls (*elle écrit « ... boutons* »). On peut dire des boutons isolés pour des boutons tout seuls. Alors, on va faire le premier ensemble, et après vous faites tout seuls et vous m'appelez. Avant j'expliquerai la deuxième consigne.
(*H s'assoit*).

1'50

H : Alors, Gabriel, on ne t'a pas entendu encore. Pour trente-six boutons il te faut combien de paquets de dix, et combien de boutons tout seuls ?

Gabriel : Il faut trois bandes de dix et six tout seuls.

342

	avec des chiffres.	H : (*H écrit au tableau « 3 » «et « 6 » à l'emplacement des pointillés)* Est-ce que vous êtes d'accord ? Des élèves : Oui. H : Alors vous complétez votre bon de commande. Je suis d'accord avec toi Gabriel. Est-ce que quelqu'un n'est pas d'accord avec ça ? ?: Moi je suis d'accord. H : Tu es d'accord ? Et bien tant mieux.
	1.2 Description : Evocation des deux autres tâches de l'exercice 2 p.70. Contenu : La tâche n'est pas rappelée en ce qui concerne la commande de Gribouille et d'Arthur. La façon dont elle est présentée dans le manuel (même « habillage » que pour Zoé) la rend facilement reconnaissable (même tâche que « Zoé »). L'écriture chiffrée est lue en classe : 32 est lu trente-deux et 82, quatre-vingt-deux. Ceci favorise à nouveau une stratégie OF ver OG et non sur EC vers OG.	2'22 H : Et bien après, regardez bien, il y a Gribouille. Combien il a besoin de boutons Gribouille ? Des élèves : (*lisant « 30 »)* Trente. H : Trente. 2'35 H : Et Arthur il en a besoin de combien ? ?: (*lisant « 82 »)* Quatre-vingt-deux. H : Quatre-vingt-deux.
2ème épisode : lancement de l'exercice 3		
	Description : Indication de la tâche de l'exercice 3 p.70. Contenu Seul le premier des quatre exercices est traité. Sa solution est donnée, ce qui va	2'40 H : Attends Mathis, écoute bien, parce que là maintenant, on va regarder l'exercice numéro deux, l'exercice numéro trois pardon, avant que vous le fassiez tout seuls. Alors, Chana a compris apparemment, elle va nous expliquer. Alors vas-y. Chana : C'est pareil qu'en haut sauf que en haut il y a le numéro, il y a sept et huit. Il y a des petits points mais…

	constituer l'indication de la tâche pour les autres exercices (même habillage). C'est un élève qui donne la réponse, l'enseignante ayant auparavant mis l'accent sur le « 7 » (lu sept) et le « 8 » (lu huit). L'élève formule sa réponse sous la forme d'énonciation des chiffres « *En tout un sept et un huit* ». Aucune explication sur sa stratégie n'est demandée, il n'est donc pas possible de connaître laquelle il a employée. Il n'est pas nécessaire de transcrire la réponse dans sa désignation parlée en France, mais c'est ce que demande l'enseignante. L'élève se trompe (il dit soixante-huit au lieu de soixante-dix-huit), créant un **incident**. L'enseignante le guide alors. La formulation de la désignation parlée en France peut lui permettre de s'assurer que les élèves conçoivent la réponse comme un nombre (et non une juxtaposition de chiffre), mais elle peut aussi renforcer l'idée qu'un nombre ne peut s'exprimer qu'avec une désignation parlée en France (dont l'écriture chiffrée est la forme écrite).	H : Alors, c'est ça, c'est l'inverse : c'est qu'ici il y a des petits points, ici il y a marqué quoi ? ?: Sept. H : Sept, et huit (*H écrit « 7 » et « 8 » à la place* du *« 3 » et du « 6 » au tableau).* Il faut sept paquets de dix…Tu es très impolie Johanna, tu peux t'excuser s'il te plait ? Johanna : Je m'excuse. H : D'accord. Il y a sept paquets de dix, et huit boutons tout seuls. On en est à l'exercice numéro trois, l'encadré violet Mademoiselle, on en est là. Tout le monde a son doigt dessus ? Ton doigt dessus s'il te plait Riyad. Vous voyez ? Sept paquets de dix et huit boutons tout seuls ? Ça veut dire qu'on va chercher, on va faire l'inverse, on va savoir combien il nous faut de boutons en tout. Combien il nous faut de boutons en tout ? Je vais demander à Mathis. Qu'est-ce que je vais écrire ici ? *(Montrant les trois points de la première phrase du message au tableau)* Mahtis : En tout un sept et un huit. H : Un sept et un huit quand tu le lis ça fait quoi ? *(Écrivant « 78 »)* Mathis : Soixante-huit. H : Non. ?: Soixante-dix-huit. H : Tu t'appelles Mathis ? Alors tu fermes ta bouche. Mathis : Soixante. H : Dix. Des élèves : Huit. H : Soixante-dix-huit, c'est bien. Soixante-dix-huit, d'accord ? 4'28

<table>
<tr><th colspan="3">Réalisation de la tâche des élèves et de validation 4’28 – 14’02</th></tr>
<tr><th colspan="3">1er épisode : gestion des rythmes différents des élèves par l’indication d’une autre tâche et validation de certains fichiers</th></tr>
<tr><td></td><td>Description :
L’enseignante va gérer le rythme différent des élèves en donnant une nouvelle tâche à ceux qui ont fini. Elle passe aussi parmi les rangs pour regarder les réponses des élèves sur leur fichier.
Contenu :
C’est le fait que de constater que des élèves ont rapidement fini l’exercice et de manière non erronée (ils l’ont fait pendant la première phase) qui déclenche un incident. L’enseignante le gère en donnant une tâche supplémentaire. Cette tâche reste mathématique. Elle est routinière pour les élèves, estimée non problématique par l’enseignante (un entraînement) et ne nécessite pas sa présence dans son déroulement matériel (tâche réalisée en autonomie). Par ailleurs, elle n’est pas en lien direct avec celle du fichier. Ceci permet à l’enseignante de passer parmi les rangs, en particulier de s’occuper de ceux susceptibles d’avoir des difficultés (voir épisode suivant). Ces derniers sont repérés du fait qu’ils donnent des réponses erronées : elle évalue positivement les productions des élèves correctes en mettant un « B » sur leur</td><td>4’28
H : Allez, maintenant, vous vous mettez au travail. (Des élèves lèvent le doigt. H regarde le travail d’un élève et constate qu’il a fini). Ceux qui ont terminé le travail…
?: C’est parce que ils n’ont pas écouté.
H : C’est parce qu’ils n’ont pas écouté parce qu’on n’a même pas commencé que tu as déjà terminé. (A ?) Donc je vais venir te voir et je te donne un travail supplémentaire en attendant, d’accord ? (elle va voir son fichier et marque un B.)
?: Oh, t’as pas écouté !
H : Mathis, arrête s’il te plaît.
H : (A l’élève précédent) : Tu vas prendre ton compteur et tu vas essayer, tu vas prendre une feuille de papier, avec ton compteur tu vas essayer de retrouver les mêmes nombres que ceux-là (montrant dans le cahier). D’accord ? Avec ton compteur tu retrouves les mêmes nombres, et c’est très bien.
Alors écoutez bien : ceux qui ont terminé en attendant que je vienne corriger vous prenez votre compteur et vous essayer de refaire les mêmes nombres de boutons avec votre compteur. D’accord ? Ça va être assez facile je sais mais ou sinon après vous pouvez vous inventer…(A ?) Tu lui dis « montre-moi trente-quatre avec ton compteur » et toi tu lui montres.
(A ?) Alors quand on a fini on fait quoi ?
H : (H passe parmi les élèves) Alors je ne vais pas pouvoir corriger tout le monde, il faut que je sois un petit peu avec Sabrina et Clara. Est-ce que je peux avoir deux minutes de silence ? Mathis, deux minutes de silence. Quand vous avez terminé vous laissez vos fichiers ouverts pour que je puisse les corriger.
H : (A ?) Tu permets que j’explique ? Vous utilisez votre compteur et avec votre voisin vous demandez à votre voisin un nombre, il écrit ce nombre, et lui il vous donne un nombre, vous écrivez le nombre qu’il vous donne, d’accord ? Et vous vérifiez si vous êtes d’accord, ok ? Mathis, tu nous réexpliques la consigne.
Mathis : Quand ...
H : Non, non, Mathis. Tes camarades n’ont pas compris quand on répétait la consigne, il fallait que tu aies le silence. Charlotte ! On t’écoute Mathis. Réexplique la consigne pour l’exercice supplémentaire.</td></tr>
</table>

	fichier. Leur stratégie n'est donc pas questionnée, en particulier il n'est pas possible de savoir s'ils ont procédé de manière « mécanique » en reportant les chiffres dans les bonnes cases.	Mathis : Quand la maîtresse nous a pas corrigé on prend son compteur et avec son copain, son copain lui dit des nombres, et on doit l'écrire sur son compteur. H : D'accord. Est-ce que tout le monde a bien compris ? ?: J'ai pas de voisin. H : Tu n'as pas de voisin ? Et bien tu vas le faire avec les trois filles. Tu peux le faire avec Jihan.
	2ème épisode : aide en direction de certains groupes d'élèves et validation de certains fichiers	
	<u>Description</u> : L'enseignante s'assoit à une table où six élèves travaillent sur leur fichier. Elle va s'occuper de trois d'entre eux. Ensuite elle passe valider certains fichiers. <u>Contenu :</u> Cette table de six regroupe en particulier certains élèves considérés comme ayant plus de difficultés que les autres (entretien post-séance). C'est pour cette raison que l'enseignante va les voir. L'intervention principale concerne Clara. Elle est précédée de celle auprès de Sabrina et Djibril. En ce qui concerne Sabrina, l'aide consiste en une relance en revenant sur l'exercice traité au tableau « *Tu vois là, il y avait trente-six boutons, trois paquets de dix et six tout seuls* » afin que l'élève fasse une analogie avec celui qu'elle aborde (le bon de commande de Gribouille, « 30 »). Seule cette aide, incitant à une stratégie OF vers OG, est prodiguée. En fin d'épisode, Sabrina montre à l'enseignante qu'elle a la bonne réponse. Aucune explication ne sera demandée par l'enseignante sur la stratégie. Les réponses de Djibril sont évaluées négativement par l'enseignante qui lui demande de recommencer, sans donner d'aide. Elle indique dans un entretien post-séance	8'00 H : *(H est auprès de Sabrina)* Il faut trente boutons ici (*montrant le message avec « 30 » sur le fichier de Sabrina*) Il faut combien de paquets de dix ? Sabrina : (*silence*). H : Tu vois là, il y avait trente-six boutons, trois paquets de dix et six tout seuls. H : (*H va voir Djibril et prend son fichier*) C'est faux, c'est n'importe quoi (*elle lui redonne son fichier*). H : (*H va voir Clara)* Alors Clara tu écris à l'envers (*elle efface le « 3 » et le « 6 » que Clara avait recopié au tableau en inversant les deux lignes du message*), regarde : là tu as trente-six (*montrant « 36 » sur le fichier de Clara*), d'accord ? Il faut mettre trois paquets de dix (*elle écrit « 3 » sur le fichier*) et six tout seuls (*elle écrit « 6 » sur le fichier*). Maintenant ici, tu as trente boutons (*montrant le « 30 » du message suivant*). Alors trente boutons, combien il faut de paquets de dix ? Clara : Il faut marquer trente. H : (A Djibril) Non je suis occupée. *(Regardant la production deDjibril)* Tu peux effacer, c'est faux. Regarde bien. H : (*s'adressant à Clara et montrant le « 30 » du fichier)* Alors, il faut trente boutons, trente boutons. Tu te souviens de ce que c'est trente boutons ? Clara : Oui. H : Combien de paquets de dix ? Clara : (*silence*) H : Regarde bien *(H montre un de ses doigt)* : dans un paquet de dix on doit en avoir dix donc on a dix. Alors si je prends deux paquets ? (*montrant deux*

	qu'elle pense possible que l'élève réussisse ainsi, sans aide supplémentaire, en se concentrant (dans la séance l'enseignante n'aura pas le temps de revenir sur le fichier de Djibril). Plusieurs incidents émaillent l'intervention de l'enseignante auprès de Clara. Le **premier incident** intervient quand l'élève reste silencieuse à la question « *Combien de paquets de dix ?* » s'agissant de « trente » (incitation à utiliser une stratégie OF vers OG). L'enseignante gère cet incident en guidant l'élève qui récite (correctement) la comptine des dizaines jusqu'à quarante au fur et à mesure que l'enseignante lève ses doigts. Cette aide n'est pas suffisante puisque cette fois-ci l'élève répond « trente » à la même question (les doigts levés ne sont plus visibles). L'enseignante donne alors la bonne réponse, trois, et décide de la justifier, revenant ainsi à une stratégie inverse OG (trois bandes de dix) vers OF (trente), via GraC (les trois bandes de dix sont accrochées au tableau). La question est à nouveau posée et Clara (ainsi que Sabrina qui est venue les rejoindre) répondent correctement. La stratégie employée peut être une remémoration de la réponse qui a déjà été donnée ou un dénombrement des trois bandes visibles au tableau. Le guidage de l'enseignante, en particulier le découpage de la tâche, n'assure pas que les élèves puissent utiliser par eux-mêmes une stratégie OF vers OG. Celle qui a été indiquée consiste à énumérer la comptine des dizaines avec les doigts, s'arrêter à la dizaine entendue dans la désignation parlée en France initiale « trente », puis, soit à dénombrer le nombre de doigts	*doigts*) Clara : Vingt. H : Vingt. Clara : (*H montre trois puis quatre doigts*) Trente, quarante. H : Quarante. Moi j'en veux combien ? Clara : Trente. H : Donc je vais avoir combien de paquets de dix ? Combien de paquets de dix ? Clara : (silence) H : Un paquet de dix ça fait dix, deux paquets de dix ça fait ? (*montrant deux doigts*) Clara : Vingt. H : Trois paquets de dix ça fait ? (*montrant trois doigts*) Clara : Trente. H : Donc combien j'ai de paquets de dix ? Clara : Trente. H : Non. Trois paquets de dix. D'accord ? Clara : Oui (*Clara s'apprête à écrire*). H : Alors attends, on n'écrit pas, on s'en fiche d'écrire, il faut qu'on comprenne, viens me voir. *(H va au tableau avec Clara)* H : Clara, on a dit…Sabrina, tu peux écouter avec moi s'il te plait. On a dit trente, et il faut savoir combien de paquets. Là si j'ai une bande *(H accroche une bande au tableau)*, ça veut dire que j'en ai combien ? *(Sabrina les rejoint au tableau)* Clara : Dix. H : Si j'ai deux bandes. (*H accroche une deuxième bande au tableau*). Clara : Vingt. H : Si j'ai trois bandes de dix, trois paquets de dix, ça fait trente. (*H accroche une troisième bande au tableau*).Donc est-ce que là, on peut répondre à la question ? Clara : Oui. H : Combien il me faut ?

levés, soit à passer par une production graphique de type 1 (ou prendre un nombre d'objets « bande de dix ») et les dénombrer. Ceci n'indique cependant pas comment obtenir les boutons seuls, ni ne fait le lien avec l'écriture chiffrée A la question de l'enseignante « *Et combien il m'en faut des tout seuls ?* », l'élève indique une réponse erronée « deux », ce qui créé un **deuxième incident**. Cette fois-ci, l'incident est géré par l'intervention d'une autre élève (Sabrina) qui donne la réponse attendue qui est immédiatement évaluée positivement par l'enseignante, ce qui clôt l'intervention de l'enseignante auprès de ces élèves.	Clara/Sabrina (*regardant les trois bandes accrochées au tableau*) Trois. H : Trois. Bravo ! Et combien il m'en faut des tout seuls ? Clara : Deux. H : Bah si j'en mets deux ça fera combien ? Sabrina : Zéro ! H : Bravo, ça fera trois et zéro, d'accord ? *(Clara et Sabrina retournent à leur place)* Sabrina : Fastoche. H : Fastoche maintenant ? Alors finis si c'est fastoche ! *(H va parmi les élèves)*. 10'55 (*H efface le tableau puis circule dans la classe et regarde ce que les élèves ont écrit sur leur fichier, et écrit un B. sur les fichiers*) H : (A ?) Alors, montre-moi. Tu fais n'importe quoi, regarde. Ici, c'est pas ça. *(Brouhaha, inaudible)* Alors tu vois que tu sais. Tu sais et tu ne fais pas. (*H circule dans la classe et regarde ce que les élèves ont écrit sur leur fichier, et écrit un B. sur les fichiers*) 11'50
3ème épisode : annonce de la suite de la séance (la validation des fichiers non encore consultés par l'enseignante)	
<u>Description</u> : L'enseignante clôt la séance en indiquant comment elle va procéder pour les travaux des élèves qu'elle n'a pas encore consultés. Un élève va la solliciter pour avoir une validation de son travail. (l'intervention se fera publiquement, mais l'échange est privé). <u>Contenu :</u> L'enseignante gère le temps pour clore la séance en annonçant que les élèves vont avoir ultérieurement une information sur la validité de leurs réponses. L'interaction avec l'élève qui la sollicite sur son travail se fera publiquement mais l'échange est privé, ne constituant pas ainsi une institutionnalisation : les autres élèves	11'50 H : Alors les enfants vous prenez…Chut, chut, ça y est on va arrêter deux secondes. Vous allez prendre votre compteur, vous allez le mettre dans votre pochette transparente, et vous allez me laisser votre cahier ouvert, parce que moi je vais regarder ce que vous avez fait pendant que vous vous allez manger à la cantine, d'accord ? Et comme ça on pourra en rediscuter et je pourrai voir ceux qui ont des difficultés. (A ?) Tu permets, je suis en train de parler, c'est très impoli ce que tu fais. Vous me laissez vos fichiers ouverts, même ceux que j'ai corrigés. Romain, tu me déranges, et tu déranges tes camarades parce qu'à cause de toi on va être obligés d'attendre le silence donc on ne va pas pouvoir sortir à l'heure à la cantine. Donc j'attends, vous avez les bras croisés.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>entendent ce qui est dit mais ne voient pas le fichier. L’élève en question est un des élèves de la phase précédente (Sabrina). Il présente sa production que l’enseignante évalue positivement dans un premier temps. Il reste ensuite silencieux quand l’enseignante lui demande s’il a compris, ce qui créé un **incident.** L’enseignante pose une question à propos de quarante (donné oralement), sollicitant une stratégie OF vers OG pour un nombre multiple de dix (la réponse ne demande pas de « boutons tout seuls »). La réponse de l’élève est fausse (trois). L’enseignante donne alors une aide en indiquant les chiffres de l’écriture chiffrée correspondante : la désignation parlée en France, l’oral « quarante », est identifiée à sa forme écrite « 40 ». L’enseignante décode directement l’écriture chiffrée en indiquant dans l’ordre le « 4 » dit quatre puis le « 0 » dit zéro. Cette fois-ci l’élève donne la bonne réponse.
Dans ce cas, la stratégie indiquée par l’enseignante consiste à traduire la désignation parlée en France sous sa forme écrite chiffrée (utilisant ainsi un savoir ancien), puis de distinguer les deux chiffres, le premier indique le nombre de paquets de dix. L’écriture chiffrée est donc un moyen pour déterminer dans le contexte Ziglotron le nombre de paquets/bandes/plaques de dix (boutons) (et éventuellement de boutons/jetons/carrés « tout seuls », bien que ceci ne soit pas en jeu dans le dernier échange), à partir de la désignation parlée en France de la quantité. A noter que dans les séances précédentes les élèves ont obtenu cette dernière la plupart du temps par un comptage un à un.</td>
<td>H : (*Sabrina montre son fichier à H*) Bravo c’est bien ça, super ! Qui est-ce qui t’a aidée ?
Sabrina : *(Inaudible)*
H : Et elle t’a aidée pour lequel ? Et celui-là tu les as fait toute seule ?
Sabrina : Oui.
H : Très bien. Est-ce que tu as compris maintenant ?
Sabrina : (*silence*)
H : Alors, Sabrina, si ici j’ai besoin de quarante boutons, je vais prendre combien de bandes, euh combien de paquets de dix ? Quarante j’en veux ?
Sabrina : Trois
H : Eh bien non, là j’ai pas dit trente, j’en veux quarante. Quarante c’est un quatre et un zéro.
Sabrina : Quatre bandes.
H : Voilà, très bien, je te félicite, je suis contente de toi, très, très bien.
(A ?) On s’en occupe tout à l’heure.
Alors attention vous avez les bras croisés. *(H se prépare à donner le signal du départ à la cantine).*
14’02</td>
</tr>
</table>

[i] Cependant le problème posé n'étant pas nécessairement considéré par les élèves comme un problème de la structure additive, l'interprétation utilisée peut être aussi analysée comme étant ordinale avec repérant. Les appuis additifs qui interviennent dans l'intervention de l'enseignante « *Dix plus dix ça fait vingt, plus dix ça fait trente, plus dix ça fait quarante* » pour justifier que « *dix plus dix plus dix plus dix égal quarante* », peuvent ainsi être analysés comme des repérants d'une numération ordinale.

[ii] Deux est donc la solution d'un problème additif formulé avec des désignations de la numération parlée en France « *Pour avoir quarante-deux gommettes quand on a quarante il en manque juste deux. C'est ce qu'il vient de dire, je répète. D'où les deux gommettes qu'on demande toutes seules* » et résolu en utilisant l'interprétation additive de la numération parlée en France. Le 2ème épisode de la phase de synthèse de la séance précédente avait permis de voir qu'un tel raisonnement n'est pas une évidence pour tous les élèves. L'enseignante choisit cependant de valider la réponse sans argumenter (évaluation).

[iii] Ccet affichage a pour but d'évoquer les « boutons » disponibles chez le marchand. L'enseignante va utiliser cependant ce matériel pour reproduire certains messages des élèves (des productions graphiques de type 1). Pour cette raison nous les considérons aussi comme des productions graphiques de type 1 (GraC).

[iv] En effet, comme pour l'emploi de la comptine « un, deux, trois, etc. » en maternelle, ceci n'assure pas que le dernier mot prononcé désigne pour l'élève la quantité globale, « trois bandes » ou « trente boutons ». En outre prononcer un, deux, trois bandes, peut être perçu par l'élève comme un procédé d'énumération (marquer les objets pour tous les considérer sans en oublier) que comme la traduction d'une opération arithmétique (trois fois dix égale trente) : voir aussi à ce sujet l'épisode 3.2 de la dernière synthèse de la séance.